Jozef Doboš

jozef.dobos@upjs.sk

http://prof.jozef.xn--dobo-j6a.eu

Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice

Obsah

Absolútna hodnota

Najskôr si zopakujme definíciu:

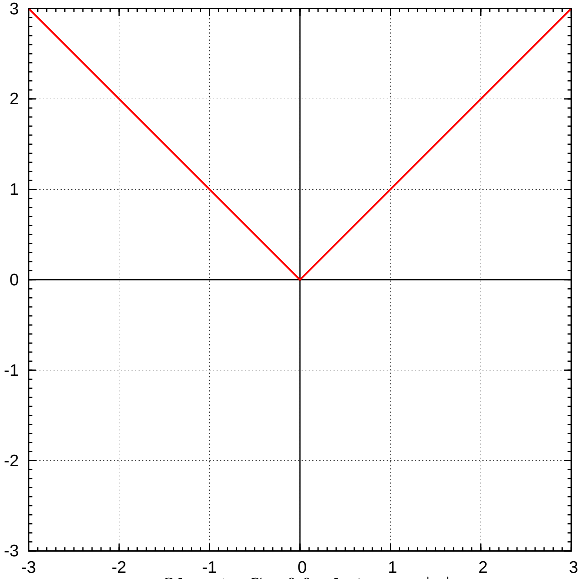
ak $x > 0$, potom $|x| = x$;
ak $x < 0$, potom $|x| = -x$;
ak $x = 0$, potom $|x| = 0$.

Všimnime si, že platí: $|x| = \max(x, -x)$. To znamená, že absolútna hodnota čísla x je väčšie z čísel x a $-x$. Samozrejme okrem prípadu, keď čísla x a $-x$ sú rovnaké. Ale vtedy je úplne jedno, ktoré z nich použijeme. Ak $a = b$, potom $\max(a, b) = a = b$.

Základné vlastnosti absolútnej hodnoty reálneho čísla:

a) $|0| = 0$;
b) ak $x \neq 0$, potom $|x| > 0$;
c) $|xy| = |x|\,|y|$;
d) $|x + y| \leqq |x| + |y|$.

Pretože $|x| = \sqrt{x^2}$, funkcia $y = |x|$ patrí medzi elementárne funkcie.



Obr. 1. Graf funkcie $y = |x|$

Norma

Pojem absolútnej hodnoty rozšírime. Nech X je okruh s jednotkou. Predpokladajme, že každému $x \in X$ vieme priradiť reálne číslo, ktoré označujeme symbolom $\|x\|$, pričom:

a) $\|0\| = 0$;
b) ak $x \neq 0$, potom $\|x\| > 0$;
c) $\|xy\| = \|x\| \, \|y\|$;
d) $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$.

Potom číslo $\|x\|$ voláme (algebraická) norma prvku x.

Príklad. Nech p je pevne zvolené prvočíslo. Pripomeňme si, že p-adická valuácia nenulového celého čísla x je exponent najväčšej celočíselnej mocniny prvočísla p, ktorá delí číslo x. Označujeme ju symbolom $v_p(x)$. Teda

$$v_p(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} : p^k \text{ delí } x\}.$$

Pritom kladieme $v_p(0) = \infty$ (zdôvodnite).

Základné vlastnosti p-adickej valuácie:

1) $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$,
2) $v_p(x + y) \geqq \min(v_p(x), v_p(y))$.

Ukážeme, že pre každé prirodzené číslo k platí:

$$k < \min(v_p(x), v_p(y)) \Rightarrow k < v_p(x+y),$$

odkiaľ už vyplýva vlastnosť (2).

Z podmienky $k < \min(v_p(x), v_p(y))$ máme $k+1 \leqq v_p(x)$, $k+1 \leqq v_p(y)$. Potom $p^{k+1}|x$, $p^{k+1}|y$, teda $p^{k+1}|(x+y)$. Tým sme ukázali, že $k+1 \leqq v_p(x+y)$.

