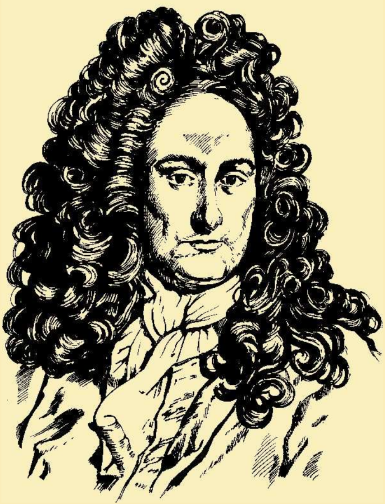
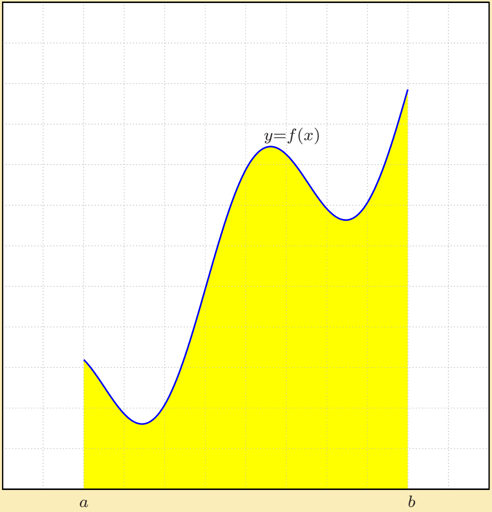


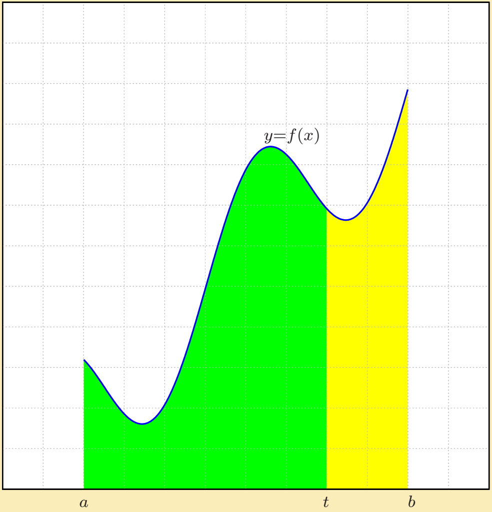


$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá

$f(x) \geq 0$ pre každé $x \in [a, b]$

Zaujíma nás funkcia P vyjadrujúca plošný obsah.

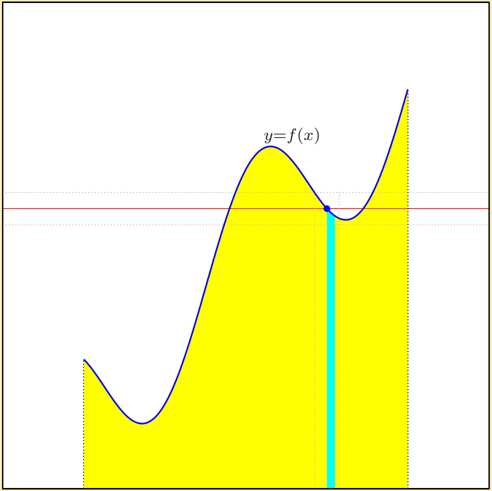
http://www.maths.ox.ac.uk/courses/course/15774/material



Pre každé $t \in [a,b]$ označme symbolom $P(t)$ plošný obsah útvaru určeného nerovnosťami

$a \leq x \leq t$

$0 \leq y \leq f(x)$

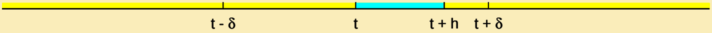


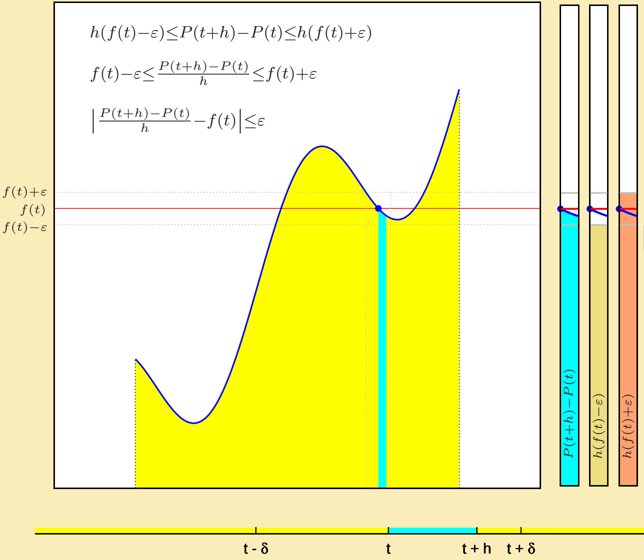
Ak $h > 0$,
číslo $P(t+h) - P(t)$
je plošný obsah útvaru
určeného nerovnosťami

$$t \leq x \leq t+h$$
$$0 \leq y \leq f(x)$$

Zo spojitosti funkcie f
v bode t vieme, že pre
každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$
s nasledujúcou vlastnosťou:

$$t - \delta < x < t + \delta$$
$$\Downarrow$$
$$f(t) - \varepsilon < f(x) < f(t) + \varepsilon$$





