Určte definičný obor funkcie dvoch premenných a znázornite ho v rovine xy.

(1) $$z = \ln((x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2))$$

Riešenie. Logaritmus je definovaný iba pre kladné čísla, preto musí platiť

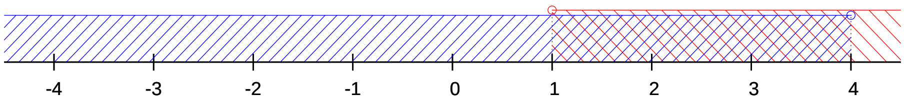
(2) $$(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) > 0$$

Položme $r = x^2 + y^2$. Potom nerovnica (2) prejde do tvaru

(3) $$(r - 1)(4 - r) > 0$$

Súčin dvoch čísel môže byť kladný v dvoch prípadoch.

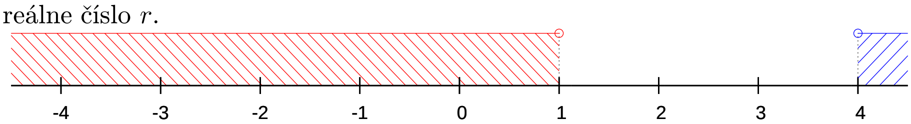
a) Ak sú obidva činitele kladné, t. j. $r - 1 > 0$ a $4 - r > 0$. Potom $r > 1$ a $r < 4$,



čo môžeme zapísať v kompaktom tvare nasledujúcim spôsobom:

(4) $$1 < r < 4$$

b) Ak sú obidva činitele záporné, t. j. $r - 1 < 0$ a $4 - r < 0$. Potom $r < 1$ a $r > 4$, čo neplatí pre žiadne reálne číslo r.

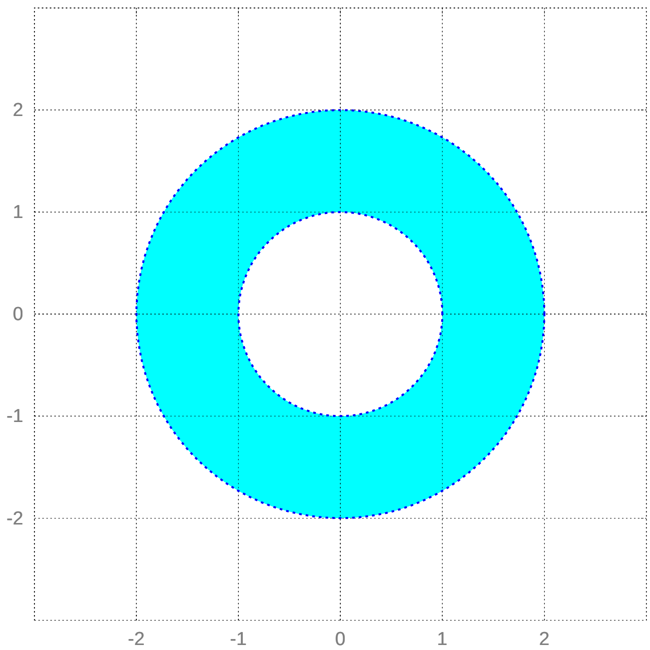


Teda riešením nerovnice (3) sú všetky reálne čísla, pre ktoré platí (4). Po dosadení $r = x^2 + y^2$ do (4) dostávame

(5) $$1 < x^2 + y^2 < 4$$

Odpoveď. Definičným oborom danej funkcie je množina

$$D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$



Určte definičný obor funkcie dvoch premenných a znázornite ho v rovine xy.

$$z = \ln(1 - (x^2 + y)^2) \tag{6}$$

Riešenie. Logaritmus je definovaný iba pre kladné čísla, preto musí platiť

$$1 - (x^2 + y)^2 > 0 \tag{7}$$

Položme $r = x^2 + y$. Potom nerovnica (7) prejde do tvaru

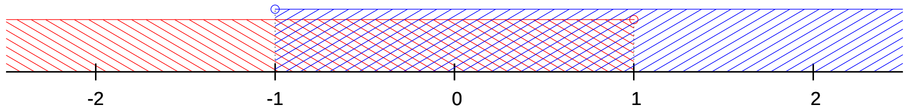
$$1 - r^2 > 0 \tag{8}$$

Ľavú stranu nerovnice (8) upravíme podľa vzorca $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ na súčin. Teda

$$(1 - r)(1 + r) > 0 \tag{9}$$

Súčin dvoch čísel môže byť kladný v dvoch prípadoch.

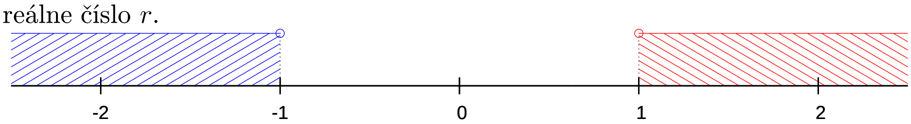
a) Ak sú obidva činitele kladné, t. j. $1 - r > 0$ a $1 + r > 0$. Potom $r < 1$ a $r > -1$,



čo môžeme zapísať v kompaktom tvare nasledujúcim spôsobom:

$$-1 < r < 1 \tag{10}$$

b) Ak sú obidva činitele záporné, t. j. $1 - r < 0$ a $1 + r < 0$. Potom $r > 1$ a $r < -1$, čo neplatí pre žiadne reálne číslo r.



Teda riešením nerovnice (8) sú všetky reálne čísla, pre ktoré platí (10). Po dosadení $r = x^2 + y$ do (10) dostávame

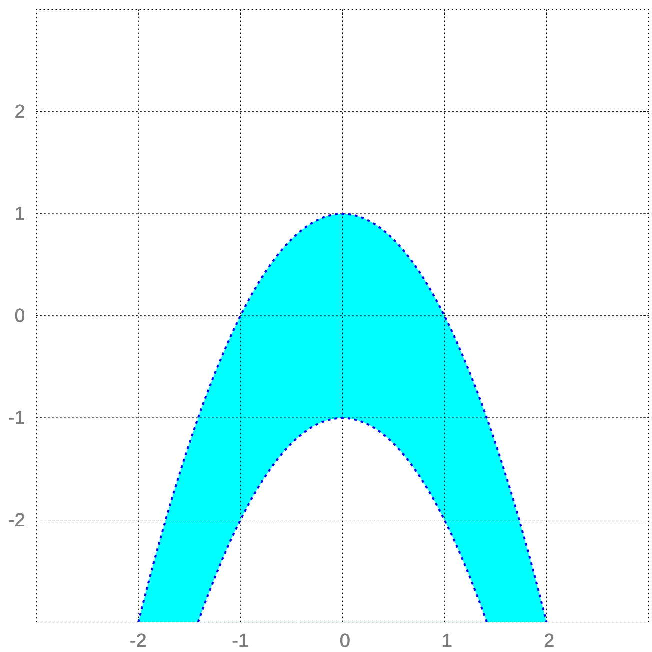
$$-1 < x^2 + y < 1 \tag{11}$$

a po odčítaní výrazu x^2 máme

$$-1 - x^2 < y < 1 - x^2 \tag{12}$$

Odpoveď. Definičným oborom danej funkcie je množina

$$D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : -1 - x^2 < y < 1 - x^2\}$$



Určte definičný obor funkcie dvoch premenných a znázornite ho v rovine xy.

$$z = \sqrt{\frac{x - x^2 - y^2}{x^2 - y}} \tag{13}$$

Riešenie. Pod druhou odmocninou nemôžu byť záporné čísla, preto

$$\frac{x - x^2 - y^2}{x^2 - y} \geqq 0 \tag{14}$$

Zlomok môže byť nezáporný v dvoch prípadoch.

a) Ak je čitateľ zlomku nezáporný a súčasne menovateľ zlomku kladný, t. j. $x - x^2 - y^2 \geqq 0$ a $x^2 - y > 0$. Potom

$$x^2 - x + y^2 \leqq 0 \tag{15}$$

$$y < x^2 \tag{16}$$

Ľavú stranu nerovnice (15) upravíme doplnením na úplný štvorec. Použijeme metódu neurčitých koeficientov. K obidvom stranám nerovnice (15) pripočítame výraz a^2. Dostaneme

$$(x^2 - x + a^2) + y^2 \leqq a^2 \tag{17}$$

Hľadáme takú konštantu a, aby platilo $x^2 - x + a^2 = (x - a)^2$, t. j. aby tento výraz bol druhou mocninou (čiže štvorcom) nejakého iného výrazu. Potom

$$\begin{aligned} x^2 - x + a^2 &= (x-a)^2 \\ x^2 - x + a^2 &= x^2 - 2ax + a^2 \\ -x &= -2ax \\ \frac{1}{2} &= a \end{aligned}$$

Po dosadení $a = \frac{1}{2}$ do nerovnice (17) dostávame

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + y^2 \leqq \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqq \frac{1}{4} \tag{18}$$

Nerovnica (18) je vlastne zložená z dvoch úloh. Z nerovnice

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{4} \tag{19}$$

a z rovnice

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \tag{20}$$

Rovnica (20) je rovnicou kružnice. Naozaj, kružnica so stredom $S = [m, n]$ a polomerom $r > 0$ má rovnicu

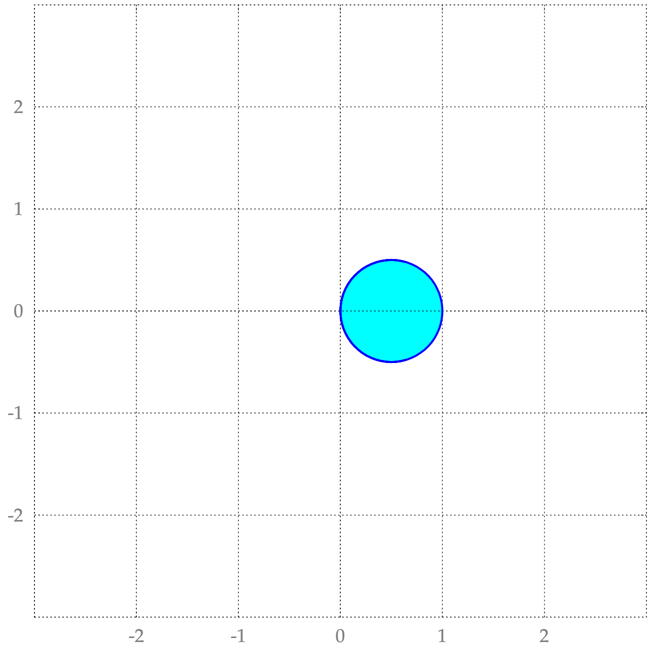
$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

