Limitné hodnoty postupností

1. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, ak*

$$a_n = (-1)^n \cdot n.$$

Riešenie.

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} 2k = +\infty, \quad \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (-2k-1) = -\infty.$$

Odpoveď. $-\infty$; $+\infty$.

2. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, ak*

$$a_n = (-1)^{n-1} \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right).$$

Riešenie.

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \left(-2 - \frac{3}{2k}\right) = -2,$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(2 + \frac{3}{2k+1}\right) = 2.$$

Odpoveď. -2; 2.

3. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, ak*

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

Riešenie.

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2k} + 1\right) = 1,$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{2k+1} + 0\right) = 0.$$

Odpoveď. 0; 1.

4. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak

$$a_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n\cdot(-1)^n}}.$$

Riešenie. Pretože

$$a_{2k} = \sqrt[2k]{1 + 2^{2k}}, \quad 2 < a_{2k} < 2 \cdot 2^{\frac{1}{2k}},$$

platí $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 2$. Pretože

$$a_{2k+1} = \sqrt[2k+1]{1 + \frac{1}{2^{2k+1}}}, \quad 1 < a_{2k+1} < 2^{\frac{1}{2k+1}},$$

platí $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = 1$.

Odpoveď. 1; 2.

5. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} \cdot \cos\frac{2\pi n}{3}.$$

Riešenie.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} a_{3k} &= \lim_{k\to\infty} \frac{3k-1}{3k+1} = 1,\\
\lim_{k\to\infty} a_{3k+1} &= \lim_{k\to\infty} \frac{3k}{3k+2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2},\\
\lim_{k\to\infty} a_{3k+2} &= \lim_{k\to\infty} \frac{3k+1}{3k+3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Odpoveď. $-\dfrac{1}{2}$; 1.

6. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak

$$a_n = \cos^n \frac{2\pi n}{3}.$$

Riešenie.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} a_{3k} &= \lim_{k\to\infty} \cos^{3k} 2k\pi = 1,\\
\lim_{k\to\infty} a_{3k+1} &= \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{3k+1} = 0,
\end{aligned}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k+2} = \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{3k+2} = 0.$$

Odpoveď. 0; 1.

7. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *ak*

$$a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cdot \cos\frac{\pi n}{2}.$$

Riešenie.

$$\lim_{k\to\infty} a_{4k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{4k}{4k+1} \cdot \cos 0\right) = 2,$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{4k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{4k+1}{4k+2} \cdot \cos\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{4k+2} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{4k+2}{4k+3} \cdot \cos\pi\right) = 0,$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{4k+3} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{4k+3}{4k+4} \cdot \cos\frac{3\pi}{2}\right) = 1.$$

Odpoveď. 0; 1; 2.

8. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *ak*

$$a_n = 1 + n \cdot \sin\frac{\pi n}{2}.$$

Riešenie.

$$\lim_{k\to\infty} a_{4k} = \lim_{k\to\infty} (1 + 4k \cdot \sin 0) = 1,$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{4k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + (4k+1) \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right) = +\infty,$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{4k+2} = \lim_{k\to\infty} (1 + (4k+2) \cdot \sin\pi) = 1,$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{4k+3} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + (4k+3) \cdot \sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\infty.$$

Odpoveď. $-\infty$; 1; $+\infty$.

9. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *ak*

$$a_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\binom{n}{2}}.$$

Riešenie. $a_{4k}=2, \quad a_{4k+1}=6, \quad a_{4k+2}=-4, \quad a_{4k+3}=0.$

Odpoveď. $-4;\ 0;\ 2;\ 6.$

10. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak

$$a_n=\frac{n}{n+1}\cdot\sin^2\frac{\pi n}{4}.$$

Riešenie.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} a_{4k} &= \lim_{k\to\infty}\frac{4k}{4k+1}\cdot\sin^2 0=0,\\
\lim_{k\to\infty} a_{4k+1} &= \lim_{k\to\infty}\frac{4k+1}{4k+2}\cdot\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2},\\
\lim_{k\to\infty} a_{4k+2} &= \lim_{k\to\infty}\frac{4k+2}{4k+3}\cdot\sin^2\frac{\pi}{2}=1,\\
\lim_{k\to\infty} a_{4k+3} &= \lim_{k\to\infty}\frac{4k+3}{4k+4}\cdot\sin^2\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Odpoveď. $0;\ \frac{1}{2};\ 1.$

