Cauchyho nerovnosť

Lema 1. *Nech a a b sú reálne čísla. Nech x a y sú kladné reálne čísla. Potom platí*

$$\frac{(a+b)^2}{x+y} \le \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}.$$

Dôkaz. Danú nerovnosť stačí prepísať do ekvivalentného tvaru: $(ay-bx)^2 \ge 0$. $\square$

Tvrdenie 1. *Nech $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú reálne čísla. Nech $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú kladné reálne čísla. Potom platí*

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n} \le \frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n}.$$

Dôkaz. Matematickou indukciou. Podľa predchádzajúcej lemy máme

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{n+1})^2}{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}} \le \frac{a_1^2}{x_1} + \frac{(a_2+\cdots+a_{n+1})^2}{x_2+\cdots+x_{n+1}} \le \frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}}.$$

$\square$

Veta 1. (*Cauchy*ho nerovnosť) *Nech $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ sú reálne čísla. Potom platí*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Dôkaz. Ak čísla $b_1, b_2, \dots, b_n$ sú nenulové, stačí použiť predchádzajúce tvrdenie:

$$\frac{(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2}{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \le \frac{(a_1b_1)^2}{b_1^2} + \frac{(a_2b_2)^2}{b_2^2} + \cdots + \frac{(a_nb_n)^2}{b_n^2} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2.$$

$\square$

Zobrazenie

Nech X a Y sú množiny. Symbolom $X \to Y$ budeme označovať množinu všetkých zobrazení množiny X do množiny Y. Zápis $f : X \to Y$ znamená, že $f \in (X \to Y)$. Symbolom $f(x)$ označujeme hodnotu zobrazenia f v prvku $x \in X$. Zápis $x \mapsto f(x)$ znamená, že prvku x je priradený prvok $f(x)$.

Nech M je množina. Ak je každému prirodzenému číslu n priradený istý prvok $a_n \in M$, potom hovoríme, že

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$$

je *postupnosť* prvkov množiny M. Teda postupnosť je zobrazenie $\mathbf{a} : \mathbb{N} \to M$, ktoré je definované predpisom $\mathbf{a}(n) = a_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Postupnosť často zapisujeme v skrátenom tvare $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Prvky a_n nazývame *členy* postupnosti $\mathbf{a}$.

Nech $f : X \to Y$. *Obraz množiny* $A \subseteq X$ definujme predpisom

$$f[A] = \{f(a) : a \in A\}.$$

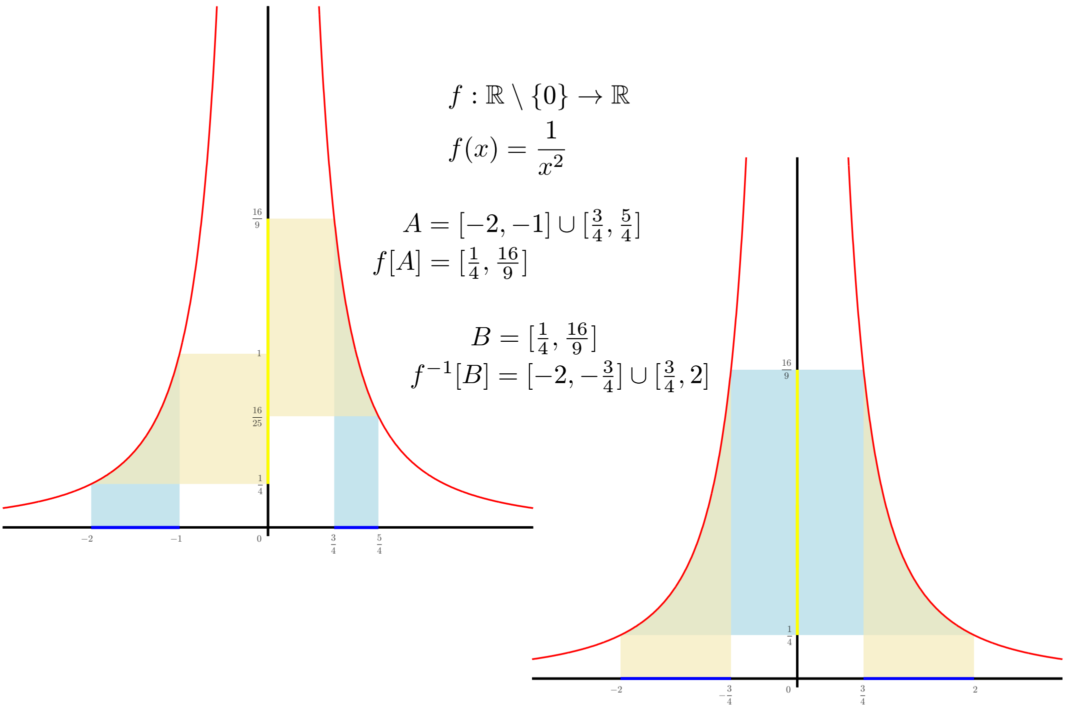
Obraz množiny X sa volá *obraz zobrazenia* f. Označujeme ho symbolom $\operatorname{Im} f$. Teda $\operatorname{Im} f = f[X]$.

Vzor množiny $B \subseteq Y$ definujme predpisom

$$f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Ak množina B je jednoprvková, t.j. v prípade $B = \{y\}$, namiesto $f^{-1}[\{y\}]$ píšeme $f^{-1}[y]$.

Príklad 1.



Príklad 2. Nech $X = \{a, b\}$, kde $b = \{a\}$. Definujme zobrazenie $f : X \to X$ predpisom $f(x) = a$ pre každé $x \in X$. Potom $f[b] = b \neq a = f(b)$.

Zobrazenie $f : X \to Y$ sa volá *injektívne*, ak pre každé $y \in Y$ rovnica $f(x) = y$ (s neznámou x) má najviac jedno riešenie.

Zobrazenie $f : X \to Y$ sa volá *surjektívne*, ak pre každé $y \in Y$ rovnica $f(x) = y$ (s neznámou x) má aspoň jedno riešenie.

Zobrazenie $f : X \to Y$ sa volá *bijektívne*, ak pre každé $y \in Y$ rovnica $f(x) = y$ (s neznámou x) má práve jedno riešenie.

Úloha 1. Zistite, či zobrazenie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované pre každé $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ predpisom $f(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$

a) je injektívne,

b) je surjektívne.

Príklad 3. Nech X je množina všetkých postupností $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reálnych čísel, pre ktoré rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ konverguje.

Definujme zobrazenie $T : X \to X$ predpisom $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, kde

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2^{n-1}} \quad \text{pre každé prirodzené číslo } n.$$

Najskôr ukážeme, že zobrazenie T je korektne definované. Nech $\mathbf{x} \in X$. Overíme, že rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2^{n-1}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$$

je konvergentný. Stačí použiť *Cauchy*ho nerovnosť:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \le \underbrace{(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2)}_{=n} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \le n \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2.$$

Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2.$$

Pretože obidva rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{4^{n-1}}$ a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$ konvergujú, postupnosť $T(\mathbf{x})$ patrí do množiny X.

Teraz ukážeme, že zobrazenie T je injektívne. Nech $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in X$. Predpokladajme, že platí

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{z}). \tag{1}$$

Ukážeme, že potom pre každé prirodzené číslo n platí $x_n = z_n$.

Z rovnosti (1) vyplýva, že

$$\frac{x_1}{2^0} = \frac{z_1}{2^0}, \qquad \frac{x_1 + x_2}{2^1} = \frac{z_1 + z_2}{2^1}, \qquad \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2^2} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{2^2}, \qquad \ldots$$

Odtiaľ postupne dostávame $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2$, $x_3 = z_3$, ...

Nakoniec ukážeme, že zobrazenie T nie je surjektívne. Nech $\mathbf{y}$ je postupnosť reálnych čísel definovaná predpisom $y_n = \dfrac{1}{n}$ pre každé prirodzené číslo n. Pretože rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentný, postupnosť $\mathbf{y}$ patrí do množiny X. Nech $\mathbf{x}$ je taká postupnosť prvkov množiny X, pre ktorú platí $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Pretože

$$2^{n-1} y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$
$$2^n y_{n+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1},$$

máme

$$x_{n+1} = 2^n y_{n+1} - 2^{n-1} y_n = \frac{2^n}{n+1} - \frac{2^{n-1}}{n} = \frac{2^{n-1}(n-1)}{n(n+1)}.$$

Pretože $\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \infty$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ nespĺňa nutnú podmienku konvergencie. To je v spore s tým, že postupnosť $\mathbf{x}$ patrí do množiny X.

Tvrdenie 2. *Nech $f : X \to Y$ je zobrazenie. Potom pre každé $A_1, A_2 \subseteq X$ a pre každé $B_1, B_2 \subseteq Y$ platí*

(a) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$,

(b) $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$; *ak f je injektívne, potom platí rovnosť,*

(c) $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$,

(d) $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$.

Tvrdenie 3. *Nech $f : X \to Y$ je zobrazenie. Potom pre každé $A \subseteq X$ a pre každé $B \subseteq Y$ platí*

(a) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$; *ak f je injektívne, potom platí rovnosť,*

(b) $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$; *ak f je surjektívne, potom platí rovnosť,*

(c) $f^{-1}[Y \setminus B] = X \setminus f^{-1}[B]$.