Z tohto dôvodu naša kružnica má stred $S = [\frac{1}{2}, 0]$ a polomer $r = \frac{1}{2}$. Každá kružnica rozdeľuje rovinu na dve časti, jednu ohraničenú a druhú neohraničenú. Tá ohraničená je vlastne celé vnútro kruhu. Pretože vnútro tohto kruhu obsahuje stred danej kružnice, využijeme to na zistenie toho, ktorá časť roviny je určená nerovnicou (19). Dosadíme teda do nerovnice (19) súradnice stredu $S = [\frac{1}{2}, 0]$, čiže $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$. Dostávame

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 < \frac{1}{4}$$

$$0 < \frac{1}{4}$$

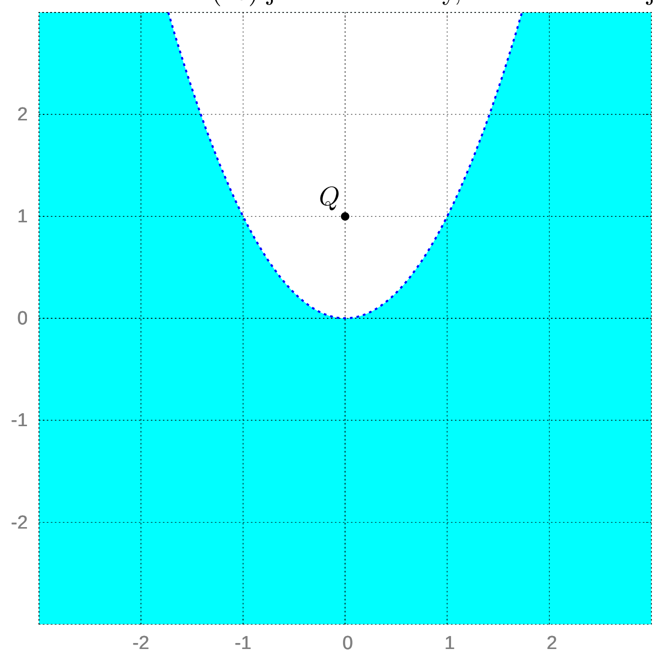
čo je zrejme pravda. Teda riešením nerovnice (19) je celé vnútro kruhu. Keď spojíme dohromady riešenia rovnice (20) a riešenia nerovnice (19), získame všetky riešenia nerovnice (15). Teda riešením nerovnice (15) je celé vnútro kruhu spolu aj s hraničnou kružnicou.



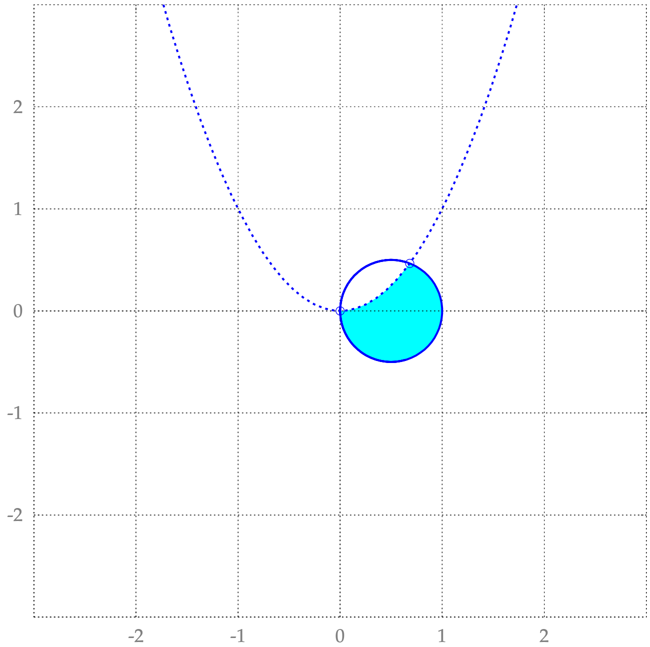
Podobným spôsobom riešime nerovnicu (16). Grafom funkcie $y = x^2$ je parabola, ktorá rozdeľuje rovinu na dve časti. Vezmeme jeden konkrétny bod, ktorý neleží na tejto parabole. Napríklad $Q = [0, 1]$. Dosadíme súradnice tohoto bodu do nerovnice (16), t.j. dosadíme $x = 0$ a $y = 1$. Dostávame

$$1 < 0^2$$

čo zrejme neplatí. Teda riešením nerovnice (16) je tá časť roviny, ktorá neobsahuje bod Q.



Riešenie sústavy nerovníc (15) a (16) dostaneme ako prienik riešení jednotlivých nerovníc.



Tým je prípad a) vyriešený.

b) Ak je čitateľ zlomku nekladý a súčasne menovateľ zlomku záporný, t. j. $x - x^2 - y^2 \leqq 0$ a $x^2 - y < 0$. Potom

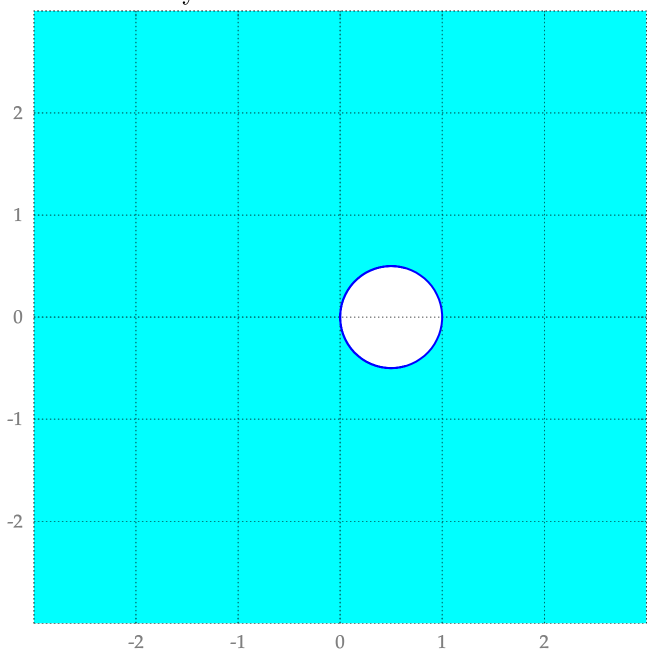
(21) $$x^2 - x + y^2 \geqq 0$$

(22) $$y > x^2$$

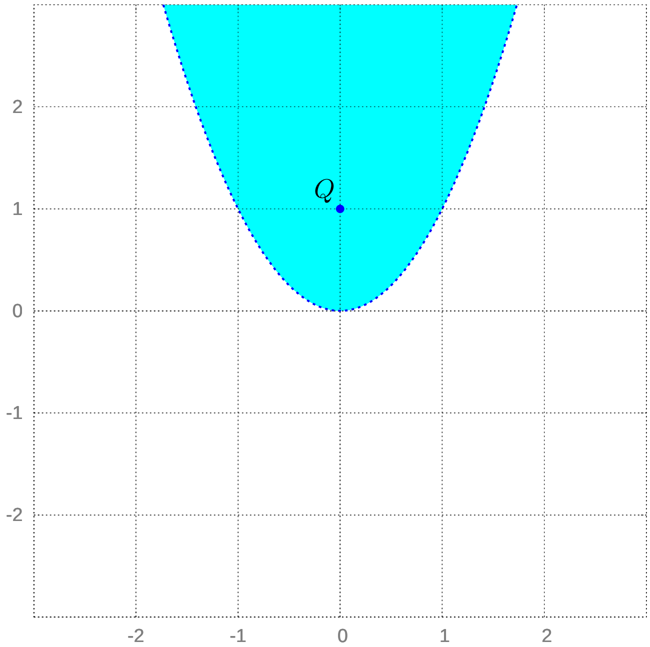
Budeme postupovať stručnejšie, pretože ide o tie isté úvahy ako v časti a), len s tým rozdielom, že symboly nerovnosti sa otáčajú. Nerovnica (21) sa upraví do tvaru

(23) $$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geqq \frac{1}{4}$$

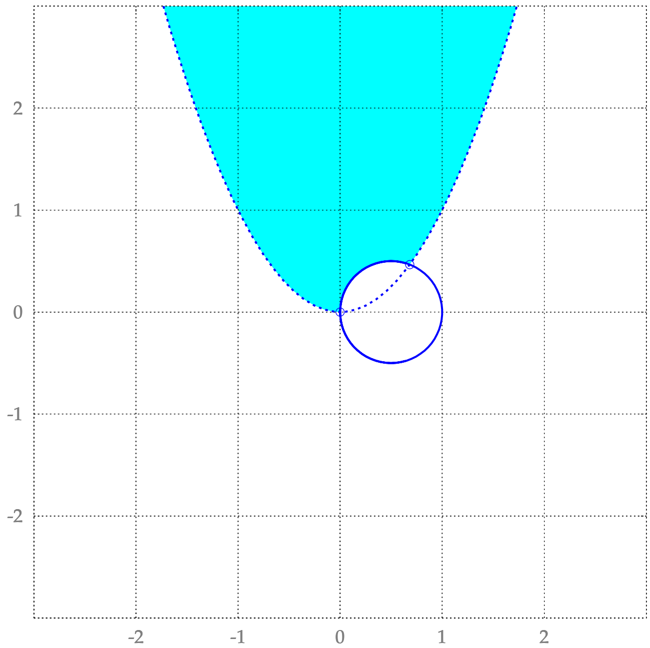
Jej riešením je neohraničená časť roviny ležiaca mimo daného kruhu.



Podobne, riešením nerovnice (22) je tá časť roviny, ktorá obsahuje bod Q.



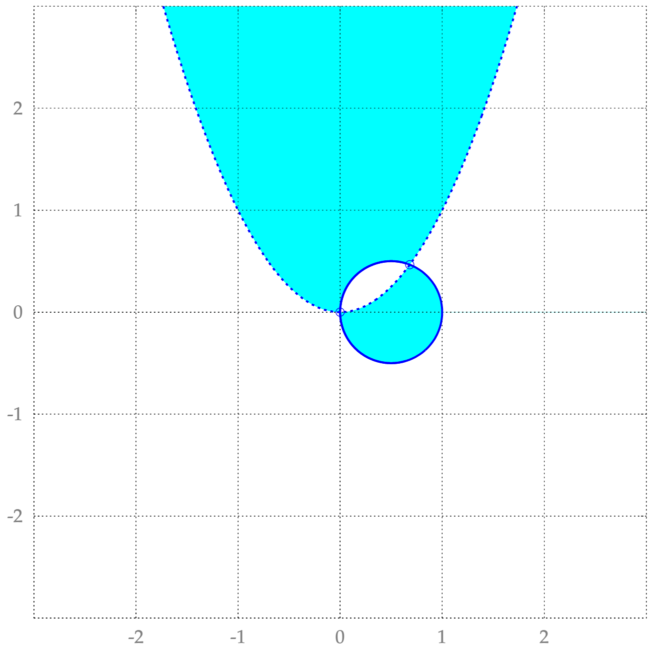
Riešenie sústavy nerovníc (21) a (22) dostaneme ako prienik riešení jednotlivých nerovníc.



Tým je prípad b) vyriešený.