Ukázali sme, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s vlastnosťou:

$$0 < h < \delta$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{P(t+h)-P(t)}{h}-f(t)\right| \leq \varepsilon$$

Teda funkcia P má deriváciu sprava v bode $t \in [a, b)$ rovnú číslu $f(t)$.

Podobne sa dá ukázať, že funkcia P má deriváciu zľava v bode $t \in (a,b]$ rovnú číslu $f(t)$. Teda funkcia P je primitívnou funkciou k funkcii f. Celkový plošný obsah sa rovná číslu $P(b)$.

Nech F je ľubovoľná primitívna funkcia k funkcii f. Pretože zrejme $P(a) = 0$, pre každé $x \in [a,b]$ máme

$$P(x) = F(x) - F(a).$$

Teda celkový plošný obsah sa rovná

$$P(b) = F(b) - F(a).$$

Definícia. Nech F je primitívna funkcia k funkcii f. Číslo $F(b) - F(a)$ sa volá Newtonov integrál funkcie f na intervale $[a,b]$ a označuje sa $(N)\int_a^b f$. Teda

$$(N)\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Literatúra

[1] Hutník, O., *Určitý integrál, študijný materiál k predmetu Matematická analýza*, ÚMV UPJŠ, Košice, 2010.

Domáca úloha:

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}\, dx$$

$$\int \frac{x}{x^5 + 1}\, dx$$

関数 $f(x)$ が $f(x) = x^2 + x\int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^2 f(t)\,dt$ を満たす.

Augustin Louis Cauchy

2

Cauchy, 1823, first explicit definition of definite integral as limit of sum of products

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Purpose is to show that the definite integral is well-defined for *any* continuous function.

RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE

SUR

LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

CALCUL INTÉGRAL.

VINGT ET UNIÈME LEÇON.

INTÉGRALES DÉFINIES.

Supposons que, la fonction $y = f(x)$ étant continue par rapport à la variable x entre deux limites finies $x = x_0$, $x = X$, on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de nouvelles valeurs de x interposées entre ces limites, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. On pourra se servir de ces valeurs pour diviser la différence $X - x_0$ en éléments

$$(1) \qquad x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1, \quad x_3 - x_2, \quad \ldots, \quad X - x_{n-1}$$

qui seront tous de même signe. Cela posé, concevons que l'on multiplie chaque élément par la valeur de $f(x)$ correspondante à l'*origine* de ce même élément, savoir l'élément $x_1 - x_0$ par $f(x)$, l'élément $x_2 - x_1$ par $f(x_1)$, ..., enfin l'élément $X - x_{n-1}$ par $f(x_{n-1})$; et soit

$$(2) \qquad S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

Riemann's *habilitation* of 1854:

Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x_i$$

Purpose of Riemann integral:

1. To investigate how discontinuous a function can be and still be integrable. Can be discontinuous on a dense set of points.
2. To investigate when an unbounded function can still be integrable. Introduce improper integral.

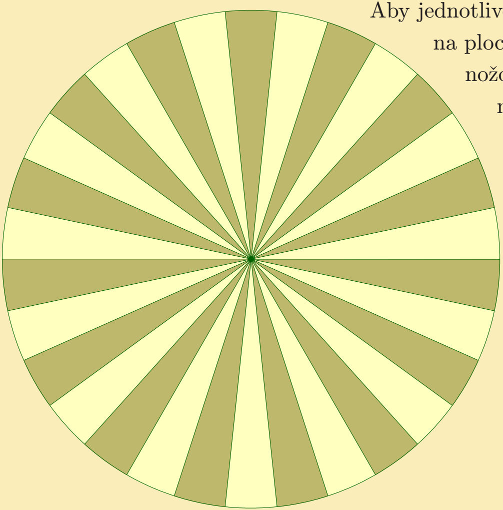
Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges voraufzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

Also zuerst: Was hat man unter $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ zu verstehen?

