Nevlastný Riemannov integrál a Lebesgueov integrál.

Veta. *Nech funkcia f je integrovateľná na intervale I (ohraničenom alebo neohraničenom) v nevlastnom Riemannovom zmysle spolu aj s funkciou $|f|$. Potom f je Lebesgueovsky integrovateľná na I a jej nevlastný Riemannov integrál sa rovná jej Lebesgueovmu integrálu.*

Pre každé prirodzené číslo $n > \frac{1}{b-a}$ položme

$$f_n = f \cdot \chi_{[a+\frac{1}{n},b]}.$$

Funkcia f je Riemannovsky integrovateľná na intervale $[a+\frac{1}{n},b]$, teda je aj Lebesgueovsky merateľná na intervale $[a+\frac{1}{n},b]$. Odtiaľ vyplýva, že funkcia f_n je Lebesgueovsky merateľná na intervale $(a,b]$. Zrejme $f_n \to f$ bodovo. Teda funkcia f je Lebesgueovsky merateľná na intervale $(a,b]$. Podľa Beppo Leviho vety (Veta 5.5.1) platí

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{a+\frac{1}{n}}^b |f(x)|\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{[a+\frac{1}{n},b]} |f|\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{(a,b]} |f_n|\,d\mu = \int_{(a,b]} |f|\,d\mu.$$

Teda funkcia $|f|$ je Lebesgueovsky integrovateľná na $(a,b]$.

Pretože pre každé $n > \frac{1}{b-a}$ máme $|f_n| \le |f|$, podľa Lebesgueovej vety (Veta 5.5.4) platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(a,b]} f_n\,d\mu = \int_{(a,b]} f\,d\mu.$$

Potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{a+\frac{1}{n}}^b f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{[a+\frac{1}{n},b]} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{(a,b]} f_n\,d\mu = \int_{(a,b]} f\,d\mu.$$

V. I. Bogachev: Measure Theory, Springer.