Riešenie danej úlohy získame zjednotením jednotlivých dielčích riešení prípadov a) a b).
Odpoveď. Definičným oborom danej funkcie je množina

$$D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x^2 - x + y^2 \leqq 0 \wedge y < x^2) \vee (x^2 - x + y^2 \geqq 0 \wedge y > x^2)\}$$



Určte definičný obor funkcie dvoch premenných a znázornite ho v rovine xy.

$$z = \frac{\sqrt{x^2 - y} + \sqrt{x - y^2}}{x} \tag{24}$$

Riešenie. Menovateľ zlomku musí byť nenulový, preto

$$x \neq 0 \tag{25}$$

Pod druhou odmocninou nemôžu byť záporné čísla, preto

$$x^2 - y \geqq 0 \tag{26}$$
$$x - y^2 \geqq 0 \tag{27}$$

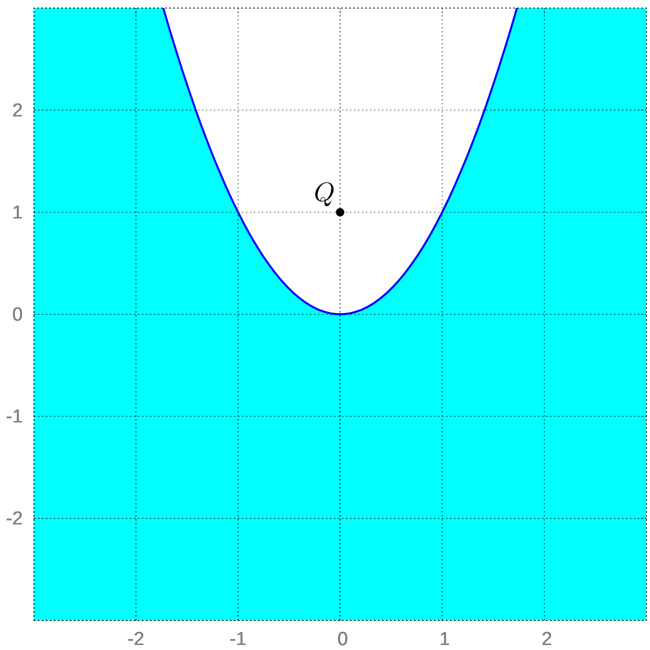
Najskôr budeme riešiť nerovnicu (26), ktorú upravíme do tvaru

$$y \leqq x^2 \tag{28}$$

Nerovnica (28) je vlastne zložená z dvoch úloh, z nerovnice $y < x^2$ a z rovnice $y = x^2$. Grafom funkcie $y = x^2$ je parabola, ktorá rozdeľuje rovinu na dve časti. Vezmeme jeden konkrétny bod, ktorý neleží na tejto parabole. Napríklad $Q = [0, 1]$. Dosadíme súradnice tohoto bodu do nerovnice (28), t.j. dosadíme $x = 0$ a $y = 1$. Dostávame

$$1 \leqq 0^2$$

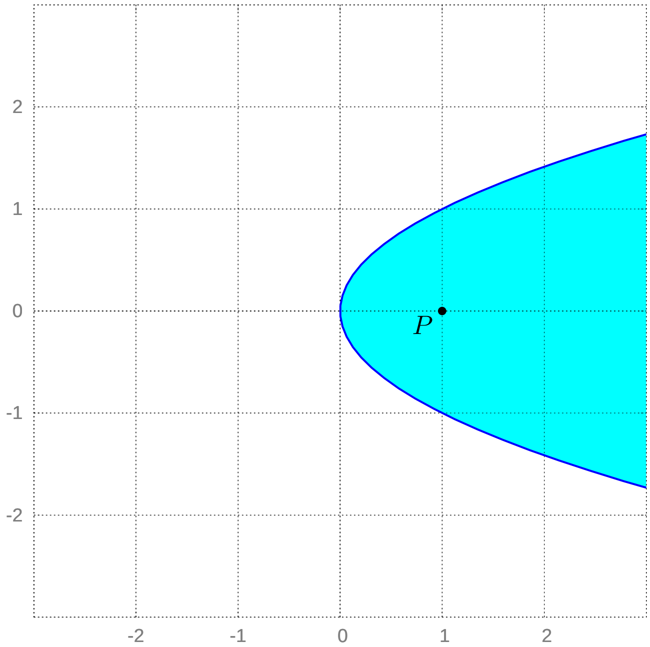
čo zrejme neplatí. Teda riešením nerovnice (28) je tá časť roviny, ktorá neobsahuje bod Q. Samozrejme, spolu s grafom paraboly $y = x^2$.



Podobným spôsobom nájdeme riešenie nerovnice (27), ktorú najskôr upravíme do tvaru

$$x \geqq y^2 \tag{29}$$

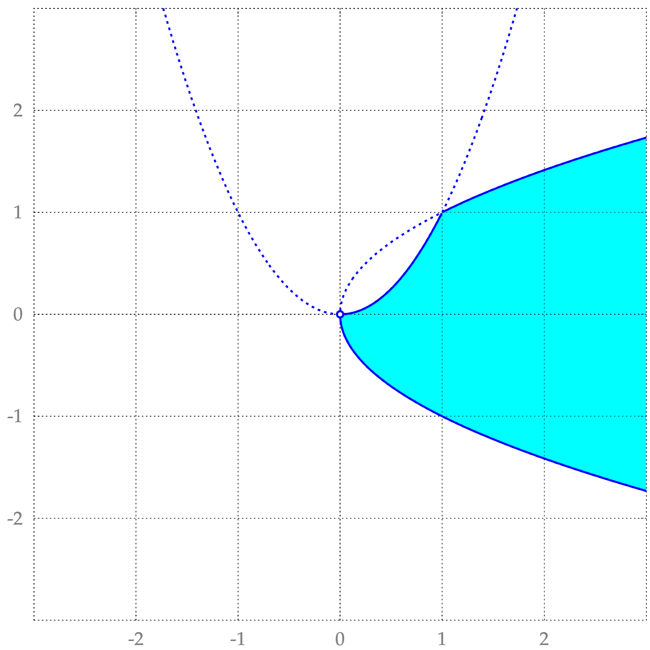
Na určenie príslušnej časti roviny použijeme bod $P = [1, 0]$. Do rovnice (29) dosadíme jeho súradnice, čiže $x = 1$ a $y = 0$. Pretože $1 > 0^2$, riešením nerovnice (29) je tá časť roviny, ktorá bod P obsahuje. Samozrejme, spolu s grafom krivky $x = y^2$.



Riešenie danej úlohy získame ako prienik riešení nerovníc (28) a (29). Pritom musíme vziať do úvahy podmienku (25), čiže musíme z tohto prieniku odstrániť bod $[0, 0]$.

Odpoveď. Definičným oborom danej funkcie je množina

$$D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \leqq x^2 \wedge 0 < x \leqq y^2\}$$



Určte definičný obor funkcie dvoch premenných a znázornite ho v rovine xy.

$$z = \ln[x \ln(y - x)] + e^{2x-1} \tag{30}$$

Riešenie. Exponenciálna funkcia $y = e^x$ je definovaná pre každé reálne číslo x, preto sčítanec e^{2x-1} nedáva žiadnu podmienku na definičný obor.

Logaritmovať môžeme iba kladné čísla, teda musí platiť

$$x \ln(y - x) > 0 \tag{31}$$

Súčin dvoch čísel môže byť kladný v dvoch prípadoch.

a) Ak sú obidva činitele kladné, t. j. $x > 0$ a $\ln(y - x) > 0$. Pretože prirodzený logaritmus $\ln x$ je kladný len pre $x > 1$, musí platiť:

$$x > 0 \tag{32}$$
$$y - x > 1 \tag{33}$$

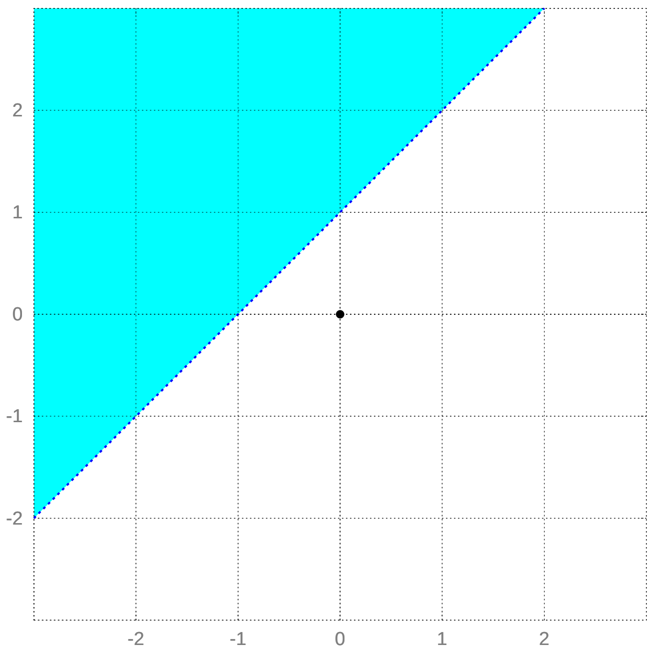
Nerovnicu (33) prepíšeme do tvaru

$$y > x + 1 \tag{34}$$

Keď nerovnosť v (34) nahradíme rovnosťou, dostaneme rovnicu priamky

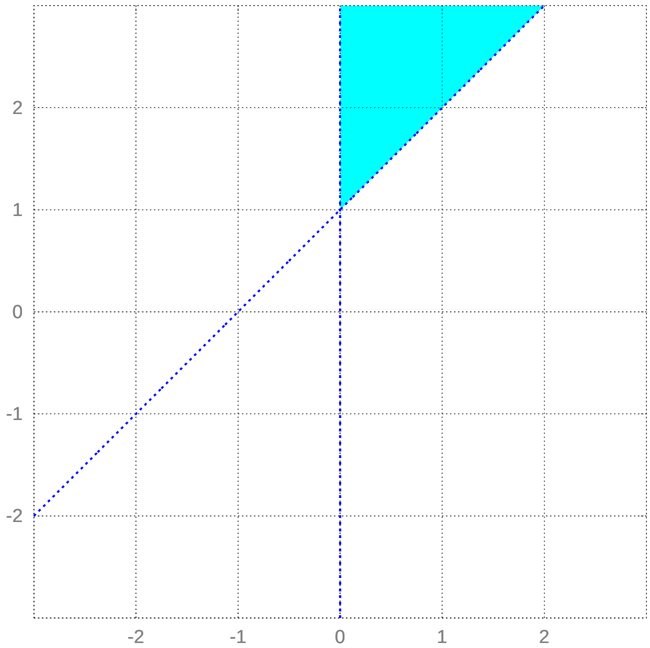
$$y = x + 1 \tag{35}$$

ktorá rozdeľuje rovinu na dve polroviny. Riešením nerovnice (34) bude jedna z týchto polrovín. Pretože v (34) je ostrá nerovnosť, hraničná priamka (35) nie je súčasťou tohto riešenia. Na určenie príslušnej polroviny použijeme bod $[0, 0]$ (môžeme použiť ľubovoľný bod, ktorý neleží na hraničnej priamke). Po dosadení súradníc bodu $[0, 0]$ do nerovnice (34), t. j. dosadením $x = 0$ a $y = 0$, dostávame $0 > 0 + 1$, čo zrejme neplatí. Teda riešením nerovnice (34) je tá polrovina, ktorá bod $[0, 0]$ neobsahuje.