Ak $x = a/b$ je racionálne číslo, jeho p-adickú valuáciu definujeme predpisom $v_p(x) = v_p(a) - v_p(b)$. Táto definícia je korektná. Skutočne, ak $a/b = c/d$, potom $ad = bc$, teda z vlastnosti (1) máme $v_p(a) + v_p(d) = v_p(b) + v_p(c)$, t.j. $v_p(a) - v_p(b) = v_p(c) - v_p(d)$.

Nie je ťažké overiť, že p-adická valuácia racionálnych čísel tiež spĺňa (1) a (2). Teraz môžeme definovať p-adickú normu nenulového racionálneho čísla x predpisom

$$\|x\| = p^{-v_p(x)}.$$

Pritom kladieme $\|0\|_p = 0$ (zdôvodnite).

Potom p-adická norma je algebraickou normou, pre ktorú platí

d*) $\|x+y\| \leqq \max(\|x\|, \|y\|)$.

Príklad. Nech f je spojitá reálna funkcia definovaná na intervale $\langle a, b\rangle$. Položme

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}.$$

Tým sme definovali tzv. supremovú normu na priestore $\mathscr{C}[a, b]$.

Pretože každá spojitá reálna funkcia definovaná na uzavretom a ohraničenom intervale nadobúda svoje maximum, existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ také, že $\|f\| = |f(\xi)|$. Teda

$$\|f\| = \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}.$$

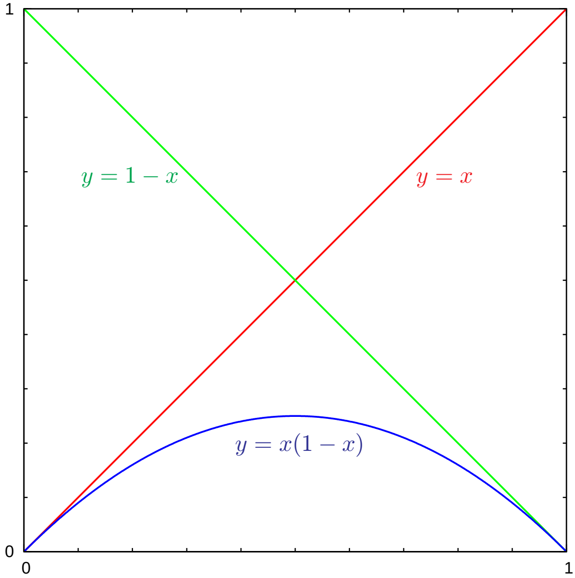
Nech $f, g \in \mathscr{C}[a, b]$. Pretože pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$|f(x) + g(x)| \leqq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|,$$

supremová norma má vlastnosť (d).

Ako vidíme na obrázku 2, supremová norma vlastnosť (c) nemá.

Napriek tomu istá slabšia verzia vlastnosti (c) zostáva v platnosti. Stačí požadovať, aby jedna z funkcií f, g bola konštantná.



Obr. 2.

Nech X je vektorový priestor nad telesom $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísel. Predpokladajme, že každému $x \in X$ vieme priradiť reálne číslo, ktoré označujeme symbolom $\|x\|$, pričom pre každé $x, y \in X$ a pre každé $t \in \mathbb{R}$ platí:

a) $\|0\| = 0$;
b) ak $x \neq 0$, potom $\|x\| > 0$;
c) $\|tx\| = |t|\,\|x\|$;
d) $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$.

Potom číslo $\|x\|$ voláme (geometrická) norma vektora x.

Nie je ťažké overiť, že supremová norma z predchádzajúceho príkladu je geometrickou normou.