Nech $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ sú zobrazenia. *Zložené zobrazenie* $g \circ f : X \to Z$ definujeme predpisom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pre každé } x \in X.$$

Identita na množine X je zobrazenie $I_X : X \to X$, ktoré je definované predpisom $I_X(x) = x$ pre každé $x \in X$.

Nech $f : X \to Y$ je bijektívne zobrazenie. Potom existuje jediné zobrazenie $f^{-1} : Y \to X$, pre ktoré platí

$$f^{-1} \circ f = I_X, \qquad f \circ f^{-1} = I_Y.$$

Zobrazenie f^{-1} sa volá *inverzné zobrazenie* ku f.

Úloha 2. Definujme dve postupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ predpismi

$$a_{2j-1} = j, \quad a_{2j} = a_j;$$
$$b_{2j-1} = 1, \quad b_{2j} = 1 + b_j.$$

Overte, že priradenie $j \mapsto (a_j, b_j)$ definuje bijekciu medzi množinami $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Nájdite k nej inverzné zobrazenie.

Vektorový priestor

Nech $\mathbb{F}$ je pole. My budeme pracovať s poľom $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísel a s poľom $\mathbb{C}$ všetkých komplexných čísel. Ak teda nejaké tvrdenie vyslovíme pre pole $\mathbb{F}$, bude to znamenať, že toto tvrdenie platí aj pre pole $\mathbb{R}$, aj pre pole $\mathbb{C}$.

Vektorový priestor V nad poľom $\mathbb{F}$ je množina prvkov, ktoré voláme *vektory*, na ktorej je definované *sčítanie* vektorov a skalárne *násobenie* vektorov, ktoré majú nasledujúce vlastnosti:

- Sčítanie je *asociatívne*, t.j. pre všetky vektory x, y, z patriace do množiny V platí: $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- Sčítanie je *komutatívne*, t.j. pre všetky vektory x, y patriace do množiny V platí: $x + y = y + x$.
- Existuje práve jeden vektor, ktorý voláme *nulový vektor* a označujeme ho 0, pre ktorý platí $x + 0 = x$ a $0 + x = x$ pre všetky vektory x patriace do množiny V.
- Pre každý vektor x patriaci do množiny V existuje práve jeden vektor patriaci do množiny V, voláme ho *opačný vektor* k vektoru x a označujeme ho ^-x, pre ktorý platí $x + {}^-x = 0$ a $^-x + x = 0$.
- Pre každé $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ a pre každé $x \in V$ platí: $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
- Pre každé $x \in V$ platí: $1x = x$, kde 1 je jednotka poľa $\mathbb{F}$.
- Pre každé $\alpha \in \mathbb{F}$ a pre každé $x, y \in V$ platí: $(\alpha + \beta)x = (\alpha x) + (\beta x)$.
- Pre každé $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ a pre každé $x \in V$ platí: $\alpha(x + y) = (\alpha x) + (\alpha y)$.

Prvky poľa $\mathbb{F}$ voláme *skaláry.* Niekedy namiesto pomenovania vektorový priestor budeme používať názov *lineárny priestor* a jeho prvky budeme volať *body.* Pretože podľa dohody o priorite operácií má násobenie prednosť pred sčítaním, niektoré zátvorky môžeme vynechať. Napr. namiesto $(\alpha x) + (\beta y)$ píšeme $\alpha x + \beta y$.

Pripomeňme si, že v matematike niektoré symboly používame v rôznych významoch. Napr. ten istý symbol 0 označuje nulu poľa $\mathbb{F}$, ale aj nulový vektor priestoru V. Musíme si na to dávať pozor.

Typickým príkladom vektorového priestoru nad poľom $\mathbb{R}$ je množina $\mathbb{R}^3$ všetkých usporiadaných trojíc reálnych čísel.

Príklad 4. Nech A je neprázdna množina. Potom množina $\mathscr{F}(A)$ všetkých funkcií $f : A \to \mathbb{R}$ je vektorovým priestorom nad poľom $\mathbb{R}$. Ak A je uzavretý interval $[a, b]$, namiesto $\mathscr{F}([a, b])$ píšeme $\mathscr{F}[a, b]$. Ak A je množina všetkých prirodzených čísel, $\mathscr{F}(\mathbb{N})$ je vektorový priestor všetkých postupností reálnych čísel.

Ďalšie vektorové priestory, ktorých prvky sú postupnosti reálnych čísel: množina m všetkých ohraničených postupností, množina c všetkých konvergentných postupností, množina c_0 všetkých postupností konvergujúcich k nule. Všimnime si, že platí:

$$c_0 \subseteq c \subseteq m \subseteq \mathscr{F}(\mathbb{N}).$$

Vektorový podpriestor

Neprázdna podmnožina P vektorového priestoru V nad poľom $\mathbb{F}$ sa volá vektorový *podpriestor* priestoru V, ak je uzavretá vzhľadom na sčítanie vektorov a na skalárne násobenie, t.j. ak sú splnené nasledujúce dve podmienky:

- Pre každé dva vektory $x, y \in P$ platí $x + y \in P$.
- Pre každý skalár $\alpha \in \mathbb{F}$ a pre každý vektor $x \in P$ platí $\alpha x \in P$.

Príkladom vektorového podpriestoru je množina P všetkých tých usporiadaných trojíc reálnych čísel (x, y, z), pre ktoré platí $z = 0$ (ako podmnožina priestoru $\mathbb{R}^3$). Tento podpriestor môžeme stotožniť s vektorovým priestorom $\mathbb{R}^2$. Rozdiel medzi nimi je čisto formálny: prvkami množiny $\mathbb{R}^2$ sú usporiadané dvojice (x, y), pričom prvkami množiny P sú usporiadané trojice $(x, y, 0)$. Teoretický rámec pre takéto stotožnenie poskytuje nasledujúca definícia.

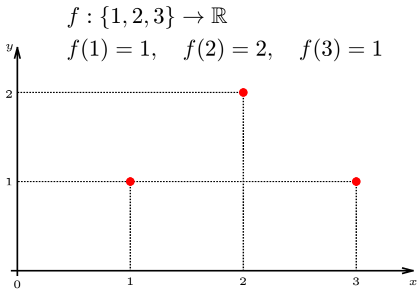
Nech je dané zobrazenie $f : U \to V$, kde U, V sú vektorové priestory nad tým istým poľom $\mathbb{F}$. Hovoríme, že f je *lineárne zobrazenie*, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

- Pre každé dva vektory $x, y \in U$ platí $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- Pre každý skalár $\alpha \in \mathbb{F}$ a pre každý vektor $x \in U$ platí $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

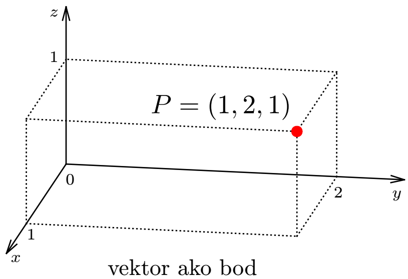
Nech $f : U \to V$ je lineárne zobrazenie. Ak P je vektorový podpriestor priestoru U, potom $f[P]$ je vektorový podpriestor priestoru V. Špeciálne, $\operatorname{Im} f$ je vektorový podpriestor priestoru V. Ak Q je vektorový podpriestor priestoru V, potom $f^{-1}[Q]$ je vektorový podpriestor priestoru U. Špeciálne, $f^{-1}[0] = \{x \in U : f(x) = 0\}$ je vektorový podpriestor priestoru U. Podpriestor $f^{-1}[0]$ sa volá *jadro* lineárneho zobrazenia f. Označujeme ho $\ker f$.

Ak lineárne zobrazenie $f : U \to V$ je bijektívne, hovoríme, že vektorové priestory U a V sú navzájom lineárne *izomorfné*.