Riešením nerovnice (32) je polrovina ležiaca napravo do osi y.

Teda riešenie sústavy nerovníc (32) a (33) dostaneme ako prienik riešení jednotlivých nerovníc, t. j. ako prienik im odpovedajúcich polrovín.



Tým je prípad a) vyriešený.

b) Ak sú obidva činitele záporné, t. j. $x < 0$ a $\ln(y - x) < 0$. Pretože prirodzený logaritmus $\ln x$ je záporný len pre také reálne čísla x, pre ktoré $0 < x < 1$, musí platiť:

$$x < 0 \tag{36}$$
$$0 < y - x < 1 \tag{37}$$

Nerovnicu (37) upravíme do tvaru

$$x < y < x + 1 \tag{38}$$

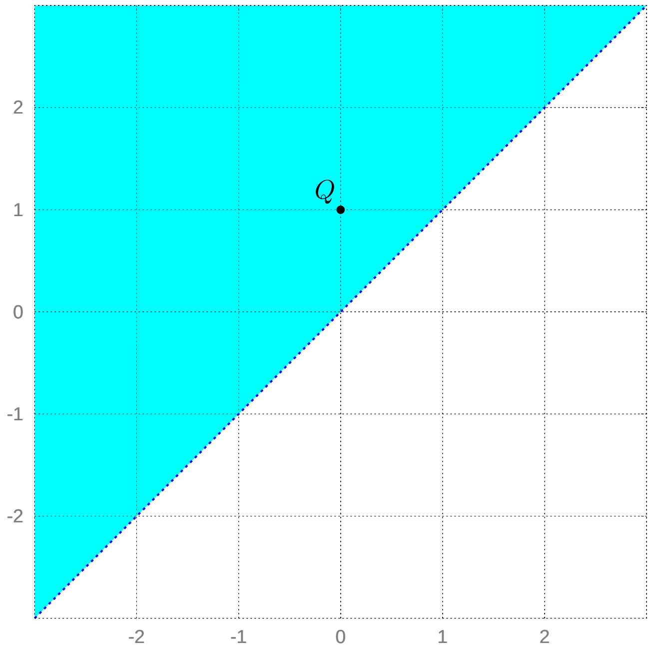
Riešenie nerovnice (38) dostaneme ako prienik dvoch polrovín

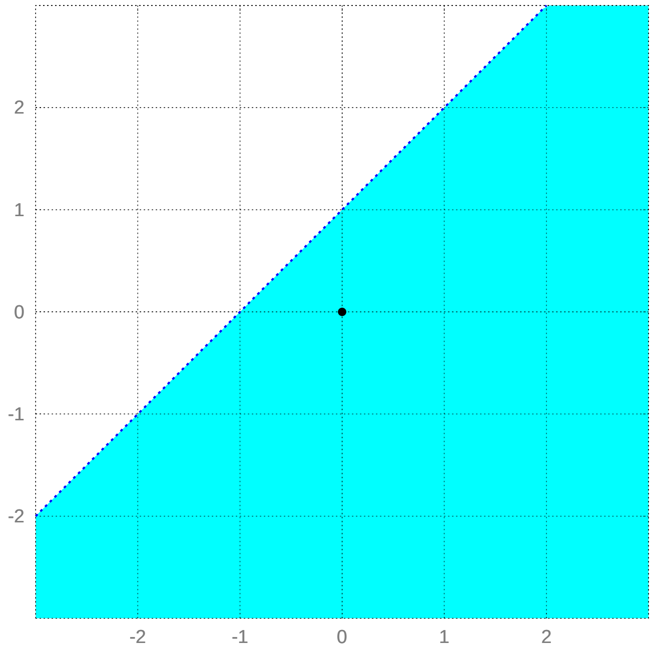
$$y > x \tag{39}$$
$$y < x + 1 \tag{40}$$

Tieto polroviny sú určené dvomi rovnobežnými priamkami

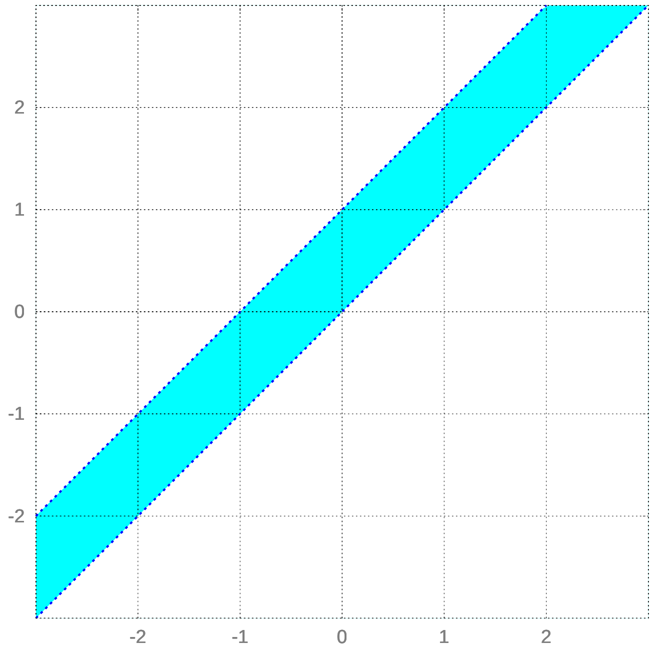
$$y = x \tag{41}$$
$$y = x + 1 \tag{42}$$

Na určenie príslušnej polroviny použijeme bod, ktorý neleží na hraničnej priamke.

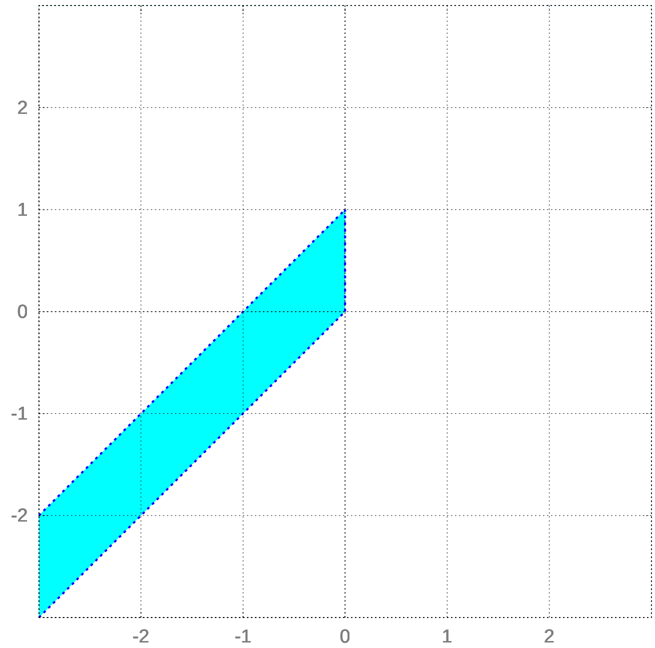




Riešenie nerovnice (38) dostaneme ako prienik týchto dvoch polrovín.

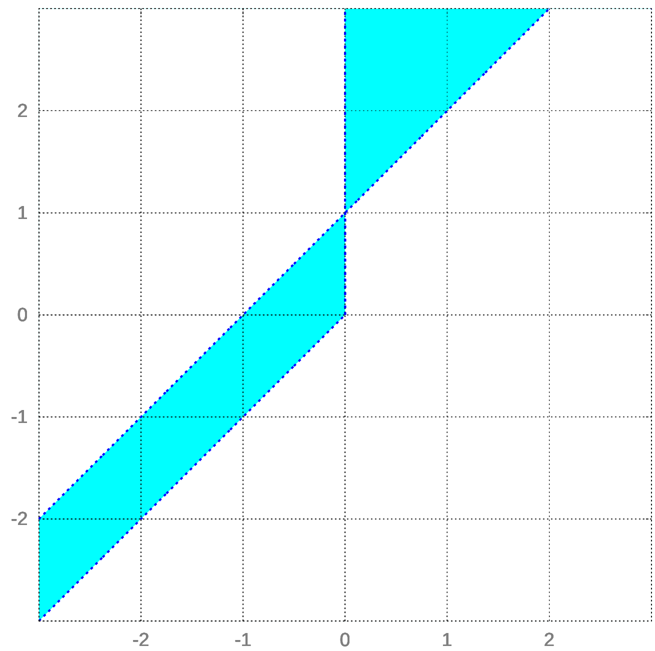


Riešením nerovnice (36) je polrovina ležiaca naľavo do osi y. Preto musíme ešte urobiť prienik získaného riešenia s touto polrovinou.



Tým je prípad b) vyriešený.
Riešenie danej úlohy získame zjednotením jednotlivých dielčích riešení prípadov a) a b).
Odpoveď. Definičným oborom danej funkcie je množina

$$D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y > x + 1) \vee (x < 0 \wedge x < y < x + 1)\}$$



Určte definičný obor funkcie dvoch premenných a znázornite ho v rovine xy.

(43) $$z = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$$

Riešenie. Pod druhou odmocninou nemôže byť záporné číslo, preto

$$36 - 4x^2 - 9y^2 \geqq 0$$

t. j. musí platiť

(44) $$4x^2 + 9y^2 \leqq 36$$

Nerovnica (44) je vlastne zložená z dvoch úloh. Z nerovnice

(45) $$4x^2 + 9y^2 < 36$$

a z rovnice

(46) $$4x^2 + 9y^2 = 36$$

Rovnicu (46) upravíme nasledujúcim spôsobom:

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1$$

(47) $$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Rovnica (47) je vlastne rovnicou elipsy so stredom v počiatku:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kde a a b sú dĺžky polosí. Teda v našom prípade máme $a = 3$, $b = 2$.