Euklidovská norma

Množina $\mathbb{R}^k$ je kartézskym súčinom k kópií množiny všetkých reálnych čísel $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R}^k = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{k \text{ činiteľov}}$$

× |< >| < >

Nech $\overline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Euklidovskú normu definujme takto:

$$\|\overline{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}.$$

Skalárny súčin dvoch vektorov $\overline{x} = (x_1, \dots, x_k)$ a $\overline{y} = (y_1, \dots, y_k)$ definujeme takto:

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_k y_k.$$

Euklidovskú normu môžeme vyjadriť pomocou skalárneho súčinu:

$$\|\overline{x}\| = \sqrt{\overline{x} \cdot \overline{x}}.$$

Cauchyho nerovnosť

Veta. *Pre každé $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^k$ platí:*

$$|\overline{x} \cdot \overline{y}| \leq \|\overline{x}\| \, \|\overline{y}\|.$$

Dôkaz. Pre každé reálne číslo t platí:

$$(t\overline{x} - \overline{y}) \cdot (t\overline{x} - \overline{y}) = \|t\overline{x} - \overline{y}\|^2 \geq 0.$$

Potom $(\overline{x} \cdot \overline{x})t^2 - 2(\overline{x} \cdot \overline{y})t + \overline{y} \cdot \overline{y} \geq 0$. Máme teda kvadratický trojčlen premennej t, ktorý nadobúda iba nezáporné hodnoty. Preto nemôže mať dva rôzne reálne korene. Jeho diskriminant teda nemôže byť kladný, t. j. $4(\overline{x} \cdot \overline{y})^2 - 4(\overline{x} \cdot \overline{x})(\overline{y} \cdot \overline{y}) \leq 0$. Potom $(\overline{x} \cdot \overline{y})^2 \leq (\overline{x} \cdot \overline{x})(\overline{y} \cdot \overline{y})$, odkiaľ

$$|\overline{x} \cdot \overline{x}| \leq \|\overline{x}\| \, \|\overline{y}\| \, .$$

□

Ukážeme, že euklidovská norma spĺňa (d):

$$\begin{aligned} \|\overline{x} + \overline{y}\|^2 = (\overline{x} + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + \overline{y}) = \|\overline{x}\|^2 + 2(\overline{x} \cdot \overline{y}) + \|\overline{y}\|^2 \leq \\ \leq \|\overline{x}\|^2 + 2\,\|\overline{x}\|\,\|\overline{y}\| + \|\overline{y}\|^2 = (\|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|)^2 \, . \end{aligned}$$

Metrika

Nech X je (zvyčajne neprázdna) množina. Hovoríme, že na množine X je daná metrika d, ak pre každé dva prvky $x, y \in X$ (často ich voláme body priestoru X) je určená ich vzdialenosť $d(x, y)$, čo je nezáporné reálne číslo. Pritom požadujeme splnenie nasledujúcich podmienok:

i) $d(x, x) = 0$;
ii) ak $x \neq y$, potom $d(x, y) > 0$;
iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Množina X s metrikou d sa nazýva metrický priestor.

Na každej neprázdnej množine X môžeme definovať triviálnu metriku predpisom:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \neq y, \\ 0, & \text{ak } x = y. \end{cases}$$

Metriku často vytvárame pomocou normy:

$$d(x, y) = \|x - y\| .$$

Lema. *Nech X je metrický priestor. Potom pre každé $x, y, z \in X$ platí:*

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leqq d(x,z).$$

Nech X je metrický priestor s metrikou d. (Otvorenou) guľou $B(x,r)$ so stredom v bode $x \in X$ a polomerom $r > 0$ nazývame množinu všetkých tých bodov $y \in X$, ktorých vzdialenosť od bodu x je menšia ako číslo r. Teda

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

Hovoríme, že množina $U \subset X$ je okolím bodu $x \in X$, ak existuje $r > 0$ také, že platí $B(x,r) \subset U$.

Postupnosti a konvergencia

Hovoríme, že postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov metrického priestoru X konverguje k budu $x \in X$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ v guli $B(x,\varepsilon)$ ležia všetky členy tejto postupnosti, s možnou výnimkou konečného počtu členov. Bod x sa volá limita tejto postupnosti. Píšeme $x_n \to x$.

Je ľahké nahliadnuť, že $x_n \to x$ práve vtedy, keď platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 : \ d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Inými slovami, $x_n \to x$ práve vtedy, keď $d(x_n, x) \to 0$.

Postupnosť v metrickom priestore nemôže mať viac ako jednu limitu. Dokážte.