Príklad 5. Nech $A = \{1, 2, 3\}$. Potom každej funkcii $f : A \to \mathbb{R}$ môžeme priradiť usporiadanú trojicu reálnych čísel $(f(1), f(2), f(3))$. Tým sme popísali bijekciu $b : \mathscr{F}(A) \to \mathbb{R}^3$, ktorá spĺňa požiadavky z predchádzajúcej definície. Teda vektorové priestory $\mathscr{F}(\{1, 2, 3\})$ a $\mathbb{R}^3$ sú navzájom izomorfné. Táto vlastnosť nám umožňuje rôznu grafickú reprezentáciu vektorov. Napríklad



vektor ako funkcia



vektor ako bod

Symbolom $\mathscr{C}[a,b]$ budeme označovať množinu všetkých spojitých reálnych funkcií definovaných na uzavretom intervale $[a,b]$. Podobne, symbolom $\mathscr{R}[a,b]$ označíme množinu všetkých Riemannovsky integrovateľných funkcií a symbolom $\mathscr{B}[a,b]$ množinu všetkých ohraničených funkcií. Potom každá z nasledujúcich inklúzií vyjadruje vzťah medzi vektorovým priestorom a jeho podpriestorom:

$$\mathscr{C}[a,b] \subseteq \mathscr{R}[a,b] \subseteq \mathscr{B}[a,b] \subseteq \mathscr{F}[a,b].$$

Posunutie a podobnosť

Nech $a \in V$, kde V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{F}$. Zobrazenie $T_a : V \to V$ definované pre každé $x \in V$ predpisom

$$T_a(x) = a + x$$

voláme *posunutie* o vektor a. Pre každú podmnožinu $A \subseteq V$ položme

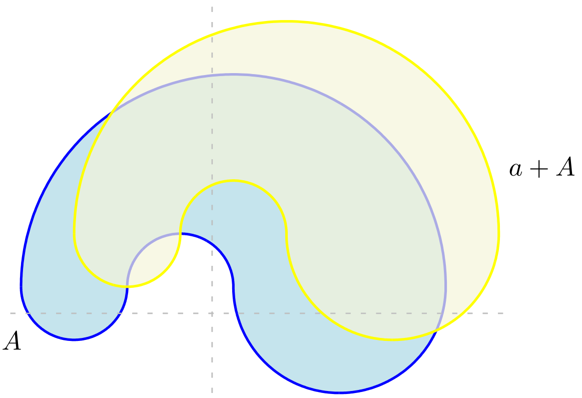
$$a + A = T_a[A] = \{a + x : x \in A\}.$$

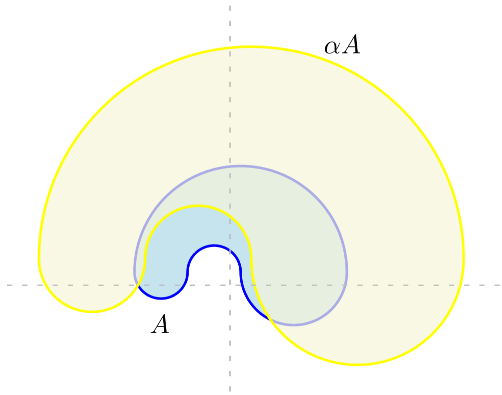
Nech $\alpha \in \mathbb{F}$. Zobrazenie $S_\alpha : V \to V$ definované pre každé $x \in V$ predpisom

$$S_\alpha(x) = \alpha x$$

voláme *podobnosť*, pričom skalár α voláme *koeficient podobnosti*. Pre každú podmnožinu $A \subseteq V$ položme

$$\alpha A = S_\alpha[A] = \{\alpha x : x \in A\}.$$





Hamelova báza

Nech $\{v_1, \ldots, v_n\}$ je konečná neprázdna podmnožina vektorového priestoru V nad poľom $\mathbb{F}$. *Lineárna kombinácia* vektorov $v_1, \ldots, v_n$ je ľubovoľný vektor tvaru

$$x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Hovoríme, že vektory $v_1, \ldots, v_n$ sú *lineárne nezávislé*, ak platí:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

V opačnom prípade hovoríme, že vektory $v_1, \ldots, v_n$ sú *lineárne závislé.*

Nech A je ľubovoľná neprázdna podmnožina vektorového priestoru V. Hovoríme, že A je *množina lineárne nezávislých vektorov*, ak každá jej konečná neprázdna podmnožina obsahuje len lineárne nezávislé vektory.

Lineárny obal množiny $A \subseteq V$ je množina všetkých lineárnych kombinácií vektorov patriacich do množiny A. Označujeme ho $\operatorname{Sp} A$. Je to najmenší vektorový podpriestor priestoru V obsahujúci množinu A.

Tvrdenie 4. *Nech $A \subseteq V$ je množina lineárne nezávislých prvkov. Nech $b \in V \setminus A$. Potom $A \cup \{b\}$ je množina lineárne nezávislých prvkov práve vtedy, keď $b \notin \operatorname{Sp} A$.*

Množina $H \subseteq V$ sa nazýva *Hamelova báza* priestoru V, ak H je množina lineárne nezávislých prvkov a $\operatorname{Sp} H = V$.

Pomocou axiómy výberu možno dokázať, že každý vektorový priestor V má Hamelovu bázu. Hovoríme, že vektorový priestor V je *konečnorozmerný*, ak má konečnú Hamelovu bázu. V takomto prípade počet prvkov Hamelovej bázy voláme *dimenzia* vektorového priestoru V a označujeme ju $\dim V$. V opačnom prípade hovoríme, že vektorový priestor V je *nekonečnorozmerný.*

Každý nenulový vektor možno jednoznačne vyjadriť v tvare lineárnej kombinácie prvkov Hamelovej bázy.

Polonorma

Nech V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{F}$. Funkciu $p : V \to \mathbb{R}$ voláme *polonorma* na V, ak má nasledujúce vlastnosti:

- Pre každé $x, y \in V$ platí $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, tzv. *subaditívnosť.*
- Pre každý skalár $\alpha \in \mathbb{F}$ a pre každý vektor $x \in V$ platí $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, tzv. *absolútna homogenita.*

Polonorma sa volá *norma*, ak má nasledujúcu vlastnosť:

- Pre každý nenulový vektor $x \in V$ platí $p(x) \neq 0$, tzv. *oddeliteľnosť.*

Normu najčastejšie označujeme $\|\cdot\|$, t.j. namiesto $p(x)$ píšeme $\|x\|$.

Príklad 6. Vo vektorom priestore $\mathbb{R}^3$ definujeme polonormu p predpisom

$$p(x, y, z) = \max\{|x|, |y|\}.$$

pre každé $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Táto polonorma nie je normou.

Tvrdenie 5. *Nech p je polonorma na vektorovom priestore V. Potom platí:*

- $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ *pre každé dva vektory $x, y \in V$.*
- $p(0) = 0$.
- $p(x) \geq 0$ *pre každý vektor $x \in V$.*

Ak p je polonorma na vektorovom priestore V, potom množina $\ker p$, ktorú definujeme predpisom

$$\ker p = \{x \in V : p(x) = 0\} = p^{-1}[0],$$

je vektorový podpriestor priestoru V. Voláme ho *jadro* polonormy p.

Pre polonormu z príkladu 6 je týmto podpriestorom množina

$$\ker p = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}.$$

Príklad 7. Pre každú Riemannovsky integrovateľnú funkciu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ položme

$$p(f) = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Tým sme definovali polonormu p na vektorovom priestore $\mathscr{R}[a, b]$. Táto polonorma nie je normou na priestore $\mathscr{R}[a, b]$, avšak je normou na jeho podpriestore $\mathscr{C}[a, b]$.

Pomocou Hamelovej bázy môžeme na každom vektorovom priestore definovať normu. Naozaj, ak $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ je vyjadrenie nenulového vektora x v tvare lineárnej kombinácie prvkov z danej Hamelovej bázy, stačí položiť

$$\|x\| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|.$$

Samozrejme, pre $x = 0$ kladieme $\|x\| = 0$.

Pomocou polonormy definujeme *otvorenú guľu* so stredom v bode x a polomerom $r > 0$ predpisom

$$B(x, r) = \{y \in V : p(y - x) < r\} = x + rB(0, 1).$$

Faktorový priestor

Nech V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{F}$ a P je jeho vektorový podpriestor. Hovoríme, že vektory $x, y \in V$ sú *kongruentné* modulo P, ak platí $x - y \in P$. Zapisujeme to $x \equiv_P y$.

Tvrdenie 6. *Relácia kongruencie modulo P je ekvivalencia, ktorá má nasledujúce vlastnosti:*

(1) Pre každé $x, y, x', y' \in V$ platí:

$$\text{ak } x \equiv_P x',\ y \equiv_P y',\ \text{potom } (x+y) \equiv_P (x'+y').$$

(2) Pre každé $\alpha \in \mathbb{F}$ a $x, y \in V$ platí:

$$\text{ak } x \equiv_P y,\ \text{potom } (\alpha x) \equiv_P (\alpha y).$$

Množina $[x] = \{y \in V : x \equiv_P y\}$, kde $x \in V$, sa volá *vrstva*. Množinu všetkých vrstiev budeme označovať symbolom V/P, t.j.

$$V/P = \{[x] : x \in V\}.$$

Každú vrstvu $[x]$, kde $x \in V$, môžeme vyjadriť v tvare

$$[x] = x + P = \{x + y : y \in P\}.$$

Na množine V/P definujeme sčítanie a skalárne násobenie nasledujúcim spôsobom:

$$[x] + [y] = [x + y], \qquad \alpha[x] = [\alpha x]$$

pre každé $x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{F}$. Množina V/P s takto definovaným sčítaním a skalárnym násobením je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{F}$, ktorý voláme *faktorový priestor*.

Príklad 8. Nech $V = \mathbb{R}^3$ a $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\}$. Potom faktorový priestor

$$V/P = \{[(0, y, z)] : (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

je izomorfný s vektorovým priestorom $\mathbb{R}^2$.

Polonorma na faktorovom priestore

Nech V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{F}$ a P je jeho vektorový podpriestor. Nech p je polonorma na V. Pre každý vektor $x \in V$ položme

$$\rho([x]) = \inf_{y \in P} p(x - y).$$

Potom ρ je polonorma na faktorovom priestore V/P. V prípade, že $P = \ker p$, polonorma ρ je normou, pričom platí

$$\rho([x]) = p(x)$$

pre každé $x \in V$.