11. Nájdite všetky limitné hodnoty postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot(-1)^n+\sin\frac{\pi n}{4}.$$

Riešenie.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} a_{8k} &= \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{8k}\right)^{8k}+0\right)=e,\\
\lim_{k\to\infty} a_{8k+1} &= \lim_{k\to\infty}\left(-\left(1+\frac{1}{8k+1}\right)^{8k+1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-e+\frac{\sqrt{2}}{2},\\
\lim_{k\to\infty} a_{8k+2} &= \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{8k+2}\right)^{8k+2}+1\right)=e+1,\\
\lim_{k\to\infty} a_{8k+3} &= \lim_{k\to\infty}\left(-\left(1+\frac{1}{8k+3}\right)^{8k+3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-e+\frac{\sqrt{2}}{2},\\
\lim_{k\to\infty} a_{8k+4} &= \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{8k+4}\right)^{8k+4}+0\right)=e,\\
\lim_{k\to\infty} a_{8k+5} &= \lim_{k\to\infty}\left(-\left(1+\frac{1}{8k+5}\right)^{8k+5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-e-\frac{\sqrt{2}}{2},
\end{aligned}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{8k+6} = \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{8k+6}\right)^{8k+6} - 1\right) = e-1,$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{8k+7} = \lim_{k\to\infty}\left(-\left(1+\frac{1}{8k+7}\right)^{8k+7} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -e-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Odpoveď. $-e-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $-e+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $e-1$; e; $e+1$.

12. Definujme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *vzťahom*

$$a_n = \sqrt{n} - \left[\sqrt{n}\right], \quad n \in \mathbb{N}$$

(kde symbolom $[x]$ *označujeme celú časť reálneho čísla* x*). Dokážte, že pre každé* $\alpha \in [0,1]$ *existuje podpostupnosť* $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *taká, že platí*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha.$$

Riešenie. Položme

$$n_k = k^2 + 2\cdot[\alpha k], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Najskôr ukážeme, že $\left[\sqrt{n_k}\right] = k$. Skutočne,

$$k^2 \le k^2 + \underbrace{2\cdot[\alpha k]}_{\ge 0} \le k^2 + 2\cdot\alpha k \le k^2 + 2k < k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2,$$

teda

$$k \le \sqrt{k^2 + 2\cdot[\alpha k]} < k+1.$$

Potom

$$a_{n_k} = \sqrt{n_k} - [\sqrt{n_k}] = \sqrt{k^2+2\cdot[\alpha k]} - k,$$

teda

$$a_{n_k} = \frac{k^2+2\cdot[\alpha k]-k^2}{\sqrt{k^2+2\cdot[\alpha k]}+k} = \frac{2\cdot[\alpha k]}{\sqrt{k^2+2\cdot[\alpha k]}+k} \le \frac{2\alpha k}{\sqrt{k^2}+k} = \alpha.$$

Ďalej platí

$$\begin{gathered}
\alpha k < [\alpha k] + 1 \\
2\alpha k < 2\cdot[\alpha k] + 2 \\
k^2 + 2\alpha k < k^2 + 2\cdot[\alpha k] + 2 \\
k^2 + 2\alpha k - 2 < k^2 + 2\cdot[\alpha k] \\
\sqrt{k^2+2\alpha k-2} < \sqrt{k^2+2\cdot[\alpha k]}, \quad (k>1) \\
\sqrt{k^2+2\alpha k-2} - k < \sqrt{k^2+2\cdot[\alpha k]} - k = a_{n_k} \\
\frac{k^2+2\alpha k-2-k^2}{\sqrt{k^2+2\alpha k-2}+k} < a_{n_k}.
\end{gathered}$$

Teda
$$\frac{2\alpha k - 2}{\sqrt{k^2 + 2\alpha k - 2} + k} < a_{n_k} \leq \alpha,$$
odkiaľ vyplýva, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$.