Hovoríme, že postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov metrického priestoru X je ohraničená, ak existuje také reálne číslo M, že $d(x_k, x_n) < M$ pre každé $k, n \in \mathbb{N}$.

Každá konvergentná postupnosť v metrickom priestore je ohraničená. Dokážte.

Podpostupnosť konvergentnej postupnosti v metrickom priestore má tú istú limitu. Dokážte.

Nech $\{\overline{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť v euklidovskom priestore $\mathbb{R}^k$. Teda každé $\overline{x}_n$ je tvaru $\overline{x}_n = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(k)})$. Nech $\overline{x} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}) \in \mathbb{R}^k$. Potom $\overline{x}_n \to \overline{x}$ práve vtedy, keď $x_n^{(i)} \to x^{(i)}$ pre každé $i = 1, \ldots, k$. Dokážte.

Ekvivalentné metriky

Hovoríme, že dve normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ definované na tej istej množine X sú ekvivalentné, ak existujú konšanty $c_1, c_2 > 0$ také, že pre každé $x \in X$ platí:

$$c_1 \|x\|_1 \leqq \|x\|_2 \leqq c_2 \|x\|_1 .$$

Na množine $\mathbb{R}^k$ definujeme ďalšie normy. Nech m je prirodzené číslo. Pre $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ položme

$$\|\overline{x}\|_m = \sqrt[m]{\sum_{i=1}^{k} |x_i|^m},$$

$$\|\overline{x}\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, k\}.$$

Lema. *Normy $\|\cdot\|_m$ a $\|\cdot\|_\infty$ sú ekvivalentné pre každé prirodzené číslo m. Teda všetky normy typu $\|\cdot\|_m$ sú ekvivalentné každá s každou.*

Dokážte.

Hovoríme, že dve metriky d_1, d_2 definované na tej istej množine X sú ekvivalentné, ak existujú konšanty $c_1, c_2 > 0$ také, že pre každé $x, y \in X$ platí:

$$c_1 d_1(x, y) \leqq d_2(x, y) \leqq c_2 d_1(x, y).$$

Veta. *Nech d_1, d_2 sú ekvivalentné metriky na tej istej množine X. Potom $x_n \to x$ vzhľadom na metriku d_1 práve vtedy, keď $x_n \to x$ vzhľadom na metriku d_2.*

Dokážte.

Otvorené a uzavreté množiny

Množina G je otvorená, ak je okolím každého svojho bodu. To znamená, že pre každé $x \in G$ existuje $r > 0$ také, že $B(X, r) \subset G$.

Množina F je uzavretá, ak obsahuje limity všetkých svojich konvergentných postupností. To znamená, že pre každú postupnosť bodov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ patriacich do množiny F a konvergujúcu k bodu $x \in X$ platí $x \in F$. Množina F je uzavretá práve vtedy, keď jej doplnok $G = X - F$ je otvorená množina. Dokážte.

Systém $\mathscr{T}$ všetkých otvorených množín daného metrického priestoru X sa volá topológia priestoru X. Základné vlastnosti:

I) prázdna množina, ako aj celý priestor X, sú otvorené množiny;
II) prienik konečného počtu otvorených množín je otvorená množina;
III) zjednotenie ľubovoľného počtu otvorených množín je tiež otvorená množina.

Najväčšiu otvorenú podmnožinu množiny U nazývame vnútro množiny U. Označujeme ju symbolom $\mathrm{Int}(U)$. Platí

$$\mathrm{Int}(U) = \bigcup\{G \subset X : G \text{ je otvorená a } G \subset U\}.$$

Najmenšiu uzavretú nadmnožinu množiny U nazývame uzáver množiny U. Označujeme ju symbolom $\mathrm{Cl}(U)$. Platí

$$\mathrm{Cl}(U) = \bigcap\{F \subset X : F \text{ je uzavretá a } U \subset F\}.$$

Hranicu množiny U definujeme ako $\mathrm{Fr}(U) = \mathrm{Cl}(U) - \mathrm{Int}(U)$.