Príklad 9. Nech $V = \mathbb{R}^3$ a $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\}$. Nech p je polonorma na V, ktorá je definovaná predpisom

$$p(x, y, z) = \max\{|x|, |y|\}$$

pre každé $(x, y, z) \in V$. Potom pre polonormu ρ na faktorovom priestore V/P platí:

$$\rho([(0, y, z)]) = |y|$$

pre každé $(y, z) \in \mathbb{R}^2$. Polonorma ρ nie je normou.

Metrika

Množina X sa volá *pseudometrický priestor*, ak každým dvom prvkom x a y množiny X je priradené reálne číslo $d(x, y)$ také, že pre každé $x, y, z \in X$ platí

(a) $d(x, y) \geq 0$;

(b) $d(x, x) = 0$;

(c) $d(x, y) = d(y, x)$;

(d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Zobrazenie $d : X \times X \to \mathbb{R}$, sa volá *pseudometrika* na množine X.

Nech V je normovaný priestor s polonormou p. Pomocou tejto polonormy definujeme na priestore V pseudometriku d predpisom

$$d(x, y) = p(x - y) \text{ pre každé } x, y \in V.$$

Množina X sa volá *metrický priestor*, ak každým dvom prvkom x a y množiny X je priradené reálne číslo $d(x, y)$ také, že pre každé $x, y, z \in X$ platí

(a) $d(x, y) \geq 0$;

(b) $d(x, y) = 0$ práve vtedy, keď $x = y$;

(c) $d(x, y) = d(y, x)$;

(d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Zobrazenie $d : X \times X \to \mathbb{R}$, sa volá *metrika* na množine X.

Nech V je normovaný priestor s normou $\|\cdot\|$. Pomocou tejto normy definujeme na priestore V metriku d predpisom

$$d(x, y) = \|x - y\| \text{ pre každé } x, y \in V.$$

Táto (pseudo)metrika je invariantná vzhľadom na posunutie, t.j. pre ľubovoľné $z \in V$ platí

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \text{ pre všetky } x, y \in V.$$

Ľubovoľnú podmnožinu M priestoru X, na ktorom máme (pseudo)metriku d, môžeme pokladať za (pseudo)metrický priestor, v ktorom každým dvom prvkom x a y je priradené číslo $d(x, y)$. V takomto prípade hovoríme, že M je *podpriestor* priestoru X. Pritom (pseudo)metriku na podpriestore M sme formálne dostali ako zúženie zobrazenia d na množinu $M \times M$.

Úloha 3. Zistite, pre ktoré reálne čísla $\xi > 0$ existuje metrika d na štvorprvkovej množine $X = \{O, A, B, C\}$ taká že

$$d(A, B) = d(B, C) = d(C, A) = 1,$$
$$d(O, A) = d(O, B) = d(O, C) = \xi.$$

Ak $\xi = \frac{1}{2}$, môže byť X podpriestorom priestoru $\mathbb{R}^3$ s euklidovskou metrikou $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$? A pre $\xi = \frac{4}{7}$? Ako sa zmení situácia, keď namiesto priestoru $\mathbb{R}^3$ budeme uvažovať priestor všetkých spojitých reálnych funkcií $\mathscr{C}[0,1]$ s metrikou $d(f,g) = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|$?

Úloha 4. Nech (X,d) je metrický priestor. Definuje funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ predpisom

$$f(x) = \tfrac{1}{4} \cdot (2x + 1 - 2|x-1| - |x-2| + |x-3|).$$

Dokážte, že $f \circ d$ je metrika na množine X. V prípade, že Xje množina všetkých reálnych čísel s metrikou $d(x,y) = |x-y|$, popíšte jeho podpriestor $M = \{0,1,2,5\}$.

Nech V je normovaný priestor s normou $\|\cdot\|$. Definujme funkciu $p : V \to \mathbb{R}$ predpisom

$$p(x) = \frac{\|x\|}{1+\|x\|}.$$

Ukážeme, že funkcia p je subaditívna. Nech $x, y, z \in V$. Položme

$$a = \|x\|,\ b = \|y\|,\ c = \|x+y\|.$$

Zrejme a, b, c sú nezáporné reálne čísla. Chceme dokázať, že platí

$$\frac{c}{1+c} \le \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Túto nerovnosť môžeme upraviť do ekvivalentného tvaru:

$$c \le a + b + 2ab + abc.$$

Stačí si už len uvedomiť, že norma $\|\cdot\|$ je subaditívna, odkiaľ máme $c \le a+b$.

Ak vektorový priestor V obsahuje aj nejaký nenulový vektor, potom funkcia p nie je absolútne homogénna. Naozaj, ak $x \in V$ je taký vektor, pre ktorý platí $\|x\| = 1$, potom

$$p(2x) = \frac{\|2x\|}{1+\|2x\|} = \frac{2}{3} \ne 1 = \frac{2\|x\|}{1+\|x\|} = 2p(x).$$

Pomocou funkcie p môžeme však definovať na priestore V metriku predpisom

$$d(x,y) = p(x-y) \quad \text{pre každé} \quad x, y \in V.$$

Nech X je (pseudo)metrický priestor. *Otvorenú guľu* so stredom v bode x a polomerom $r > 0$ predpisom

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

Podmnožinu U priestoru X nazývame *okolie* bodu $x \in U$, ak s bodom x obsahuje aj nejakú guľu so stredom v bode x, t.j. ak existuje $r > 0$ také, že $B(x,r) \subseteq U$.

Takýto bod x sa volá *vnútorný bod* množiny U. Množinu všetkých vnútorných bodov nazývame *vnútro množiny* U. Označujeme ho symbolom $\mathrm{Int}(U)$.

Podmnožina G priestoru X sa volá *otvorená*, ak je okolím každého svojho bodu. To znamená, že pre každé $x \in G$ existuje $r > 0$ také, že $B(x, r) \subseteq G$.

Postupnosť $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bodov priestoru X *konverguje* k bodu $x_0 \in X$ ak platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq n(\varepsilon) : \quad d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Zapisujeme to $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, prípadne $x_n \to x_0$.

Všimnime si, že ak postupnosť $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bodov priestoru X konverguje k bodu $x_0 \in X$, potom konverguje ku každému bodu $x_0' \in X$, pre ktorý platí $d(x_0, x_0') = 0$. Teda jednoznačnosť limity máme zaručenú len v prípade, že pseudometrika d je metrikou.

Hovoríme, že bod $x \in X$ je *bod uzáveru* množiny $V \subseteq X$, ak je limitou nejakej konvergentnej postupnosti bodov množiny V, t.j. ak existuje postupnosť $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prvkov množiny V taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Množinu všetkých bodov uzáveru množiny V nazývame *uzáver* množiny V. Označujeme ho symbolom $\mathrm{Cl}(V)$.

Podmnožina F priestoru X je *uzavretá*, ak obsahuje limity všetkých svojich konvergentných postupností. To znamená, že musí platiť $\mathrm{Cl}(F) = F$. Množina F je uzavretá, ak jej doplnok $G = X \setminus F$ je otvorená množina.

Podmnožina H priestoru X je *hustá* v X, ak každý bod množiny X je bodom uzáveru množiny H, t.j. ak platí $\mathrm{Cl}(H) = X$. Množina H je hustá v X, ak pre každú guľu $B(x, r)$ v priestore X platí $B(x, r) \cap H \neq \emptyset$.

Postupnosť $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prvkov priestoru X je *Cauchy*ovská, ak platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \ \forall m, n \geq n(\varepsilon) : \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Priestor X sa volá *úplný*, ak každá *Cauchy*ovská postupnosť v tomto priestore konverguje.

Izometria

Metrické priestory X, Y (s metrikami d, ρ) sa volajú *izometrické*, ak existuje taká bijekcia $f : X \to Y$, že pre každé $x, y \in X$ platí $d(x, y) = \rho(f(x), f(y))$. Takéto zobrazenie f sa volá *izometria.*

Úloha 5. Ukážte, že ak za priestor X vezmeme množinu všetkých prirodzených čísel s metrikou $d(x, y) = |x - y|$, potom existuje izometria medzi priestorom X a nejakým jeho vlastným podpriestorom Y. Zistite, či analogické tvrdenie platí aj pre množinu všetkých celých čísel (s tou istou metrikou).

Minkowského funkcionál

Podmnožina K vektorového priestoru V sa volá *konvexná*, ak pre každé $x, y \in V$ a pre každé $\lambda \in (0, 1)$ platí: $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$.

Nech p je polonorma na V. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ množina $\{x \in V : p(x) < \varepsilon\}$ je konvexná.

Nech M je podmnožina vektorového priestoru V. *Minkowského funkcionál* množiny M definujeme predpisom

$$p_M(x) = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha M\}$$

pre každé $x \in V$. Minkowského funkcionál môže nadobúdať aj hodnotu ∞ (s využitím rovnosti: $\inf \emptyset = \infty$).