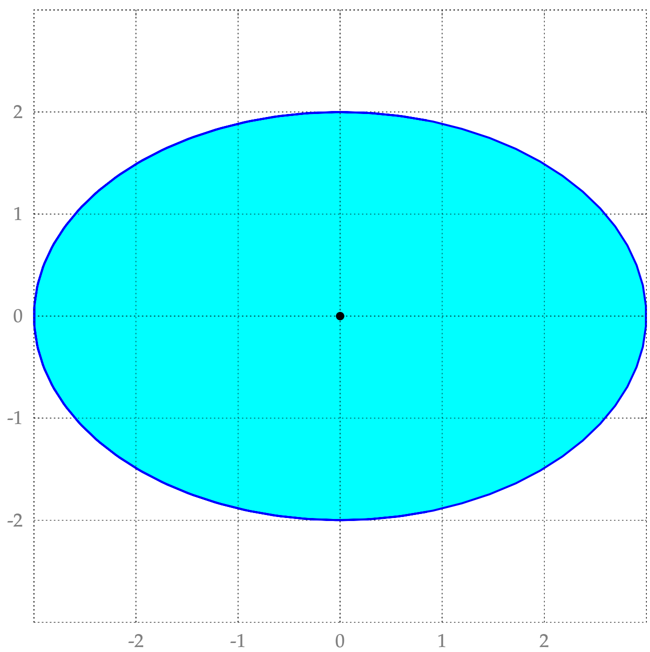
Elipsa rozdeľuje rovinu na dve časti. Ktorá z nich je riešením nerovnice (45), to zistíme dosadením súradníc počiatku do nerovnice (45), t. j. dosadením $x = 0$ a $y = 0$. Po vykonaní výpočtov dostávame

$$36 > 0$$

čo je zrejme pravda. Teda riešením nerovnice (45) je tá časť roviny, ktorá obsahuje bod $[0, 0]$, čiže vnútro elipsy.

Odpoveď. Definičným oborom danej funkcie je množina

$$D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \leqq 36\}$$



Určte definičný obor funkcie dvoch premenných a znázornite ho v rovine xy.

(48) $$z = \frac{\sqrt{y - 2x^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$$

Riešenie. Pod druhou odmocninou nemôže byť záporné číslo, preto

$$y - 2x^2 \geqq 0$$

t. j. musí platiť

(49) $$y \geqq 2x^2$$

Logaritmovať možno len kladné čísla, preto

$$1 - x^2 - y^2 > 0$$

t. j. musí platiť

(50) $$x^2 + y^2 < 1$$

Nakoniec, musíme zabezpečiť, aby menovateľ zlomku nebol nula, čiže musí platiť

(51) $$\ln(1 - x^2 - y^2) \neq 0$$

Pretože $\ln x = 0$ jedine pre $x = 1$, podmienku (51) možno prepísať do tvaru

$$1 - x^2 - y^2 \neq 1$$

t. j. musí platiť

(52) $$x^2 + y^2 \neq 0$$

Pretože vždy platí $x^2 + y^2 \geqq 0$, podmienku (52) môžeme preformulovať do tvaru

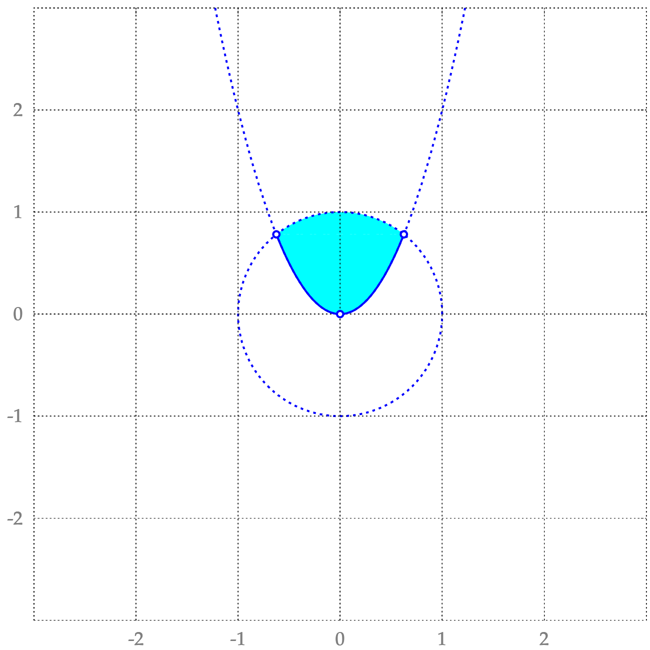
(53) $$x^2 + y^2 > 0$$

Pretože rovnici $x^2 + y^2 = 0$ vyhovuje jedine bod $[0, 0]$, podmienka (53) hovorí, že tento bod musíme vylúčiť. Podmienky (50) a (53) môžeme zapísať spoločne v kompaktnom tvare

(54) $$0 < x^2 + y^2 < 1$$

Odpoveď. Definičným oborom danej funkcie je množina

$$D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1 \wedge y \geqq 2x^2\}$$



Určte definičný obor funkcie dvoch premenných a znázornite ho v rovine xy.

(55) $$z = \sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$$

Riešenie. Pod druhou odmocninou nemôže byť záporné číslo, preto

(56) $$\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2} \geqq 0$$

Zlomok môže byť nezáporný v dvoch prípadoch.

a) Ak je čitateľ zlomku nezáporný a súčasne menovateľ zlomku kladný, t. j. $x^2+y^2-x \geqq 0$ a $2x-x^2-y^2 > 0$. Potom

(57) $$x^2-x+y^2 \geqq 0$$

(58) $$x^2-2x+y^2 < 0$$

Ľavú stranu nerovnice (57) upravíme doplnením na úplný štvorec. Použijeme metódu neurčitých koeficientov. K obidvom stranám nerovnice (57) pripočítame výraz a^2. Dostaneme

(59) $$(x^2-x+a^2)+y^2 \geqq a^2$$

Hľadáme takú konštantu a, aby platilo $x^2-x+a^2 = (x-a)^2$, t. j. aby tento výraz bol druhou mocninou (čiže štvorcom) nejakého iného výrazu. Potom

$$\begin{aligned} x^2-x+a^2 &= (x-a)^2 \\ x^2-x+a^2 &= x^2-2ax+a^2 \\ -x &= -2ax \\ \frac{1}{2} &= a \end{aligned}$$

Po dosadení $a = \frac{1}{2}$ do nerovnice (59) dostávame

$$\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+y^2 \geqq \frac{1}{4}$$

(60) $$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \geqq \frac{1}{4}$$

Nerovnica (60) je vlastne zložená z dvoch úloh. Z nerovnice

(61) $$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 > \frac{1}{4}$$

a z rovnice

(62) $$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 = \frac{1}{4}$$

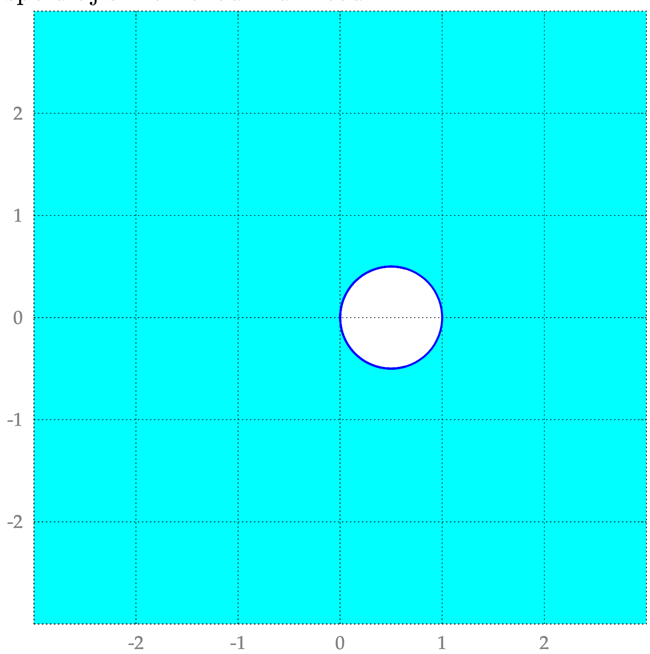
Rovnica (62) je rovnicou kružnice. Naozaj, kružnica so stredom $S = [m, n]$ a polomerom $r > 0$ má rovnicu

$$(x-m)^2+(y-n)^2 = r^2$$

Z tohto dôvodu naša kružnica má stred $S = [\frac{1}{2}, 0]$ a polomer $r = \frac{1}{2}$. Každá kružnica rozdeľuje rovinu na dve časti, jednu ohraničenú a druhú neohraničenú. Tá ohraničená je vlastne celé vnútro kruhu. Pretože vnútro tohto kruhu obsahuje stred danej kružnice, využijeme to na zistenie toho, ktorá časť roviny je určená nerovnicou (61). Dosadíme teda do nerovnice (61) súradnice stredu $S = [\frac{1}{2}, 0]$, čiže $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$. Dostávame

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 &> \frac{1}{4} \\ 0 &> \frac{1}{4} \end{aligned}$$

čo zrejme nie je pravda. Teda riešením nerovnice (61) je neohraničená časť roviny ležiaca mimo daného kruhu. Keď spojíme dohromady riešenia rovnice (62) a riešenia nerovnice (61), získame všetky riešenia nerovnice (57). Teda riešením nerovnice (57) je neohraničená časť roviny ležiaca mimo daného kruhu spolu aj s hraničnou kružnicou.



Teraz budeme takým istým spôsobom riešiť nerovnicu (58). Ľavú stranu nerovnice (58) upravíme doplnením na úplný štvorec. Použijeme metódu neurčitých koeficientov. K obidvom stranám nerovnice (58) pripočítame výraz a^2. Dostaneme

$$(x^2 - 2x + a^2) + y^2 < a^2 \tag{63}$$

Hľadáme takú konštantu a, aby platilo $x^2 - 2x + a^2 = (x - a)^2$, t. j. aby tento výraz bol druhou mocninou (čiže štvorcom) nejakého iného výrazu. Potom

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + a^2 &= (x - a)^2 \\ x^2 - 2x + a^2 &= x^2 - 2ax + a^2 \\ -2x &= -2ax \\ 1 &= a \end{aligned}$$

Po dosadení $a = 1$ do nerovnice (63) dostávame

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x + 1) + y^2 &< 1 \\ (x - 1)^2 + y^2 &< 1 \qquad (64) \end{aligned}$$

Keď nerovnosť v (64) nahradíme rovnosťou, dostaneme rovnicu kružnice

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1 \tag{65}$$

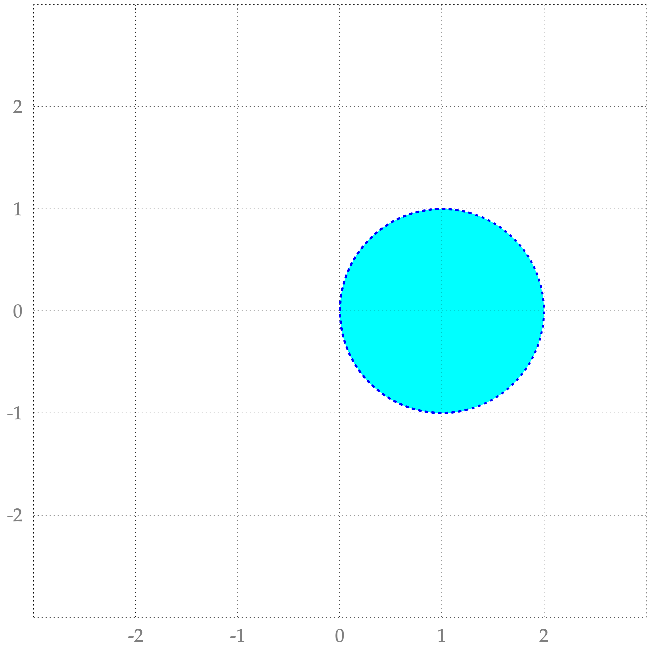
Pretože kružnica so stredom $S = [m, n]$ a polomerom $r > 0$ má rovnicu