Hromadné body

Hovoríme, že bod $x \in X$ je hromadný bodom množiny $U \subset X$, ak každé okolie bodu x obsahuje nekonečne veľa bodov množiny U. Hromadný bod množiny U nemusí byť prvkom množiny U.

Hovoríme, že bod $x \in U$ je izolovaným bodom množiny U, ak existuje $r > 0$ také, že platí $B(x, r) \cap U = \{x\}$. Bod $x \in U$ je izolovaným bodom množiny U práve vtedy, keď nie je jej hromadným bodom.

Množina U v metrickom priestore X sa volá hustá, ak $\mathrm{Cl}(U) = X$. Inými slovami, množina U je hustá, ak každá guľa v priestore X obsahuje aspoň jeden bod množiny U.

Množina U v metrickom priestore X sa volá riedka, ak doplnok jej uzáveru je hustý v X. Inými slovami, množina U je riedka, ak každá guľa obsahuje podguľu s ňou disjunktnú, t.j. pre každé $x \in X$ a $r > 0$ existuje $y \in X$ a $s > 0$ také, že $B(y, s) \subset B(x, r)$ a $B(y, s) \cap U = \emptyset$.

Hovoríme, že množina U v metrickom priestore X je prvej kategórie, ak ju možno vyjariť ako spočítateľné zjednotenie riedkych množín. Všetky ostatné množiny sú druhej kategórie.

Spojité zobrazenia

Nech (X_1, d_1) a (X_2, d_2) sú dva metrické priestory. Nech $f : X_1 \to X_2$ je zobrazenie. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

i) pre každé $x \in X_1$ a pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $y \in X_1$ platí: $(d_1(x, y) < \delta) \Rightarrow (d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon)$;

ii) pre každé $x \in X_1$ a pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v priestore X_1 platí: $(x_n \to x) \Rightarrow (f(x_n) \to f(x))$;

iii) pre každú podmnožinu $U \subset X_2$ platí: $(U$ je otvorená v $X_2) \Rightarrow (f^{-1}(U)$ je otvorená v $X_1)$.

Ak sú tieto podmienky splnené, hovoríme, že zobrazenie f je spojité.

Nech (X_1, d_1) a (X_2, d_2) sú dva metrické priestory. Nech $x \in X_1$ je hromadný bod množiny X_1. Hovoríme, že bod $y \in X_2$ je limitou zobrazenia $f : X_1 \to X_2$ v bode x, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $t \in B(x, \delta)$, $t \neq x$ platí $f(t) \in B(y, \varepsilon)$. Zapisujeme to v tvare: $\lim\limits_{t \to x} f(t) = y$.

Zobrazenie f je spojité, ak pre každý hromadný bod $x \in X_1$ platí $\lim\limits_{t \to x} f(t) = f(x)$.

Úplnosť

Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov metrického priestoru (X, d) sa nazýva cauchyovská, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $n, m > n_0$ platí $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Každá konvergentná postupnosť je cauchyovská. Naopak to neplatí.

Metrický priestor X sa volá úplný, ak každá cauchyovská postupnosť v X je konvergentná.

Nech (X_1, d_1) a (X_2, d_2) sú dva metrické priestory. Hovoríme, že zobrazenie $f : X_1 \to X_2$ spĺňa Lipschitzovu podmienku, ak existuje konštanta $L \geq 0$ taká, že pre každé $x, y \in X_1$ platí:

$$d_2(f(x), f(y)) \leqq L d_1(x, y).$$

Takéto zobrazenie je zrejme spojité.

Hovoríme, že zobrazenie $f : X_1 \to X_2$ je kontraktívne, ak spĺňa Lipschitzovu podmienku s konštantou $L < 1$.

Banachova veta o pevnom bode. *Ak* (X, d) *je úplný metrický priestor a* $f : X \to X$ *je kontraktívne zobrazenie, potom zobrazenie* f *má jediný pevný bod, t.j. existuje jediné také* $x \in X$*, pre ktoré platí* $f(x) = x$.