Tvrdenie 7. *Nech M je konvexná podmnožina vektorového priestoru V. Potom Minkowského funkcionál množiny M je subaditívny, t.j. pre každé $x, y \in V$ platí*

$$p_M(x + y) \leq p_M(x) + p_M(y).$$

Dôkaz. Pre každé $x \in V$ položme

$$M(x) = \{\alpha > 0 : x \in \alpha M\}.$$

Nech $x, y \in V$ sú také, že množiny $M(x)$ a $M(y)$ sú neprázdne (v opačnom prípade je dokazovaná nerovnosť triviálne splnená).

Nech $\alpha \in M(x)$, $\beta \in M(y)$. To znamená, že platí

$$\alpha^{-1}x \in M, \qquad \beta^{-1}y \in M.$$

Položme

$$\lambda = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

Pretože množina M je konvexná, platí

$$\lambda(\alpha^{-1}x) + (1 - \lambda)(\beta^{-1}y) \in M,$$

t.j.

$$(\alpha + \beta)^{-1}(x + y) \in M.$$

Odtiaľ vyplýva, že

$$\alpha + \beta \in M(x + y).$$

Pretože $p_M(x + y) = \inf M(x + y)$, máme

$$p_M(x + y) \leq \alpha + \beta.$$

Pretože $\alpha \in M(x)$, $\beta \in M(y)$ boli ľubovoľné, platí

$$p_M(x + y) \leq p_M(x) + p_M(y).$$

$\square$

Tvrdenie 8. *Nech M je konvexná podmnožina vektorového priestoru V. Predpokladajme, že platí $0 \in M$. Potom platí*

$$\{x \in V : p_M(x) < 1\} \subseteq M \subseteq \{x \in V : p_M(x) \leq 1\}.$$

Dôkaz. Najskôr dokážeme druhú inklúziu. Nech $x \in M$. Potom $1 \in M(x)$, teda $p_M(x) \leq 1$.

Teraz dokážeme prvú inklúziu. Nech $x \in V$ je také, že $p_M(x) < 1$. Potom existuje $\alpha \in (0, 1)$ také, že $\alpha^{-1}x \in M$. Pretože množina M je konvexná, máme

$$x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1 - \alpha)0 \in M.$$

□

Tvrdenie 9. *Nech M je podmnožina vektorového priestoru V. Potom pre každé $\alpha > 0$ a pre každé $x \in V$ platí*

$$p_M(\alpha x) = \alpha p_M(x).$$

Dôkaz. Nech $\alpha > 0$ a $x \in V$. Nech $\beta \in M(x)$. Pretože potom $\beta^{-1}x \in M$, máme $(\alpha\beta)^{-1}(\alpha x) \in M$, odkiaľ $\alpha\beta \in M(\alpha x)$. Pretože $p_M(\alpha x) = \inf M(\alpha x)$, máme $p_M(\alpha x) \leq \alpha\beta$. Pretože $\beta \in M(x)$ bolo ľubovoľné, platí $p_M(\alpha x) \leq \alpha p_M(x)$.

Z práve dokázaného tvrdenia vyplýva, že pre každé $\alpha > 0$ a $x \in V$ platí

$$p_M(x) = p_M(\alpha^{-1}(\alpha x)) \leq \alpha^{-1}p_M(\alpha x),$$

odkiaľ $p_M(\alpha x) \geq \alpha p_M(x)$. □

Podmnožina M vektorového priestoru V sa volá *vyvážená*, ak pre každé $x \in M$a pre každé $\alpha \in \mathbb{F}$ také, že $|\alpha| = 1$, platí: $\alpha x \in M$.

Tvrdenie 10. *Nech M je vyvážená podmnožina vektorového priestoru V. Predpokladajme, že platí $0 \in M$. Potom pre každé $\alpha \in \mathbb{F}$ a pre každé $x \in V$ platí*

$$p_M(\alpha x) = |\alpha| p_M(x).$$

Dôkaz. Pre $\alpha = 0$ je tvrdenie triviálne splnené.

Pretože množina M je vyvážená, pre každé $x \in V$ a pre každé $\alpha \in \mathbb{F}$ také, že $|\alpha| = 1$, platí

$$M(x) = M(\alpha x).$$

Nech $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$. Položme $\beta = \dfrac{\alpha}{|\alpha|}$. Potom $|\beta| = 1$, teda podľa vyššie dokázaného pre každé $x \in V$ platí

$$p_M(\alpha x) = p_M(\beta|\alpha|x) = p_M(|\alpha|x) = |\alpha|p_M(x).$$

□

Podmnožina M vektorového priestoru V sa volá *absorbujúca*, ak pre každé $x \in V$ existuje $\alpha > 0$ také, že $\alpha x \in M$. Ak množina M je absorbujúca, potom jej Minkowského funkcionál nadobúda iba reálne hodnoty.

Z dokázaného vyplýva, že ak množina M je konvexná, vyvážená a absorbujúca, potom jej Minkowského funkcionál p_M je polonorma.

Tvrdenie 11. *Nech V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{F}$. Nech p je polonorma na V. Potom množina $B = \{x \in V : p(x) < 1\}$ je konvexná, vyvážená a absorbujúca. Polonorma p sa pritom zhoduje s Minkowského funkcionálom množiny B.*

Dôkaz. 1) Najskôr ukážeme, že množina B je konvexná. Nech $x, y \in B$, $\alpha \in (0, 1)$. Potom

$$p(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1 - \alpha)p(y) < \alpha + (1 - \alpha) = 1.$$

2) Teraz ukážeme, že množina B je vyvážená. Nech $x \in B$. Nech $\alpha \in \mathbb{F}$ je také, že $|\alpha| = 1$. Potom

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x) < 1.$$

3) Ďalej ukážeme, že množina B je absorbujúca. Nech $x \in V$. Nech $\alpha > 0$ je také, že $\alpha p(x) < 1$. Potom

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) < 1.$$

4) Nakoniec ukážeme, že pre každé $x \in V$ platí

$$p(x) = \inf B(x) = \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1} x \in B\}.$$

Nech $x \in V$. Pretože množina B je absorbujúca, množina $B(x)$ je neprázdna.

Nech $\alpha > 0$ je také, že $\alpha^{-1} x \in B$. Potom $p(x) = p(\alpha^{-1} \alpha x) = \alpha p(\alpha^{-1} x) < \alpha$.

Pretože $\alpha \in B(x)$ bolo ľubovoľné, platí

$$p(x) \leq \inf B(x).$$

Ukážeme, že platí rovnosť. Sporom. Predpokladajme, že platí

$$p(x) < \inf B(x).$$

Vyberme $\beta > 0$ také, že

$$p(x) < \beta < \inf B(x).$$

Zrejme $\beta \notin B(x)$. To znamená, že platí $\beta^{-1} x \notin B$. Potom $\beta^{-1} p(x) = p(\beta^{-1} x) \geq 1$, odkiaľ $p(x) \geq \beta$. to je však v spore s tým, že $p(x) < \beta$. □

Extrémne body

Nech A je konvexná podmnožina vektorového priestoru V. Bod $a \in A$ sa volá *extrémny bod* množiny A, ak množina $A \setminus \{a\} = \{x \in A : x \neq a\}$ je konvexná. Inými slovami, vynechaním bodu a z množiny A dostaneme zase konvexnú množinu. Množinu všetkých extrémnych bodov konvexnej množiny $A \subseteq V$ budeme označovať symbolom $E(A)$.

Nech $\{v_1, \ldots, v_n\}$ je konečná neprázdna podmnožina vektorového priestoru V. *Konvexná kombinácia* vektorov $v_1, \ldots, v_n$ je ľubovoľný vektor tvaru

$$x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

kde reálne čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sú nezáporné a ich súčet sa rovná jednej.

Množina $K \subseteq V$ je konvexná, ak obsahuje každú konvexnú kombináciu svojich vektorov.

Nech $f : U \to V$ je lineárne zobrazenie, kde U, V sú vektorové priestory nad tým istým poľom $\mathbb{F}$. Nech $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ sú konvexné množiny. Potom množiny $f[A]$, $f^{-1}[B]$ sú tiež konvexné.

Nech U, V sú normované priestory nad tým istým poľom $\mathbb{F}$. Hovoríme, že zobrazenie $f : U \to V$ je *lineárna izometria*, ak f je bijektívne lineárne zobrazenie (teda vektorové priestory U, V sú lineárne izomorfné), pričom pre normy platí:

$$\|f(x)\|_V = \|x\|_U \text{ pre každé } x \in U.$$

Tvrdenie 12. *Nech $f : U \to V$ je lineárna izometria medzi normovanými priestormi U, V. Potom platí*

$$f[E(B_U)] = E(B_V),$$

kde B_U, B_V sú uzavreté jednotkové gule v priestoroch U, V, t.j.

$$B_U = \{x \in U : \|x\|_U \leq 1\}, \qquad B_V = \{y \in V : \|y\|_V \leq 1\}.$$

Príklad 10. Nech p je polonorma na vektorovom priestore V. Predpokladajme, že p je normou na jeho podpriestore U. Položme $P = \ker p$. Potom priradenie $x \mapsto [x] \in V/P$ definuje lineárnu izometriu medzi priestormi U a $W = \{[x] : x \in U\}$. Injektívnosť vyplýva z toho, že p je norma na U. Inými slovami, podpriestor U možno izometricky vnoriť do priestoru V.