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

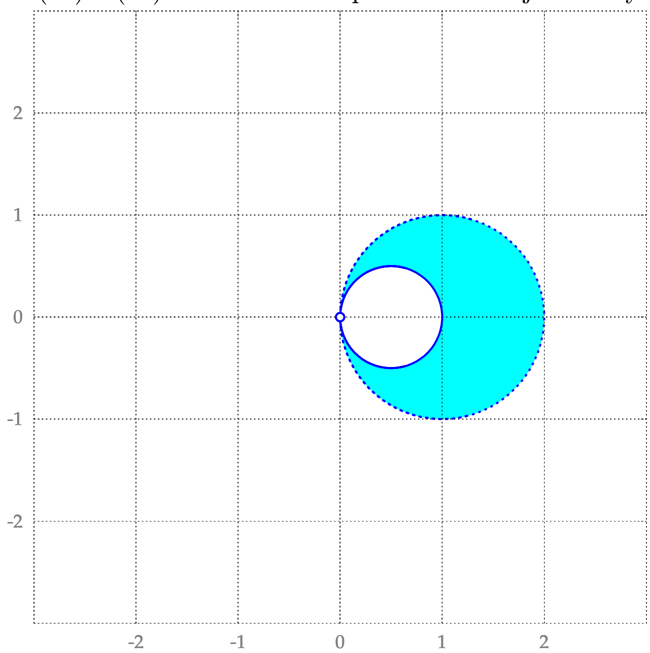
Z tohto dôvodu naša kružnica má stred $S = [1, 0]$ a polomer $r = 1$. Každá kružnica rozdeľuje rovinu na dve časti, jednu ohraničenú a druhú neohraničenú. Tá ohraničená je vlastne celé vnútro kruhu. Pretože vnútro tohto kruhu obsahuje stred danej kružnice, využijeme to na zistenie toho, ktorá časť roviny je určená nerovnicou (64). Dosadíme teda do nerovnice (64) súradnice stredu $S = [1, 0]$, čiže $x = 1$, $y = 0$. Dostávame

$$\begin{aligned}(1 - 1)^2 + 0^2 &< 1 \\ 0 &< 1\end{aligned}$$

čo je zrejme pravda. Teda riešením nerovnice (64) je celé vnútro kruhu. Pretože v nerovnici (64) je ostrá nerovnosť, hraničná kružnica do riešenia nepatrí.



Riešenie sústavy nerovníc (57) a (58) dostaneme ako prienik riešení jednotlivých nerovníc.



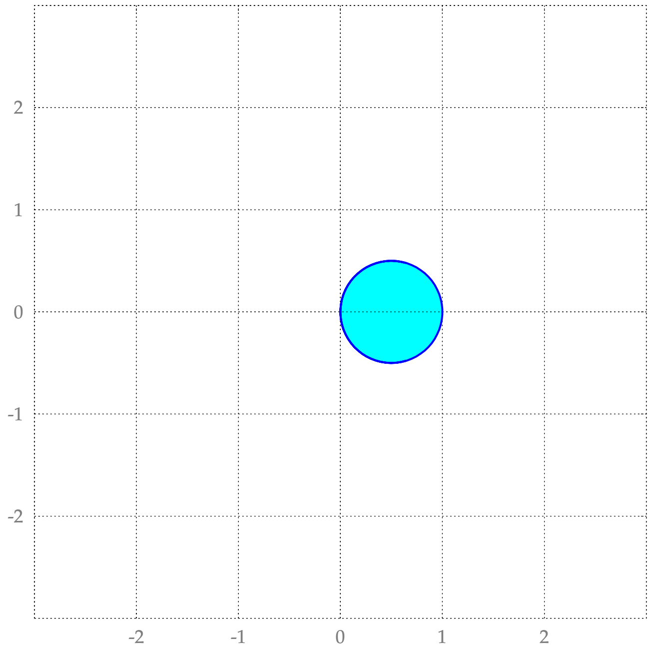
Všimnime si, že bod $[0,0]$ je riešením nerovnice (57), ale nie je riešením nerovnice (58). Preto ho musíme vylúčiť, čo sme na obrázku znázornili prázdnym krúžkom.

b) Ak je čitateľ zlomku nekladný a súčasne menovateľ zlomku záporný, t. j. $x^2 + y^2 - x \leqq 0$ a $2x - x^2 - y^2 < 0$. Potom

$$x^2 - x + y^2 \leqq 0 \tag{66}$$

$$x^2 - 2x + y^2 > 0 \tag{67}$$

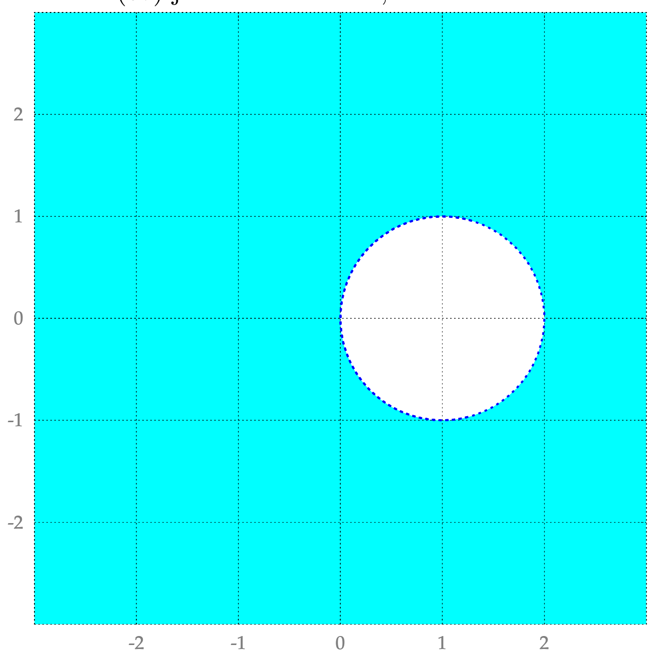
Podobnými úvahami ako v časti a) zistíme, že riešením nerovnice (66) je celé vnútro kruhu so stredom v bode $S = [\frac{1}{2}, 0]$ a polomerom $r = \frac{1}{2}$, spolu aj s hraničnou kružnicou.



Keď nerovnosť v (67) nahradíme rovnosťou, dostaneme rovnicu

$$x^2 - 2x + y^2 = 0 \tag{68}$$

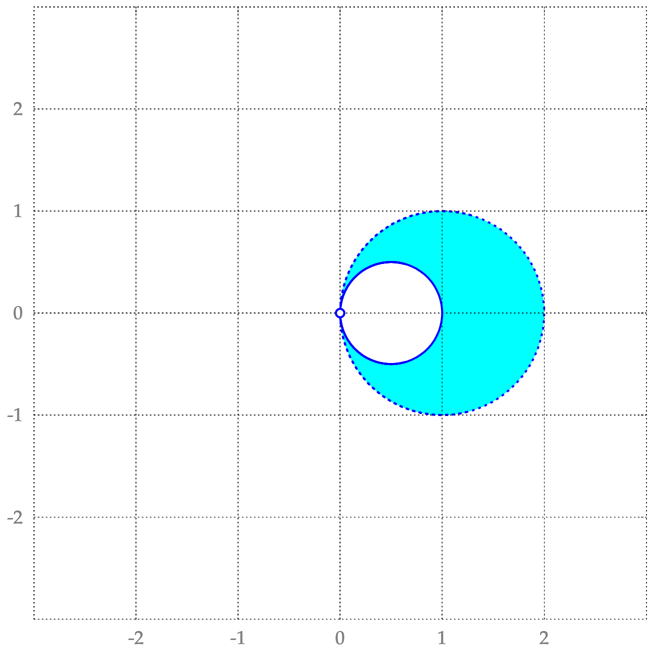
ktorú upravíme na rovnicu kružnice (65). Táto kružnica má stred $S = [1, 0]$ a polomer $r = 1$. Podobnými úvahami ako v časti a) zistíme, že riešením nerovnice (67) je neohraničená časť roviny ležiaca mimo daného kruhu. Pretože v nerovnici (67) je ostrá nerovnosť, hraničná kružnica do riešenia nepatrí.



Riešenie sústavy nerovníc (66) a (67) dostaneme ako prienik riešení jednotlivých nerovníc. Ako vidíme na obrázkoch, tento prienik je prázdnou množinou. Časť b) teda do celkového riešenia danej úlohy neprináša žiadne ďalšie body.

Odpoveď. Definičným oborom danej funkcie je množina

$$D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \leqq x^2 + y^2 < 2x\}$$



Určte definičný obor funkcie dvoch premenných a znázornite ho v rovine xy.

(68) $$z = \arcsin \frac{x+y}{x}$$

Riešenie. Pretože x je v menovateli zlomku, musí platiť

(69) $$x \neq 0$$

Funkcia $y = \arcsin x$ je definovaná len pre čísla z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, preto

(70) $$-1 \leqq \frac{x+y}{x} \leqq 1$$

Prirodzené by bolo prenásobiť (70) výrazom x. Avšak,

Keď násobíme nerovnosť kladným číslom, nerovnosť sa nemení, keď záporným, nerovnosť sa otočí.

Z tohto dôvodu musíme rozlíšiť dva prípady.