Ukážeme použitie Banachovej vety. Budeme sa zaoberať riešením y diferenciálnej rovnice

$$y' = f(x, y),$$

ktoré spĺňa počiatočnú podmienku

$$y(x_0) = y_0.$$

Hľadáme teda integrálnu krivku, prechádzajúcu bodom (x_0, y_0), ktorá leží v nejakom okolí $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ tohto bodu.

O funkcii f predpokladáme, že na množine I je spojitá a že spĺňa Lipschitzovu podmienku v druhej premennej, t.j. existuje kladná konštanta L taká, že pre každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a $y_1, y_2 \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ platí

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Danú úlohu (zvykne sa volať Cauchyho úloha) prevedieme na integrálnu rovnicu. Nech $\langle a, b\rangle$ je taký uzavretý interval, pre ktorý platí $x_0 \in (a, b) \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $b - a < L/2$. Integrálna rovnica má potom tvar

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Teraz použijeme Banachovu vetu v priestore $\mathscr{C}[a, b]$ so supremovou normou. Zobrazenie $T : \mathscr{C}[a, b] \to \mathscr{C}[a, b]$ priradí každej funkcii $\varphi \in \mathscr{C}[a, b]$ funkciu $\psi = T(\varphi)$ určenú predpisom

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt.$$

Ukážeme, že T vyhovuje Banachovej vete. Nech $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{C}[a, b]$. Položme $\psi_1 = T(\varphi_1)$, $\psi_2 = T(\varphi_2)$. Potom pre každé $x \in (a, b)$ platí

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_1(t))\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_2(t))\, dt \right| \leqq$$

$$\leqq \int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t))| \, dt \leqq L \int_{x_0}^{x} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \, dt \leqq$$

$$\leqq L \int_{x_0}^{x} \|\varphi_1 - \varphi_2\| \, dt \leq L(b-a)\|\varphi_1 - \varphi_2\| < \tfrac{1}{2}\|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Odtiaľ vyplýva, že $\|T(\varphi_1)-T(\varphi_2)\| \leqq \frac{1}{2}\|\varphi_1-\varphi_2\|$. Voľbou intervalu $\langle a,b\rangle$ sme dosiahli, že zobrazenie T je kontraktívne. Pevný bod zobrazenia T je práve hľadané riešenie našej integrálnej rovnice.

Kompaktnosť

Metrický priestor sa volá sekvenciálne kompaktný, ak každá postupnosť v tomto priestore má konvergentnú podpostupnosť.

Metrický priestor sa volá kompaktný, ak každé pokrytie tohto priestoru otvorenými množinami má konečné podpokrytie. Dá sa ukázať, že tieto dva pojmy sú ekvivalentné, t.j. metrický priestor je kompaktný práve vtedy keď je sekvenciálne kompaktný. V euklidovskom priestore $\mathbb{R}^n$ každá uzavretá a ohraničená množina je kompaktná. Každá spojitá reálna funkcia definovaná na kompaktnom metrickom priestore je ohraničená a nadobúda svoje minimum a maximum.

Súvislosť

Neprázdna množina M v euklidovskom priestore $\mathbb{R}^k$ sa volá lineárne súvislá, ak každé dva jej body možno spojiť lomenou čiarou, ktorá celá leží v M.

Neprázdna množina M v metrickom priestore X sa volá súvislá, ak žiadne dve disjunktné otvorené množiny G_1, G_2 nemôžu pokrývať množinu M takým spôsobom, aby množina M nebola podmnožinou jednej z množín G_1, G_2. Každá lineárne súvislá množina v euklidovskom priestore $\mathbb{R}^k$ je súvislá. Opačné tvrdenie vo všeobecnosti neplatí.