Banachov priestor

Banachov priestor je normovaný priestor V, ktorý je *úplný*, t.j. každá *Cauchy*ovská postupnosť vektorov priestoru V konverguje.

Nech $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je postupnosť vektorov priestoru V. Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konverguje*, ak postupnosť jeho čiastočných súčtov $\mathbf{s} = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konverguje, kde

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

pre každé $n \in \mathbb{N}$. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konverguje absolútne*, ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ konverguje.

Veta 2. *Normovaný priestor je úplný práve vtedy, keď každý absolútne konvergentný rad v tomto priestore je konvergentný.*

Systém polonoriem

Na priestore $\mathscr{C}[a,b]$ máme okrem normy zavedenej pomocou Riemannovho integrálu (príklad 4) aj tzv. *supremovú normu* $\|\cdot\|$ definovanú pre každé $f \in \mathscr{C}[a,b]$ predpisom

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Potom $\mathscr{C}[a,b]$ so supremovou normou je Banachov priestor. Postupnosť funkcií $\mathbf{f} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje v tomto priestore práve vtedy, keď konverguje rovnomerne.

Na priestore $\mathscr{C}(a,b)$ všetkých spojitých reálnych funkcií definovaných na otvorenom intervale (a,b) nie je možné použiť supremovú normu, pretože môže nadobúdať hodnotu ∞. Je to spôsobené tým, že spojitá funkcia nemusí byť na otvorenom intervale ohraničená.

Pomocou supremovej normy dostaneme pre každý uzavretý interval $[r,s] \subseteq (a,b)$ polonormu $p_{[r,s]}$ na priestore $\mathscr{C}(a,b)$. Konkrétne, pre každé $f \in \mathscr{C}(a,b)$ položíme

$$p_{[r,s]}(f) = \sup_{x\in[r,s]} |f(x)|.$$

Tým sme definovali systém polonoriem, ktorý nám dovoľuje zaviesť konvergenciu do priestoru $\mathscr{C}(a,b)$ nasledujúcim spôsobom: postupnosť funkcií $\mathbf{f} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje k funkcii f_0, ak pre každú polonormu $p_{[r,s]}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} p_{[r,s]}(f_n - f_0) = 0$.

Postupnosť funkcií $\mathbf{f} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje v tomto priestore práve vtedy, keď konverguje rovnomerne na každej kompaktnej podmnožine intervalu (a,b). Dokonca stačí uvažovať priestor $\mathscr{C}(a,b)$ so spočítateľným systémom polonoriem, konkrétne polonoriem tvaru $p_{[r_n,s_n]}$ (pre každé $n \in \mathbb{N}$), pričom platí $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = b$.

Nech Γ je systém polonoriem na vektorovom priestore V. Hovoríme, že postupnosť $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vektorov priestoru V *konverguje*, ak existuje vektor $x_0 \in V$ taký, že pre každú polonormu $p \in \Gamma$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n - x_0) = 0$.

Hovoríme, že systém polonoriem Γ na vektorovom priestore V spĺňa *Hausdorff*ovu podmienku, ak pre každý nenulový vektor $x \in V$ existuje polonorma $p \in \Gamma$ taká, že $p(x) > 0$. Hausdorffova podmienka nám zaručuje jednoznačnosť limity postupnosti vektorov.

Nech $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ je spočítateľný systém polonoriem na vektorovom priestore V, ktorý spĺňa Hausdorffovu podmienku. Potom môžeme na priestore V definovať metriku predpisom

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \quad \text{pre každé} \quad x,y \in V.$$

Zúplnenie normovaného priestoru

Nech U je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{F}$ s normou $\|\cdot\|_U$. Hľadáme Banachov priestor V nad poľom $\mathbb{F}$ s normou $\|\cdot\|_V$ taký, že:

- Vektorový priestor U je izomorfný s nejakým vektorovým podpriestorom W priestoru V, t.j. existuje injektívne zobrazenie $i : U \to V$ s vlastnosťami: $i(x+y) = i(x) + i(y)$, $i(\alpha x) = \alpha i(x)$ pre každé $x, y \in U$, $\alpha \in F$.
- Normy spĺňajú nasledujúcu podmienku: $\|i(x)\|_V = \|x\|_U$ pre každé $x \in U$.
- Množina W je *hustá* v priestore V, t.j. pre každý vektor $y \in V$ existuje postupnosť $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vektorov priestoru W s vlastnosťou $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$.

Najskôr zavedieme vektorový priestor $\tilde{U}$, ktorý je tvorený všetkými *Cauchy*ovskými postupnosťami priestoru U.

Nech $\mathbf{x} \in \tilde{U}$, t.j. $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je *Cauchy*ovská postupnosť vektorov priestoru U. Pretože pre každé $n, m \in \mathbb{N}$ platí

$$\big|\|x_n\|_U - \|x_m\|_U\big| \leq \|x_n - x_m\|_U,$$

$(\|x_n\|_U)_{n\in\mathbb{N}}$ je *Cauchy*ovská postupnosť reálnych čísel, teda musí mať limitu. Pomocou nej definujeme polonormu p v priestore $\tilde{U}$, t.j. pre každé $\mathbf{x} \in \tilde{U}$ položíme

$$p(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_U.$$

Nech P je vektorový podpriestor priestoru $\tilde{U}$, ktorý je tvorený tými postupnosťami $\mathbf{x} \in \tilde{U}$, pre ktoré platí $p(\mathbf{x}) = 0$. Symbolom V označíme faktorový priestor $\tilde{U}/P$. Jeho normu označíme symbolom $\|\cdot\|_V$. Pripomeňme si, že pre každé $\mathbf{x} \in \tilde{U}$ platí

$$\|[\mathbf{x}]\|_V = p(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_U.$$

Zobrazenie $i : U \to V$ definujeme pre každé $x \in U$ predpisom $i(x) = [(x)_{n\in\mathbb{N}}]$, kde $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ je konštantná postupnosť. Položme $W = \operatorname{Im} i = \{i(x) : x \in U\}$.

Najskôr ukážeme hustotu množiny W v priestore V. Nech $\mathbf{x} \in \tilde{U}$. Ukážeme, že platí

$$\lim_{n\to\infty} i(x_n) = [\mathbf{x}].$$

Nech $\varepsilon > 0$. Pretože postupnosť $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je *Cauchy*ovská,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, k \geq n_0 : \quad \|x_n - x_k\|_U < \varepsilon.$$

Nech $k \geq n_0$ je pevne zvolené. Potom platí

$$\|[\mathbf{x}] - i(x_k)\|_V = \|[(x_n - x_k)_{n\in\mathbb{N}}]\|_V = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_k\|_U \leq \varepsilon.$$

Tým sme dokázali, že platí $i(x_n) \to [\mathbf{x}]$.

Ukážeme, že priestor V je úplný.

Nech $([\mathbf{x}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ je *Cauchy*ovská postupnosť vektorov priestoru V.

Využijeme už dokázané tvrdenie, že množina W je hustá v priestore V.

Nech $n \in \mathbb{N}$ je pevne zvolené. Potom pre $\varepsilon = \frac{1}{n}$ existuje $z_n \in U$ také, že platí

$$\|[\mathbf{x}_n] - i(z_n)\|_V < \frac{1}{n}.$$

Ukážeme, že $(i(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ je *Cauchy*ovská postupnosť vektorov priestoru V. Naozaj, nech $n, m \in \mathbb{N}$. Potom

$$\|i(z_n) - i(z_m)\|_V \leq \|i(z_n) - [\mathbf{x}_n]\|_V + \|[\mathbf{x}_n] - [\mathbf{x}_m]\|_V + \|[\mathbf{x}_m] - i(z_m)\|_V < \\ < \frac{1}{n} + \|[\mathbf{x}_n] - [\mathbf{x}_m]\|_V + \frac{1}{m}.$$

Pretože pre každé $n, m \in \mathbb{N}$ platí $\|i(z_n) - i(z_m)\|_V = \|z_n - z_m\|_U$, postupnosť $\mathbf{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je *Cauchy*ovská v priestore U. Teda $\mathbf{z} \in \tilde{U}$.

Ukážeme, že $[\mathbf{x}_n] \to [\mathbf{z}]$. Naozaj, pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\|[\mathbf{x}_n] - [\mathbf{z}]\|_V \leq \|[\mathbf{x}_n] - i(z_n)\|_V + \|i(z_n) - [\mathbf{z}]\|_V < \frac{1}{n} + \|i(z_n) - [\mathbf{z}]\|_V.$$

Stačí si už len uvedomiť, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} i(z_n) = [\mathbf{z}]$.

Skalárny súčin

Nech V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$. *Skalárny súčin* na vektorovom priestore V je zobrazenie

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

také, že pre každé $x, y, z \in X$
a pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

(a) $\langle x|x\rangle \geqq 0$;

(b) $\langle x|x\rangle = 0$ práve vtedy, keď $x = 0$;

(c) $\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$;

(d) $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle$;

(e) $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$.

