Baireova veta.

Definícia. Množina $A \subseteq X$ sa nazýva riedka, ak $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) = \emptyset$.

Veta. *Množina $A \subseteq X$ je riedka práve vtedy, keď každá neprázdna otvorená množina $G \subseteq X$ má takú neprázdnu otvorenú podmnožinu $H \subseteq G$, že $H \cap A = \emptyset$.*

Dôkaz. 1. Nech A je riedka. Nech $G \subseteq X$ je neprázdna otvorená množina. Predpokladajme, že $G \subseteq \operatorname{Cl} A$. Vyberme $x_0 \in G$. Potom

$$x_0 \in G = \operatorname{Int} G \subseteq \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) = \emptyset,$$

čo je spor. Tento spor ukazuje, že musí existovať bod $y_0 \in G$ taký, že $y_0 \notin \operatorname{Cl} A$. Položme

$$H = G \setminus \operatorname{Cl} A = G \cap (X \setminus \operatorname{Cl} A).$$

Zrejme množina H má požadované vlastnosti.

2. Nech A nie je riedka. Potom $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A) \neq \emptyset$. Položme

$$G = \operatorname{Int}(\operatorname{Cl} A).$$

Zrejme G je neprázdna otvorená množina v X. Nech $H \subseteq G$ je neprázdna otvorená množina. Nech $x_0 \in H$. Zrejme $x_0 \in \operatorname{Cl} A$. Pretože H je otvorené okolie bodu x_0, platí $H \cap A \neq \emptyset$.

Definícia. Množina $A \subseteq X$ sa nazýva množina prvej Baireovej kategórie, ak je spočítateľným zjednotením riedkych množín. Ak množina $A \subseteq X$ nie je prvej Baireovej kategórie, hovoríme, že je druhej Baireovej kategórie.

Baireova veta. *Nech $X \neq \emptyset$ je úplný metrický priestor. Potom množina X je druhej Baireovej kategórie.*

Dôkaz. Nepriamo. Predpokladajme, že množina X je prvej Baireovej kategórie. Teda existujú riedke množiny $X_n \subseteq X$, pre ktoré platí

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_n.$$

Vyberme $x_0 \in X$. Položme $r_0 = 1$. Potom guľa $B(x_0, r_0)$ je neprázdna otvorená množina. Pretože množina X_1 je riedka, existuje guľa $B(x_1, \delta_1)$ taká, že

$$B(x_1, \delta_1) \subseteq B(x_0, r_0),$$

pre ktorú platí $X_1 \cap B(x_1, \delta_1) = \emptyset$. Položme

$$r_1 = \min(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\delta_1}{2}).$$

Potom $X_1 \cap \operatorname{Cl} B(x_1, r_1) = \emptyset$.

Tento postup opakujeme. Takto zostrojíme postupnosť gúľ $B(x_n, r_n)$, pre ktoré bude platiť

$$X_k \cap \operatorname{Cl} B(x_k, r_k) = \emptyset \quad (k = 1, 2, \dots)$$
$$\lim_{k\to\infty} r_k = 0$$
$$\operatorname{Cl} B(x_1, r_1) \supseteq \operatorname{Cl} B(x_2, r_2) \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{Cl} B(x_k, r_k) \supseteq \cdots$$

Potom existuje bod $x \in X$ taký, že

$$x \in \operatorname{Cl} B(x_k, r_n) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Pritom $x \notin \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X_n$.

Marko Švec, Tibor Šalát, Tibor Neubrunn: Matematická analýza funkcií reálnej premennej, ALFA/SNTL, 1987.

Baireova veta. *Ak* $A_1, A_2, A_3, \dots$ *sú uzavreté podmnožiny úplného metrického priestoru* $X \neq \emptyset$*, pričom*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

potom aspoň jedna z množín A_n *má neprázdne vnútro, t.j. nejaká otvorená guľa je jej podmnožinou.*

Dôkaz. Predpokladajme, že uvedené tvrdenie nie je pravdivé, t.j. že žiadna otvorená guľa nie je podmnožinou žiadnej z množín A_n.

Vyberme ľubovoľným spôsobom otvorenú guľu $B(x_0, r_0)$. Pretože žiadna otvorená guľa nie je podmnožinou množiny A_1, množina $G_1 = B(x_0, r_0) \setminus A_1$ je neprázdna. Pretože množina A_1 je uzavretá, množina $G_1 = B(x_0, r_0) \cap (X \setminus A_1)$ je otvorená (je prienikom dvoch otvorených množín).

Vyberme ľubovoľným spôsobom bod $x_1 \in G_1$. Pretože množina G_1 je otvorená, existuje $r_1 > 0$ také, že $B(x_1, 2r_1) \subseteq G_1$. Pritom r_1 môžeme vybrať tak, aby platilo $r_1 \leqq \frac{r_0}{2}$. Pretože žiadna otvorená guľa nie je podmnožinou množiny A_2, množina $G_2 = B(x_1, r_1) \setminus A_2$ je neprázdna. Pretože množina A_2 je uzavretá, množina $G_2 = B(x_1, r_1) \cap (X \setminus A_2)$ je otvorená (je prienikom dvoch otvorených množín).

Vyberme ľubovoľným spôsobom bod $x_2 \in G_2$. Pretože množina G_2 je otvorená, existuje $r_2 > 0$ také, že $B(x_2, 2r_2) \subseteq G_2$. Pritom r_2 môžeme vybrať tak, aby platilo $r_2 \leqq \frac{r_0}{2^2}$. Pretože žiadna otvorená guľa nie je podmnožinou množiny A_3, množina $G_3 = B(x_2, r_2) \setminus A_3$ je neprázdna. Pretože množina A_3 je uzavretá, množina $G_3 = B(x_2, r_2) \cap (X \setminus A_3)$ je otvorená (je prienikom dvoch otvorených množín).

Tento postup opakujeme. Takto môžeme zostrojiť postupnosť otvorených gulí $B(x_0, r_0), B(x_1, r_1), B(x_2, r_2), \dots$ s vlastnosťou

$$B(x_n, 2r_n) \subseteq B(x_{n-1}, r_{n-1}) \setminus A_n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots), \tag{1}$$

pričom pre polomery r_n bude platiť $r_n \leqq \frac{r_0}{2^n}$. Odtiaľ vyplýva, že $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = 0$.

Ľahko sa overí, že $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je Cauchyovská postupnosť. Totiž, pre $m > n$ máme $x_m \in B(x_m, r_m) \subseteq B(x_n, r_n)$, odkiaľ $d(x_m, x_n) < r_n$. Pretože priestor X je úplný, existuje $x \in X$ také, že $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Prechodom k limite pre $m \to \infty$ v nerovnosti $d(x_m, x_n) < r_n$ dostávame $d(x, x_n) \leqq r_n$ (pre každé n). Odtiaľ $d(x, x_n) \leqq r_n < 2r_n$, čo dáva $x \in B(x_n, 2r_n)$. Vzhľadom na (1) máme $x \notin A_n$. Teda

$$X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Tadeusz Pytlik: ANALIZA FUNKCJONALNA, Wrocław, 2000.