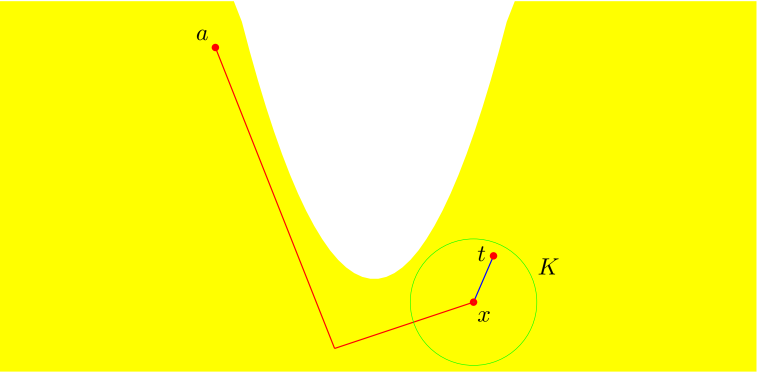
Veta. *Každá otvorená množina v euklidovskom priestore $\mathbb{R}^k$ je súvislá práve vtedy, keď je lineárne súvislá.*

Dôkaz. Nech M je otvorená a súvislá množina. Ukážeme, že každý jej bod možno spojiť lomenou čiarou v M s daným ľubovoľným bodom $a \in M$. Položme

$$A = \{x \in M : \text{ existuje lomená čiara v } M, \text{ spájajúca } x \text{ s bodom } a\}.$$

Ukážeme, že $A = M$. Pretože $a \in A$, množina A je neprázdna. Ukážeme, že množiny A, $B = M - A$ sú otvorené. Zo súvislosti množiny M potom bude vyplývať, že $M = A \cup B$ nie je rozklad, teda $B = \emptyset$, t. j. $A = M$.

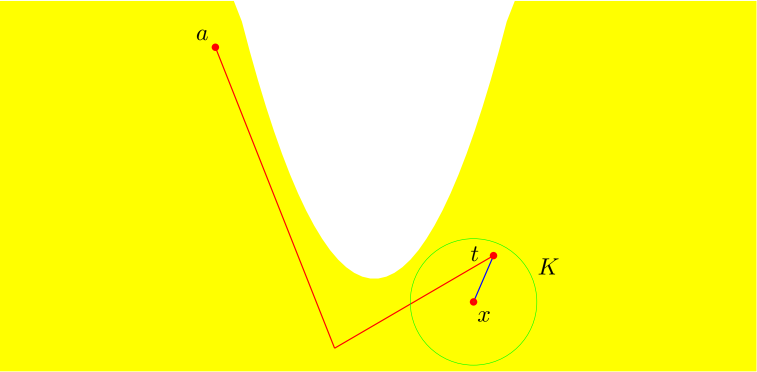
Ukážeme, že množina A je otvorená. Pre každý bod $x \in A$ existuje otvorená guľa K so stredom v bode x, ktorá celá leží v množine M (to vyplýva z otvorenosti množiny M). Ukážeme, že $K \subset A$. Bod x možno spojiť s bodom a lomenou čiarou v M (pretože $x \in A$).



Obr. 3.

Ak $t \in K$ je ľubovoľný bod, pripojíme k tejto lomenej čiare úsečku z bodu x do bodu t. Dostaneme lomenú čiaru z bodu a do bodu t. Pretože $K \subset M$, leží celá táto lomená čiara v M, z čoho vyplýva, že $t \in A$. Tým sme ukázali, že $K \subset A$.

Nakoniec ukážeme, že množina B je otvorená. Pre ľubovoľný bod $x \in B$ existuje otvorená guľa K so stredom v bode x, ktorá celá leží v množine M (to vyplýva z otvorenosti množiny M).



Obr. 4.

Ukážeme, že $K \subset B$. Sporom. Ak by niektorý bod $t \in K$ ležal v A, mohli by sme ho spojiť s bodom a lomenou čiarou v M. K tejto čiare by sme pripojili úsečku z bodu t do bodu x, čím by sme ukázali, že $x \in A$. Tento spor ukazuje, že $K \cap A = \emptyset$, čiže $K \subset B$.

Literatúra

P. Kostyrko, T. Šalát: Metrické priestory.

Gregory Sankaran: Brief Notes on Metric Spaces.

Thomson · Bruckner^2: Elementary Real Analysis.

J. Veselý: Matematická analýza pro učitele, matfyzpress, Praha, 1997.