Guľa s väčším polomerom, ktorá je vlastnou podmnožinou gule s menším polomerom.

Symbolom X označme uzavretý interval $[0,1]$. Metrika na množine X je definovaná predpisom $d(x,y) = |x-y|$ pre každé $x,y \in X$. Otvorená guľa so stredom v bode $a \in X$ a polomerom $r > 0$ je definovaná predpisom

$$B(a,r) = \{x \in X : d(x,a) < r\}.$$

Nech $x_1 = 0.5$, $r_1 = 0.6$. Zrejme $x_1 \in X$, $r_1 > 0$. Potom

$$\begin{aligned} x \in B(x_1,r_1) \Leftrightarrow \Big[\Big(x \in X\Big) \wedge \Big(|x-0.5| < 0.6\Big)\Big] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Big[\Big(x \in X\Big) \wedge \Big(-0.6 < x-0.5 < 0.6\Big)\Big] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Big[\Big(x \in X\Big) \wedge \Big(-0.1 < x < 1.1\Big)\Big] \Leftrightarrow x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Teda $B(x_1,r_1) = [0,1]$.

Nech $x_2 = 0$, $r_2 = 0.8$. Zrejme $x_2 \in X$, $r_2 > 0$. Potom

$$\begin{aligned} x \in B(x_2,r_2) \Leftrightarrow \Big[\Big(x \in X\Big) \wedge \Big(|x-0| < 0.8\Big)\Big] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Big[\Big(x \in X\Big) \wedge \Big(-0.8 < x < 0.8\Big)\Big] \Leftrightarrow x \in [0,0.8). \end{aligned}$$

Teda $B(x_2,r_2) = [0,0.8)$.

Preto $B(x_2,r_2) \subsetneqq B(x_1,r_1)$, pričom $r_2 > r_1$.

Teraz ukážeme, že ak v metrickom priestore X platí $B(x_2,r_2) \subsetneqq B(x_1,r_1)$, potom $r_2 < 2r_1$.

Nech $x_3 \in B(x_1,r_1) \setminus B(x_2,r_2)$. Potom

$$r_2 \leqq d(x_2,x_3) \leqq d(x_1,x_2) + d(x_1,x_3) < r_1 + r_1 = 2r_1.$$

Všimnime si, že ostrú inklúziu $\subsetneqq$ nemožno nahradiť neostrou inklúziou $\subseteqq$. Stačí v predchádzajúcom príklade vziať $r_2 > 1.2$.