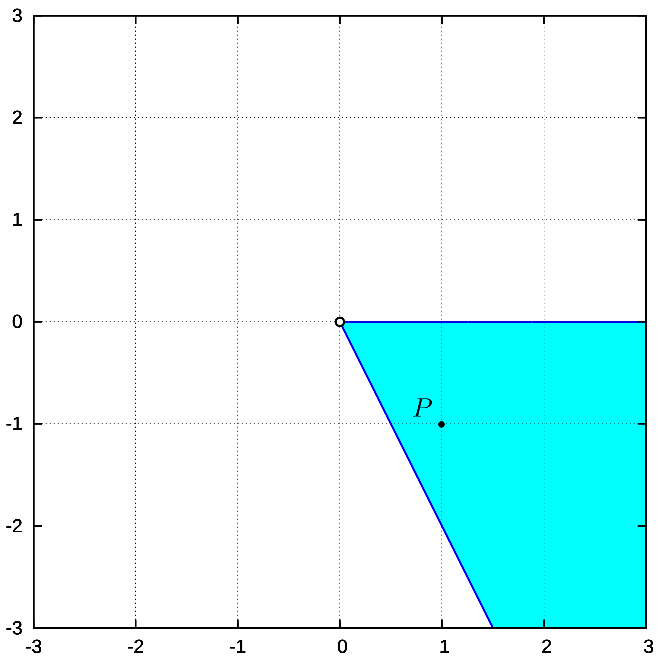
a) Ak $x > 0$, potom

$$-1 \leqq \frac{x+y}{x} \leqq 1 \qquad \Big/ \cdot x$$
$$-x \leqq x+y \leqq x \qquad \Big/ - x$$
(71) $$-2x \leqq y \leqq 0$$

Grafy funkcií $y = -2x$ a $y = 0$ pre $x > 0$ sú polpriamky vychádzajúce z bodu $[0, 0]$. Vzhľadom na (69) bod $[0, 0]$ do nich nepatrí, preto ho znázorníme prázdnym krúžkom. Tieto dve polpriamky rozdeľujú rovinu na dve časti. Aby sme zistili, ktorá z nich je riešením (71), zvolíme nejaký bod, ktorý leží niekde medzi nimi a dosadíme jeho súradnice do (71). Napríklad bod $P = [1, -1]$. Teda keď do (71) dosadíme $x = 1$ a $y = -1$, dostávame

$$-2 \leqq -1 \leqq 0$$

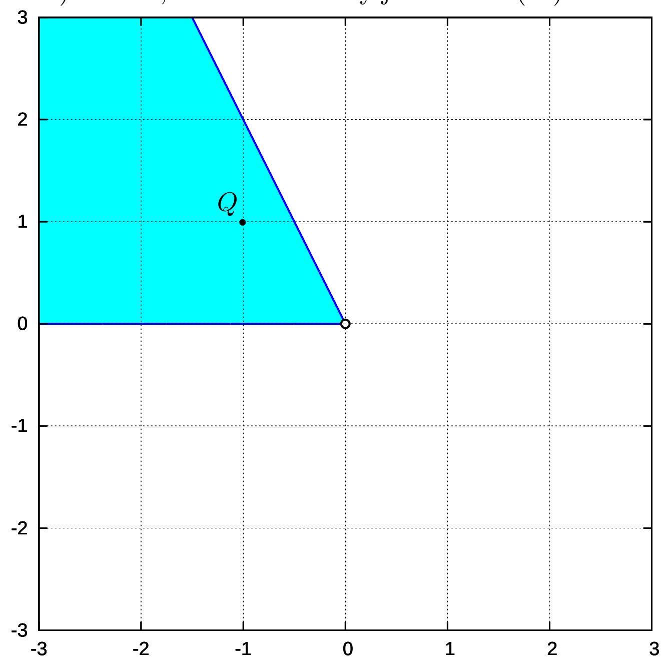
čo zrejme platí.



b) Ak $x < 0$, potom

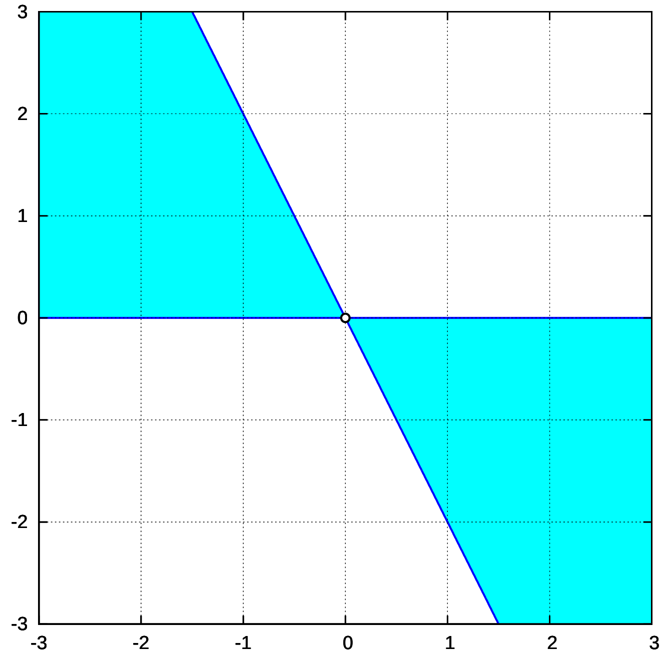
$$-1 \leqq \frac{x+y}{x} \leqq 1 \qquad \Big/ \cdot x$$
$$-x \geqq x+y \geqq x \qquad \Big/ -x$$
$$-2x \geqq y \geqq 0 \tag{72}$$

Podobne ako v prípade a) zistíme, ktorá časť roviny je riešením (72).



Riešenie danej úlohy získame zjednotením jednotlivých dielčích riešení prípadov a) a b).
Odpoveď. Definičným oborom danej funkcie je množina

$$D = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge -2x \leqq y \leqq 0) \vee (x < 0 \wedge 0 \leqq y \leqq -2x)\}$$



Určte definičný obor funkcie dvoch premenných a znázornite ho v rovine xy.

(73) $$z = \sqrt{y - 2x + 1} + \arccos x^2$$

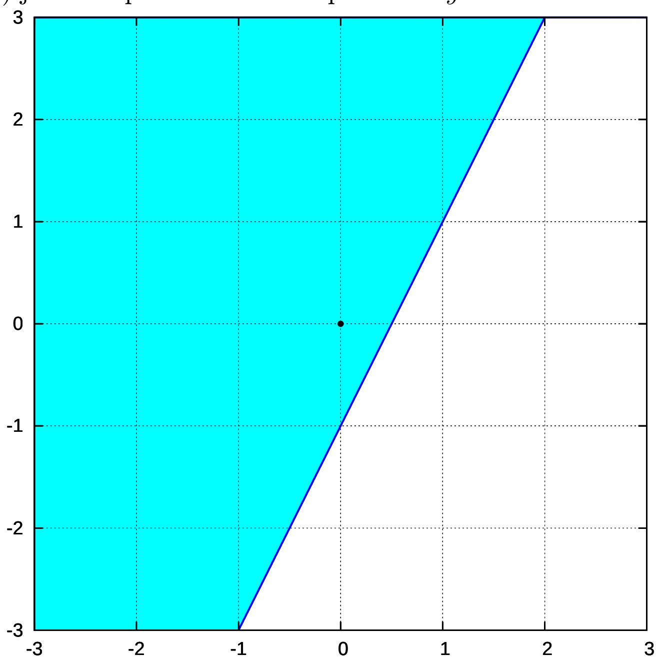
Riešenie. Pod druhou odmocninou nemôže byť záporné číslo, preto

(74) $$y - 2x + 1 \geqq 0$$

Funkcia $y = \arccos x$ je defonovaná len pre čísla z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, preto

(75) $$-1 \leqq x^2 \leqq 1$$

Riešením nerovnice (74) je horná polrovina určená priamkou $y = 2x - 1$.



Pretože pre každé reálne číslo x platí $x^2 \geqq 0$, určite platí $x^2 \geqq 0 > -1$. Teda nerovnicu (75) môžeme prepísať do ekvivalentného tvaru

(76) $$x^2 \leqq 1$$

Pri nerovnici (76) musíme dávať veľký pozor.

Na výstrahu si uvedieme postup síce nezmyselný, ale o to viac u študentov obľúbený:

$$x^2 \leqq 1$$
$$x \leqq \pm 1$$

A teraz správny postup:

$$x^2 \leqq 1$$
$$|x| \leqq 1$$

(77) $$-1 \leqq x \leqq 1$$

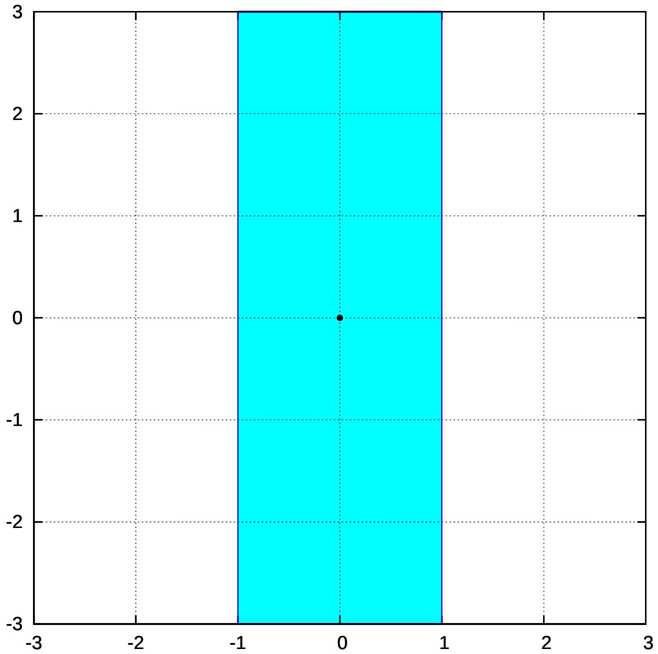
Použili sme vzorec

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

a odstránili sme absolútnu hodnotu podľa pravidla

$$|x| \leqq a \quad \text{práve vtedy, keď} \quad -a \leqq x \leqq a$$

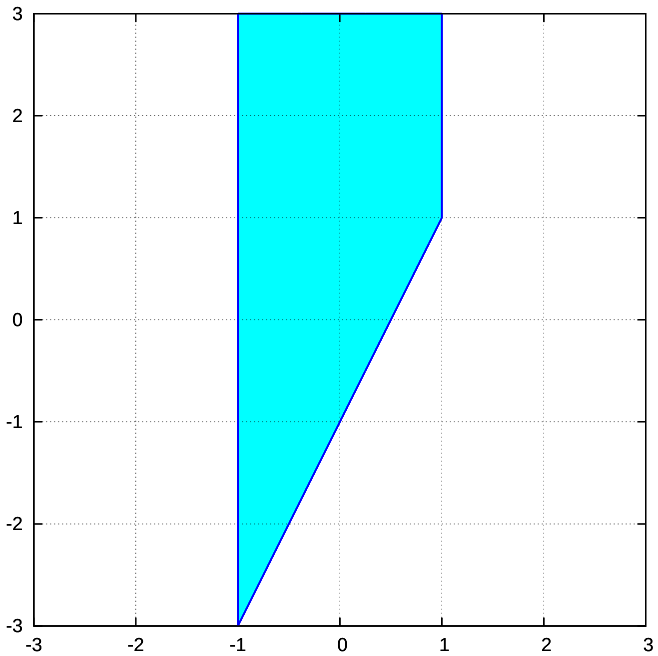
Riešením nerovnice (77) je nekonečný pás určený priamkami $x = -1$ a $x = 1$.



Prienik riešení nerovnice (74) a nerovnice (75) nám dáva riešenie danej úlohy.