Nech V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{C}$. *Skalárny súčin* na vektorovom priestore V je zobrazenie

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

také, že pre každé $x, y, z \in X$
a pre každé $\alpha \in \mathbb{C}$ platí

(a) $\langle x|x\rangle \geqq 0$;

(b) $\langle x|x\rangle = 0$ práve vtedy, keď $x = 0$;

(c) $\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$;

(d) $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle$;

(e) $\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$.

Nach V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{F}$. Potom funkcia $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, ktorá je definovaná pre každé $x \in V$ predpisom

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle},$$

je norma na vektorovom priestore V.

Hilbertov priestor je vektorový priestor V so skalárnym súčinom, ktorý je *úplný*, t.j. každá *Cauchy*ovská postupnosť vektorov priestoru V konverguje.

Lema 2. *Nech V je vektorový priestor so skalárnym súčinom. Potom pre každé $x, y \in V$ a pre každé $\alpha \in \mathbb{F}$ platí*

$$\langle x - \alpha y | x - \alpha y \rangle = \langle x|x \rangle - \overline{\alpha}\langle x|y \rangle - \alpha\overline{\langle x|y \rangle} + \alpha\overline{\alpha}\langle y|y \rangle.$$

Veta 3. (*Cauchy*ho-*Schwarz*ova nerovnosť) *Nech V je vektorový priestor so skalárnym súčinom. Potom pre každé $x, y \in V$ platí*

$$|\langle x|y \rangle| \leqq \|x\|\|y\|. \tag{2}$$

Pritom rovnosť nastáva práve vtedy, keď vektory x, y sú lineárne závislé.

Dôkaz. Ak $x = 0$ alebo $y = 0$, potom $\langle x|y \rangle = 0$, teda (2) zrejme platí.

Predpokladajme, že $y \neq 0$. Položme

$$\alpha = \frac{\langle x|y \rangle}{\langle y|y \rangle}.$$

Potom podľa lemy 2 dostávame

$$\begin{aligned}
0 &\leqq \langle x - \alpha y | x - \alpha y \rangle = \langle x|x \rangle - \overline{\alpha}\langle x|y \rangle - \alpha\overline{\langle x|y \rangle} + \alpha\overline{\alpha}\langle y|y \rangle = \\
&= \langle x|x \rangle - \frac{\overline{\langle x|y \rangle}}{\langle y|y \rangle} \cdot \langle x|y \rangle - \frac{\langle x|y \rangle}{\langle y|y \rangle} \cdot \overline{\langle x|y \rangle} + \frac{\langle x|y \rangle}{\langle y|y \rangle} \cdot \frac{\overline{\langle x|y \rangle}}{\langle y|y \rangle} \cdot \langle y|y \rangle = \\
&= \frac{1}{\langle y|y \rangle}\left(\langle x|x \rangle\langle y|y \rangle - \langle x|y \rangle\overline{\langle x|y \rangle}\right) = \frac{1}{\langle y|y \rangle}\left(\langle x|x \rangle\langle y|y \rangle - |\langle x|y \rangle|^2\right).
\end{aligned}$$

Odtiaľ máme $|\langle x|y \rangle|^2 \leqq \langle x|x \rangle\langle y|y \rangle$.

Teraz predpokladajme, že platí rovnosť $|\langle x|y \rangle|^2 = \langle x|x \rangle\langle y|y \rangle$. Ak $x = 0$ alebo $y = 0$, potom vektory x, y sú lineárne závislé. Ak $y \neq 0$, potom $\langle x - \alpha y | x - \alpha y \rangle = 0$, preto $x - \alpha y = 0$, čiže vektory x, y sú lineárne závislé.

Teraz predpokladajme, že vektory x, y sú lineárne závislé. Vzhľadom na symetriu dokazovanej rovnosti stačí preskúmať prípad $x = \beta y$, kde $\beta \in \mathbb{F}$. Potom

$$\begin{aligned}
\langle x|x \rangle = \langle \beta y | \beta y \rangle = \beta\overline{\beta}\langle y|y \rangle = |\beta|^2\langle y|y \rangle, \\
|\langle x|y \rangle|^2 = |\langle \beta y | y \rangle|^2 = |\beta\langle y|y \rangle|^2 = |\beta|^2\langle y|y \rangle^2,
\end{aligned}$$

teda

$$|\langle x|y \rangle|^2 = \langle x|x \rangle\langle y|y \rangle.$$

$\square$

Podľa lemy 2 pre ľubovoľné $a, b \in V$ platí

$$\langle a-b|a-b\rangle = \langle a|a\rangle - 2\Re e\langle a|b\rangle + \langle b|b\rangle, \tag{3}$$
$$\langle a+b|a+b\rangle = \langle a|a\rangle + 2\Re e\langle a|b\rangle + \langle b|b\rangle. \tag{4}$$

Teraz už môžeme ľahko dokázať trojuholníkovú nerovnosť pre vektory. Stačí sa odvolať na *Cauchy*ho-*Schwarz*ovu nerovnosť (2). Naozaj, podľa (4) máme

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2\Re e\langle a|b\rangle + \|b\|^2 \leqq$$
$$\leqq \|a\|^2 + 2|\langle a|b\rangle| + \|b\|^2 \leqq \|a\|^2 + 2\|a\|\|b\| + \|b\|^2 = \big(\|a\| + \|b\|\big)^2.$$

Tým sme ukázali, že ľubovoľné $a, b \in V$ platí

$$\|a+b\| \leqq \|a\| + \|b\|.$$

Z rovností (3) a (4) bezprostredne dostávame tzv. *rovnobežníkové pravidlo*:

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2. \tag{5}$$

Všimnime si, že hoci vo vzorci (9) sa skalárny súčin nenachádza, použili sme ho pri jeho odvodení. Ako sa môžete presvedčiť na príklade priestoru $\mathscr{C}[0,1]$, prepojenie veľkosti vektora so skalárnym súčinom, ktoré je vyjadrené vzorcom $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$, je pri odvodení rovnobežníkového pravidla podstatné.

Príklad 11. Nech $V = \mathscr{C}[0,1]$ je priestor všetkých spojitých reálnych funkcií definovaných na intervale $[0,1]$. Normu na tomto priestore definujeme predpisom

$$\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

pre každé $f \in V$.

Ukážeme, že v tomto priestore neplatí rovnobežníkové pravidlo. Definujme funkcie f, g predpismi $f(x) = 1$, $g(x) = x$ pre každé $x \in [0,1]$. Zrejme sú to spojité funkcie, pričom platí

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 4 + 1 = 5,$$
$$2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 = 2 + 2 = 4.$$

Ako vidíme, rovnobežníkové pravidlo neplatí. To znamená, že v tomto priestore neexistuje skalárny súčin, pre ktorý by platila rovnosť $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$.

Ortogonalita

Nech V je vektorový priestor so skalárnym súčinom. Hovoríme, že dva vektory $x, y \in V$ sú *ortogonálne*, ak $\langle x|y\rangle = 0$. Zapisujeme to $x \perp y$. *Ortogonálny doplnok* množiny $A \subseteq V$ definujeme predpisom

$$A^{\perp} = \{x \in V : x \perp a \text{ pre všetky } a \in A\}.$$

Priamo z rovnosti (4) vyplýva nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 13. (Pytagorova veta) *Nech V je vektorový priestor so skalárnym súčinom. Nech $x, y \in V$. Ak $x \perp y$, potom platí*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Nech V je vektorový priestor so skalárnym súčinom. Množina vektorov $E \subseteq V$ sa volá *ortonormálna*, ak

(a) pre každé $u \in E$ platí $\|u\| = 1$,

(b) pre každé $u, v \in E$, $u \neq v$, platí $u \perp v$.

Lema 3. *Nech V je vektorový priestor so skalárnym súčinom. Predpokladajme, že $\{e_1, \dots, e_k\} \subseteq V$ je konečná ortonormálna množina vektorov. Nech $x \in V$. Položme*

$$y = \sum_{n=1}^{k} \langle x|e_n \rangle e_n.$$

Potom platí

$$\|y\|^2 = \sum_{n=1}^{k} |\langle x|e_n \rangle|^2.$$

Pretože $y \perp (x-y)$, podľa tvrdenia 13 platí $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x-y\|^2$.

