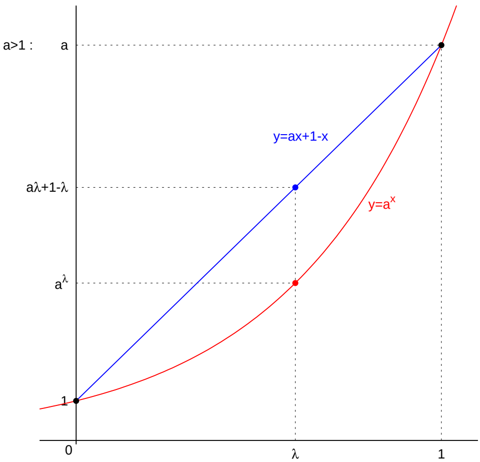
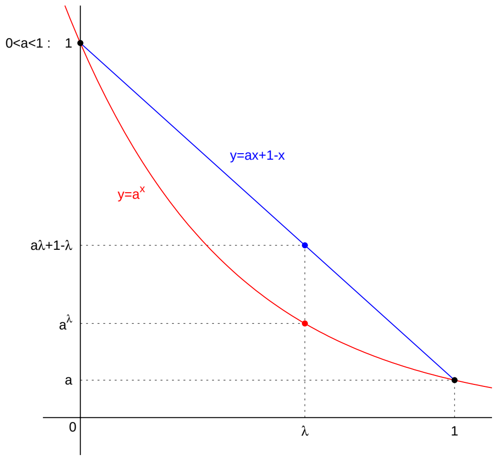
Bernoulliho nerovnosť

Nech $a > 0$, $a \neq 1$. Nech $0 < \lambda < 1$. Pretože funkcia $y = a^x$ je konvexná, bod $[\lambda, a^\lambda]$ leží pod sečnicou grafu funkcie $y = a^x$. Odtiaľ vyplýva, že platí

$$a^\lambda < a\lambda + 1 - \lambda.$$





Youngova nerovnosť

Veta 1. *Nech α, β, x, y sú kladné čísla, pričom $\alpha + \beta = 1$. Potom platí*

$$x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y,$$

pričom rovnosť platí práve vtedy, keď $x = y$.

Dôkaz. Pre $x \neq y$ použijeme Bernoulliho nerovnosť v tvare

$$\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha < \alpha \cdot \left(\frac{x}{y}\right) + 1 - \alpha.$$

□

Youngova nerovnosť sa častejšie uvádza v nasledujúcom tvare:

Veta 1'. *Nech a, b, p, q sú kladné čísla, pričom $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

pričom rovnosť platí práve vtedy, keď $a^p = b^q$.

Nech $(X, \mathscr{S}, \mu)$ je priestor s mierou. Ak f je merateľná funkcia definovaná na množine X a $0 < p < \infty$, definujeme

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

(pripúšťame aj možnosť, že $\|f\|_p = \infty$). Označme $L^p(X, \mathscr{S}, \mu)$ množinu všetkých takých funkcií f, pre ktoré $\|f\|_p < \infty$. Pritom nebudeme rozlišovať medzi funkciami, ktoré sa navzájom rovnajú skoro všade. Označenie $L^p(X, \mathscr{S}, \mu)$ budeme skracovať na $L^p(\mu)$, $L^p(X)$, alebo jednoducho L^p v prípadoch, keď to nebude viesť k nedorozumeniu.

Pretože pre každé $f, g \in L^p$ máme $\left|\frac{f+g}{2}\right|^p \leq [\max(|f|, |g|)]^p \leq |f|^p + |g|^p$, platí $f + g \in L^p$. Odtiaľ sa už ľahko vidí, že L^p je lineárny priestor.

Hölderova nerovnosť

Veta 2. *Nech $1 < p < \infty$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (t.j. $q = p/(p-1)$) Ak f a g sú merateľné funkcie na X, potom*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q . \tag{1}$$

V prípade, že $f \in L^p$ a $g \in L^q$, platí $fg \in L^1$ a v tomto prípade platí rovnosť v (1) práve vtedy, keď $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ skoro všade pre nejaké konštanty α, β s vlastnosťou $\alpha\beta \neq 0$.

Dôkaz. Tvrdenie je zrejmé v prípade, že $\|f\|_p = 0$ alebo $\|g\|_q = 0$ (pretože potom $f = 0$ alebo $g = 0$ skoro všade), alebo ak $\|f\|_p = \infty$ alebo $\|g\|_q = \infty$. Okrem toho, všimnime si, že ak (1) platí pre konkrétne f a g, potom tiež platí pre všetky skalárne násobky funkcií f a g. Naozaj, ak nahradíme funkcie f a g funkciami af a bg, obidve strany v (1) sa zmenia o faktor $|ab|$. Teda stačí dokázať (1) v prípade, že $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Teraz použijeme Youngovu nerovnosť v tvare z vety 1'. Dostaneme

$$|f(x)g(x)| \leq \tfrac{1}{p}|f(x)|^p + \tfrac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Po integrovaní dostaneme

$$\|fg\|_1 \leq \tfrac{1}{p} \int |f|^p \, d\mu + \tfrac{1}{q} \int |g|^q \, d\mu = \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q .$$

$\square$

Ak $1 < p < \infty$, číslo $q = p/(p-1)$, t.j. číslo, pre ktoré platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sa volá konjugované číslo k číslu p.