Odpoveď. Definičným oborom danej funkcie je množina

$$D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqq x \leqq 1 \wedge y \geqq 2x - 1\}$$



Určte definičný obor funkcie dvoch premenných a znázornite ho v rovine xy.

$$z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arccos(1-y) \tag{78}$$

Riešenie. Funkcie $y = \arcsin x$ a $y = \arccos x$ sú definované len pre čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, preto

$$-1 \leqq \frac{x}{y^2} \leqq 1 \tag{79}$$

$$-1 \leqq 1 - y \leqq 1 \tag{80}$$

Pretože v menovateli zlomku nemôže byť nula, musí platiť

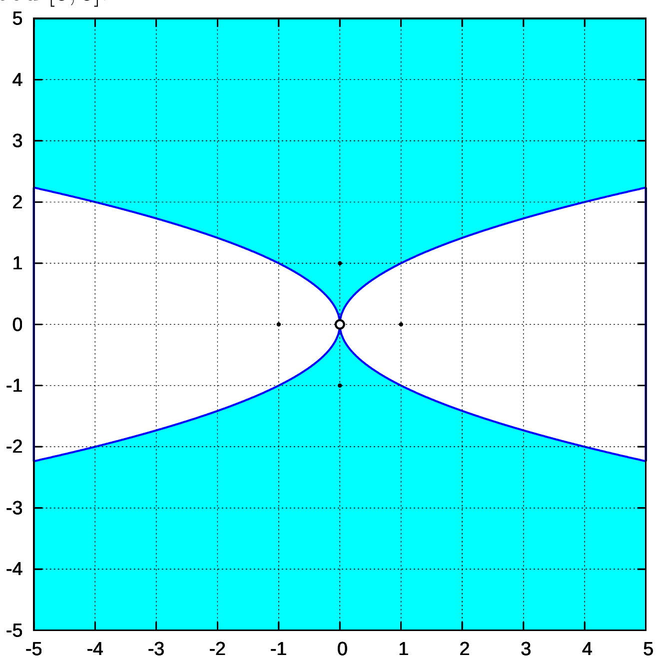
$$y \neq 0 \tag{81}$$

Za tohto predpokladu platí $y^2 > 0$, teda (79) môžeme prenásobiť kladným výrazom y^2. Potom

$$-1 \leqq \frac{x}{y^2} \leqq 1 \qquad \Big/ \cdot y^2$$

$$-y^2 \leqq x \leqq y^2 \tag{82}$$

Krivky určené rovnicami $x = \pm y^2$ sú paraboly. Pomocou vhodne zvolených bodov zistíme, ktoré časti roviny sú riešením nerovnice (82). Môžeme použiť napríklad body $[0, 1]$, $[0, -1]$, $[1, 0]$, $[-1, 0]$. Dosadíme ich súradnice za x a y do (82) a zistíme, pre ktoré z nich dostaneme pravdivé tvrdenie. Vzhľadom na (81) ešte musíme vylúčiť bod $[0, 0]$.



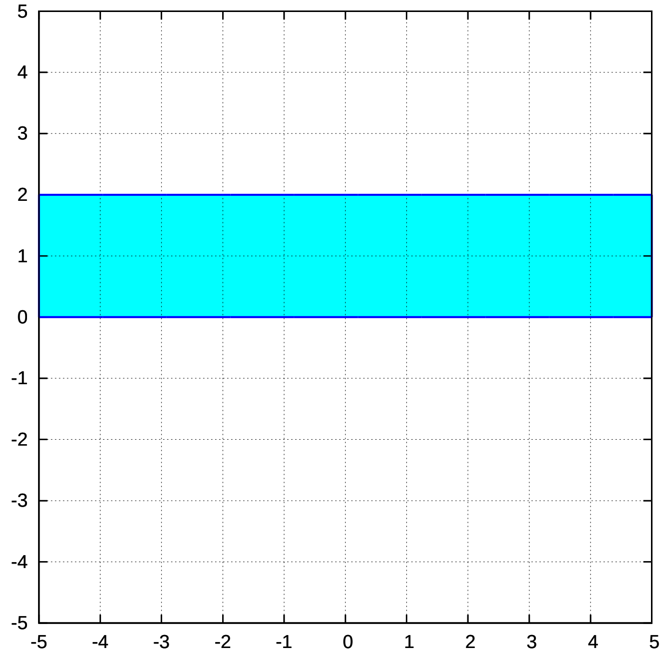
Zostáva nám vyriešiť nerovnicu (80).

$$-1 \leqq 1 - y \leqq 1 \qquad \Big/ -1$$

$$-2 \leqq -y \leqq 0 \qquad \Big/ \cdot (-1)$$

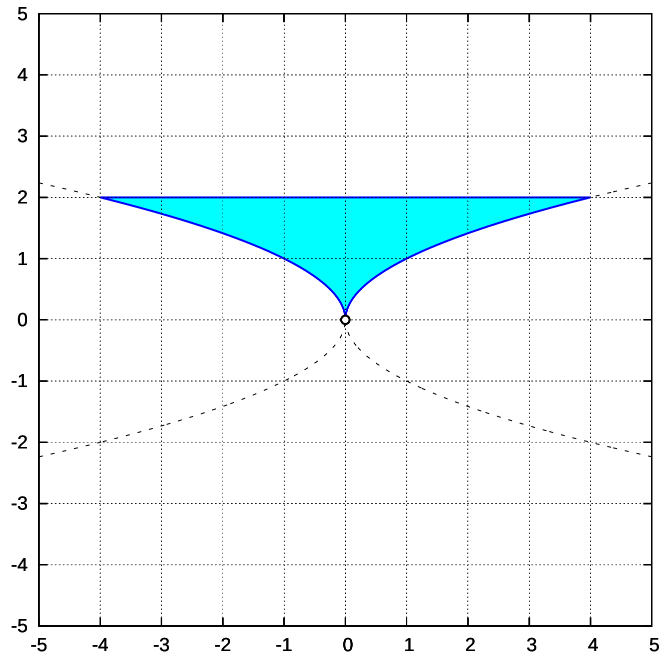
$$2 \geqq y \geqq 0 \tag{83}$$

Riešením nerovnice (80) je nekonečný pás určený priamkami $y = 0$ a $y = 2$.



Prienik riešení nerovnice (79) a nerovnice (80) nám dáva riešenie danej úlohy.
Odpoveď. Definičným oborom danej funkcie je množina

$$D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : -y^2 \leqq x \leqq y^2 \wedge 0 < y \leqq 2\}$$



Určte definičný obor funkcie dvoch premenných a znázornite ho v rovine xy.

(84) $$z = \arcsin(2y - 2x - 3) \cdot \ln(y - x^2 - 1)$$

Riešenie. Funkcia $y = \arcsin x$ je definovaná len pre pre čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, preto

(85) $$-1 \leqq 2y - 2x - 3 \leqq 1$$

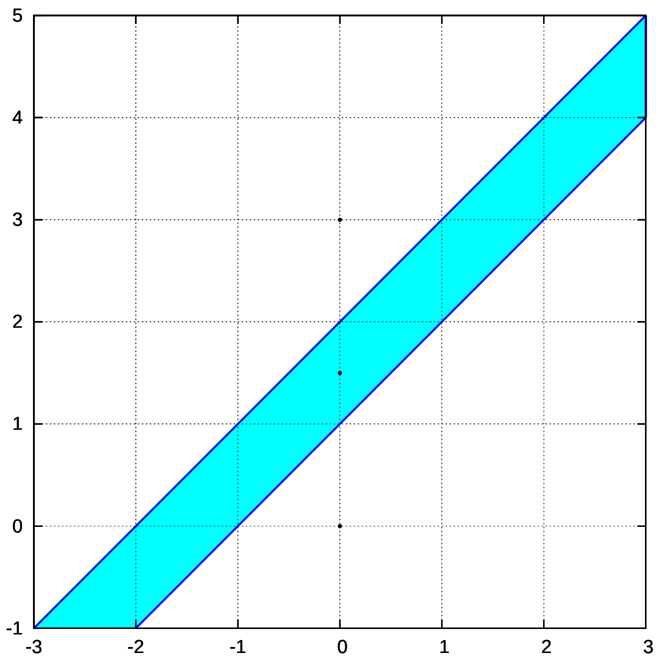
Funkcia $y = \ln x$ je definované len pre kladné čísla, preto

(86) $$y - x^2 - 1 > 0$$

Najskôr bude riešiť nerovnicu (85).

$$-1 \leqq 2y - 2x - 3 \leqq 1 \qquad \Big/ + 2x + 3$$
$$2x + 2 \leqq 2y \leqq 2x + 4 \qquad \Big/ \cdot \tfrac{1}{2}$$
(87) $$x + 1 \leqq y \leqq x + 2$$

Ako vidíme, máme dve rovnobežné priamky, ktoré rozdeľujú rovinu na tri časti. Pomocou vhodne zvolených bodov zistíme, ktoré časti roviny sú riešením nerovnice (87). Môžeme použiť napríklad body $[0, 0]$, $[0, \frac{3}{2}]$, $[0, 3]$. Dosadíme ich súradnice za x a y do (87) a zistíme, pre ktoré z nich dostaneme pravdivé tvrdenie.



Nerovnicu (86) upravíme do tvaru

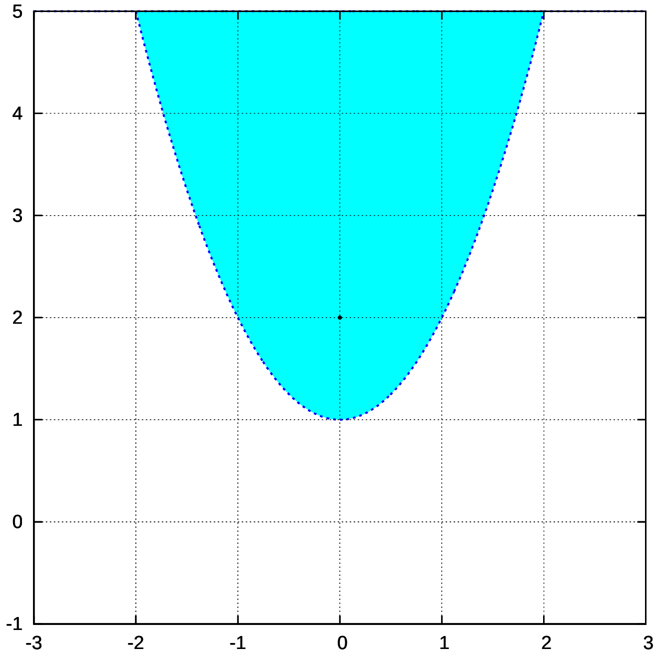
(88) $$y > x^2 + 1$$

Grafom funkcie $y = x^2 + 1$ je parabola, ktorá rozdeľuje rovinu na dve časti. Vyberieme ľubovoľný bod, ktorý na tejto parabole neleží. Dosadíme jeho súradnice za x a y do nerovnice (88). Napríklad bod $[0, 2]$ nám dáva

$$2 > 0^2 + 1$$

čo je zrejme pravda.

Teda riešením nerovnice (88) je tá časť roviny, ktorá obsahuje bod $[0, 2]$.



Prienik riešení nerovnice (85) a nerovnice (86) nám dáva riešenie danej úlohy.
Odpoveď. Definičným oborom danej funkcie je množina

$$D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + 1 \leqq y \leqq x + 2 \wedge y > x^2 + 1\}$$