Dôsledok 1. *Nech V je vektorový priestor so skalárnym súčinom. Predpokladajme, že $\{e_1, \dots, e_k\} \subseteq V$ je konečná ortonormálna množina vektorov. Nech $x \in V$. Potom platí*

$$\sum_{n=1}^{k} |\langle x|e_n \rangle|^2 \leqq \|x\|^2.$$

Veta 4. (Besselova nerovnosť) *Nech V je vektorový priestor so skalárnym súčinom. Predpokladajme, že $\{e_1, e_2, \dots\} \subseteq V$ je nekonečná spočítateľná ortonormálna množina vektorov. Nech $x \in V$. Potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle x|e_n \rangle|^2$ konverguje, pričom platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x|e_n \rangle|^2 \leqq \|x\|^2.$$

Pripomeňme si, že vzdialenosť bodu $x \in X$ od neprázdnej množiny $Y \subseteq Y$ sa v metrickom priestore definuje predpisom

$$\operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{z \in Y} d(x, z).$$

V normovanom priestore tento vzorec prejde do tvaru

$$\operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{z \in Y} \|x - z\|.$$

Tvrdenie 14. (O najlepšej aproximácii) *Nech Y je neprázdna uzavretá konvexná podmnožina v Hilbertovom priestore X. Potom pre každé $x \in X$ existuje práve jeden vektor $y \in Y$ taký, že*

$$\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{z \in Y} \|x - z\|.$$

Dôkaz. Nech $x \in X$. Položme

$$D = \{\|x - z\| : z \in Y\}, \qquad d = \inf D.$$

Nech $n \in \mathbb{N}$. Ak by pre každé $z \in Y$ platilo $d + 1/n \leqq \|x - z\|$, potom by číslo $d + 1/n$ bolo dolným ohraničením množiny D, teda by sme mali $d + 1/n \leqq \inf D = d$, čo by bol spor. Teda musí existovať $z_n \in Y$ také, že $d + 1/n > \|x - z_n\|$. Pretože infimum je dolné ohraničenie, máme $d \leqq \|x - z_n\|$. Pretože $n \in \mathbb{N}$ bolo ľubovoľné, ukázali sme, že existuje postupnosť $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prvkov množiny Y taká, že

$$\lim_{n \to \infty} \|x - z_n\| = d. \tag{6}$$

Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Položme $a = \|x - z_m\|$, $b = \|x - z_n\|$. Z rovnobežníkového pravidla vyplýva, že platí

$$\|2x - (z_n + z_m)\|^2 + \|z_n - z_m\|^2 = 2\|x - z_m\|^2 + 2\|x - z_n\|^2,$$

odkiaľ po malej úprave dostávame

$$\|z_n - z_m\|^2 = 2\|x - z_m\|^2 + 2\|x - z_n\|^2 - 4\|x - (\tfrac{1}{2} z_n + \tfrac{1}{2} z_m)\|^2.$$

Položme $z = \frac{1}{2} z_n + \frac{1}{2} z_m$. Pretože množina Y je konvexná, platí $z \in Y$. Pretože potom $\|x - z\| \in D$, platí $\|x - z\| \geqq d$. Odtiaľ vyplýva

$$\|z_n - z_m\|^2 \leqq 2\|x - z_m\|^2 + 2\|x - z_n\|^2 - 4d^2.$$

Premyslite si, ako táto nerovnosť dokazuje, že postupnosť $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je *Cauchy*ovská. Pretože priestor X je úplný, táto postupnosť musí konvergovať k nejakému $y \in X$. Pretože množina Y je uzavretá, platí $y \in Y$. Zrejme

$$d = \lim_{n \to \infty} \|x - z_n\| = \|x - y\|.$$

Nakoniec dokážeme jednoznačnosť. Nech $y, y' \in Y$ sú také, že

$$\|x - y\| = d = \|x - y'\|.$$

V predchádzajúcej časti sme ukázali, že každá postupnosť $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prvkov množiny Y, pre ktorú platí (6), je *Cauchy*ovská. Pre aj postupnosť

$$y, y', y, y', y, y', \ldots$$

je *Cauchy*ovská. Ale to je možné len vtedy, keď $y = y'$. $\square$

Veta 5. (Ortogonálny rozklad) *Nech Y je uzavretý vektorový podpriestor Hilbertovho priestoru X. Potom každý vektor $x \in X$ možno vyjadriť jediným spôsobom v tvare $x = u + v$, kde $u \in Y$ a $v \in Y^{\perp}$.*

Dôkaz. Nech $x \in X$. Podľa tvrdenia 14 existuje práve jeden vektor $u \in Y$ taký, že

$$\|x - u\| = \operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{z \in Y} \|x - z\|.$$

Položme $v = x - u$. Ukážeme, že $v \in Y^{\perp}$, t.j. že pre každé $y \in Y$ platí $v \perp y$. Nech teda $y \in Y$, $y \neq 0$. Podľa lemy 2 máme

$$\|v - \alpha y\|^2 = \|v\|^2 - \overline{\alpha}\langle v|y\rangle - \alpha\overline{\langle v|y\rangle} + \alpha\overline{\alpha}\|y\|^2.$$

Pre

$$\alpha = \frac{\langle v|y\rangle}{\|y\|^2}$$

odtiaľ po malej úprave dostávame

$$\frac{|\langle v|y\rangle|^2}{\|y\|^2} = \|v\|^2 - \|v - \alpha y\|^2.$$

Pretože $u, y \in Y$, máme $u + \alpha y \in Y$. Potom

$$\|v\| = \operatorname{dist}(x, Y) \leqq \|x - (u + \alpha y)\| = \|v - \alpha y\|,$$

preto

$$\frac{|\langle v|y\rangle|^2}{\|y\|^2} \leqq 0.$$

Odtiaľ vyplýva, že platí $\langle v|y\rangle$, t.j. $v \perp y$. Pretože $y \in Y$ bolo ľubovoľné, máme $v \in Y^{\perp}$.

Nakoniec ukážeme jednoznačnosť. Nech $x = u' + v'$, kde $u' \in Y$, $v' \in Y^{\perp}$. Potom $u + v = x = u' + v'$, odkiaľ

$$Y \ni u - u' = v' - v \in Y^{\perp}.$$

Pretože $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$, máme $u - u' = v' - v = 0$. To znamená, že $u = u'$, $v = v'$. □

Ortonormálna báza

Nech V je vektorový priestor so skalárnym súčinom. Nekonečná spočítateľná ortonormálna podmnožina $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ priestoru V sa volá *ortonormálna báza* priestoru V, ak každý vektor $x \in V$ možno vyjadriť v tvare

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x|e_n\rangle e_n.$$

Všimnime si, že čiastočné súčty tohto radu $\sum\limits_{n=1}^{k} \langle x|e_n\rangle e_n$ sú vektory patriace do lineárneho obalu množiny E. Teda vektor x, ako limita postupnosti týchto čiastočných súčtov, patrí do uzáveru množiny $\operatorname{Sp} E$. Teda pre ortonormálnu bázu E platí $\operatorname{Cl}(\operatorname{Sp} E) = V$. Inými slovami, množina $\operatorname{Sp} E$ je hustá v priestore V.

Tvrdenie 15. *Nech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ortogonálna postupnosť v Hilbertovom priestore $\mathcal{H}$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje práve vtedy, keď $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$. V takomto prípade platí*

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2.$$

Dôkaz. Nech $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, t.j.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ pre každé } n \in \mathbb{N}.$$

Nech $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$, t.j.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \text{ pre každé } n \in \mathbb{N}.$$

Potom podľa tvrdenia 13 pre každé $k, n \in \mathbb{N}$ máme

$$\|S_{n+k} - S_n\|^2 = \|x_{n+1} + \cdots + x_{n+k}\|^2 = \|x_{n+1}\|^2 + \cdots + \|x_{n+k}\|^2 = s_{n+k} - s_n.$$

Odtiaľ vyplýva, že postupnosť $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je *Cauchy*ovská v priestore $\mathcal{H}$ práve vtedy, keď číselná postupnosť $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je *Cauchy*ovská.

K dokončeniu dôkazu si stačí uvedomiť, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\|S_n\|^2 = s_n$.

□

Dôsledok 2. (Parsevalova rovnosť) *Nech $\{e_1, e_2, \dots\} \subseteq \mathcal{H}$ je nekonečná spočítateľná ortonormálna množina vektorov v Hilbertovom priestore $\mathcal{H}$. Ak vektor $x \in \mathcal{H}$ možno vyjadriť v tvare $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x|e_n\rangle e_n$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n|e_n\rangle|^2 < \infty$, pričom platí*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n|e_n\rangle|^2.$$

Pripomeňme si tiež *Gramov-Schmidtov ortogonalizačný proces.* Predpokladajme, že máme množinu $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$ lineárne nezávislých vektorov, kde V je vektorový priestor so skalárnym súčinom. Gramov-Schmidtov algoritmus nám umožňuje definovať ortonormálnu množinu vektorov $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq V$ takú, že

$$\mathrm{Sp}\{e_1, \dots, e_n\} = \mathrm{Sp}\{x_1, \dots, x_n\}. \tag{7}$$

Postupujeme nasledujúcim spôsobom:

Položme $e_1 = \frac{1}{\|x_1\|}x_1$. Predpokladajme, že sú už definované vektory $e_1, \dots, e_k$. Položme

$$e_{k+1} = \frac{1}{\|y_{k+1}\|}y_{k+1}, \text{ kde } y_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}|e_i\rangle e_i.$$

Tento algoritmus môžeme použiť aj pre ľubovoľnú nekonečnú spočítateľnú množinu $\{x_1, x_2, \dots\}$ lineárne nezávislých vektorov, samozrejme len v nekonečnorozmernom vektorovom priestore so skalárnym súčinom. Gramov-Schmidtov algoritmus nám umožňuje definovať nekonečnú spočítateľnú ortonormálnu množinu vektorov $\{e_1, e_2, \dots\}$ takú, že (7) platí pre každé $n \in \mathbb{N}$.

Register