Minkowského nerovnosť

Veta 3. *Ak $1 \leqq p < \infty$ a $f, g \in L^p$, potom*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Dôkaz. Nerovnosť zrejme platí pre $p = 1$, ako aj v prípade $f + g = 0$ skoro všade. V opačnom prípade si všimneme, že platí

$$|f + g|^p \le (|f| + |g|)|f + g|^{p-1}$$

a použijeme Hölderovu nerovnosť, kde $(p-1)q = p$, pričom q je konjugované číslo k číslu p. Odtiaľ

$$\begin{aligned}
&\int |f+g|^p \, d\mu \le \int |f|\,|f+g|^{p-1} \, d\mu + |g|\,|f+g|^{p-1} \, d\mu = \\
&= \|f\,|f+g|^{p-1}\,\|_1 + \|g\,|f+g|^{p-1}\,\|_1 \le \|f\|_p \left\| \,|f+g|^{p-1}\, \right\|_q + \|g\|_p \left\| \,|f+g|^{p-1}\, \right\|_q = \\
&\quad = \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right) \left\| \,|f+g|^{p-1}\, \right\|_q = \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right) \left(\int ||f+g|^{p-1}|^q \, d\mu \right)^{1/q} = \\
&\qquad = \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right) \left(\int |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/q}
\end{aligned}$$

Potom

$$\|f+g\|_p = \left(\int |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left(\int |f+g|^p \, d\mu \right)^{1-(1/q)} \le \|f\|_p + \|g\|_p \,.$$

□

Nech X je normovaný lineárny priestor. Hovoríme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje, ak existuje $x \in X$ také, že $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} x_k - x \right\| = 0$. Hovoríme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje absolútne, ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ koverguje.

Veta 4. *Normovaný lineárny priestor X je úplný práve vtedy, keď každý absolútne konvergentný rad v X konverguje.*

Dôkaz. Predpokladajme, že X je úplný. Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolútne konvergentný rad. Položme $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Potom

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\| \to 0.$$

Tým sme ukázali, že postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ je cauchyovská. Pretože X je úplný, táto postupnosť musí konvergovať. Te podľa definície znamená, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ koverguje.

Predpokladajme, že každý absolútne konvergentný rad v X konverguje. Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská postupnosť v X. Potom existujú prirodzené čísla $n_1 < n_2 < \cdots$ také, že pre každé prirodzené číslo j platí $\|x_n - x_m\| < 2^{-j}$ pre každé $m, n \geq n_j$. Položme $y_1 = x_{n_1}$ a $y_j = x_{n_j} - x_{n_{j-1}}$ pre každé $j > 1$. Potom $\sum_{j=1}^{k} y_j = x_{n_k}$ a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\| \leq \|y_1\| + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = \|y_1\| + 1 < \infty,$$

čím sme ukázali, že rad $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ je absolútne konvergentný. Teda podľa nášho predpokladu rad $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ musí konvergovať. To znamená, že existuje $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} y_j = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Pretože postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská a má konvergentnú podpostupnosť, musí byť aj ona konvergentná.

Veta 5. *Nech $0 \leq p < \infty$. Potom priestor L^p je úplný.*

Dôkaz. Použijeme predchádzajúcu vetu. Nech $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ je absolútne konvergentný rad. Označme jeho súčet $B = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < \infty$. Položme $G_n = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ a $G = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$. Potom $\|G_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \leq B$ pre každé prirodzené číslo n, teda podľa vety o monotónnej konvergencii (Beppo Levi) platí $\int G^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int G_n^p \, d\mu \leqq B^p$. Teda $G \in L^p$ a špeciálne $G(x) < \infty$ skoro všade, odkiaľ vyplýva, že rad $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje skoro všade. Označme jeho súčet symbolom F. Potom $|F| \leq G$ a teda $F \in L^p$. Okrem toho platí $\left|F - \sum_{k=1}^{n} f_k\right|^p \leq (2G)^p \in L^1$, teda podľa Lebesgueovej vety o integrovateľnej majorante dostávame

$$\left\|F - \sum_{k=1}^{n} f_k\right\|_p^p = \int \left|F - \sum_{k=1}^{n} f_k\right|^p d\mu \to 0.$$

Tým sme ukázali, že rad $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje v priestore L^p.

Tvrdenie 6. *Nech $0 \leq p < \infty$. Potom množina jednoduchých merateľných funkcií $f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$, kde $\mu(E_j) < \infty$ pre všetky j, je hustá v priestore L^p.*

Aby sme doplnili obraz o priestoroch L^p, zavedieme priestor odpovedajúci limitnej hodnote $p = \infty$. Ak f je merateľná funkcia na X, definujeme

$$\|f\|_\infty = \inf\{a \geq 0; \mu(\{x \in X; |f(x)| > a\}) = 0\},$$

kde $\inf \emptyset = \infty$. Označme $L^\infty(X, \mathscr{S}, \mu)$ množinu všetkých takých funkcií f, pre ktoré $\|f\|_\infty < \infty$. Pritom nebudeme rozlišovať medzi funkciami, ktoré sa navzájom rovnajú skoro všade.

Literatúra

[1] Folland, G. B., *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications.*, John Wiley & Sons. Inc., 1999.