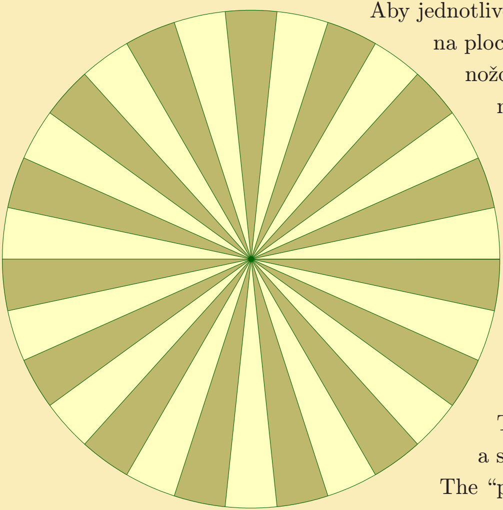
Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen a und b der Grösse nach auf einander folgend, eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ an und bezeichnen der Kürze wegen $x_1 - a$ durch δ_1, $x_2 - x_1$ durch $\delta_2, \ldots, b - x_{n-1}$ durch δ_n und durch ε einen positiven ächten Bruch. Es wird alsdann der Werth der Summe

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \cdots$$
$$+ \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

von der Wahl der Intervalle δ und der Grössen ε abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch δ und ε gewählt werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden, so heisst dieser Werth $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

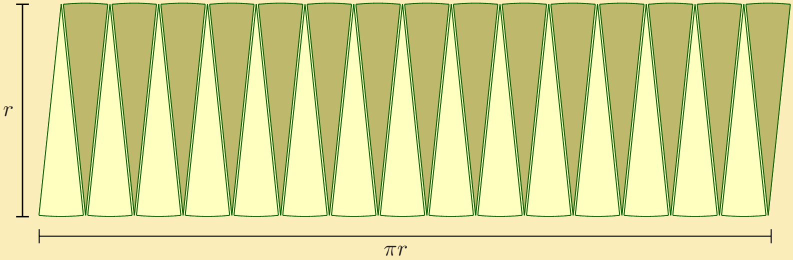


Aby jednotlivé dieliky torty boli krásne hladké na ploche rezu, tortu krájame teplým nožom. Pripravíme si vyššiu úzku nádobu s teplou vodou a v nej nôž namáčame. Po každom zakrojení namočíme nôž znovu do teplej vody a utrieme.



Aby jednotlivé dieliky torty boli krásne hladké na ploche rezu, tortu krájame teplým nožom. Pripravíme si vyššiu úzku nádobu s teplou vodou a v nej nôž namáčame. Po každom zakrojení namočíme nôž znovu do teplej vody a utrieme.

To find the area of a circle, we can use a formula. The diagram shows why the formula is reasonable. A circle is divided into parts. The parts fit together to form a shape like a parallelogram. The "parallelogram" has the same area as the circle.



The base of the “parallelogram” is $\frac{1}{2}$ the circumference (πr). The height is r.

$$\textbf{Area of circle} = \boldsymbol{\pi r \times r}$$
$$= \boldsymbol{\pi r^2}$$

Literatúra

[1] R. E. Eicholz et al., *Addison-Wesley Mathematics*, Addison-Wesley Publ. Comp., 1985.

Plošný obsah kruhu

4

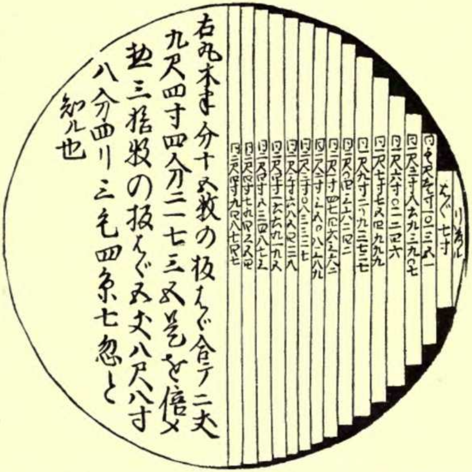
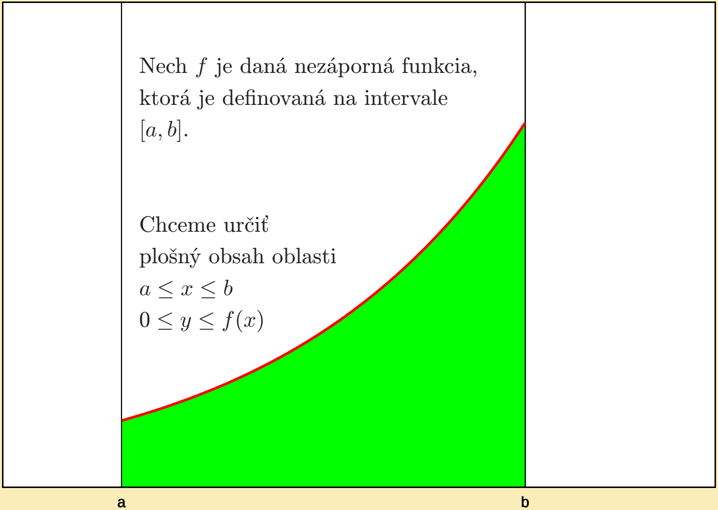


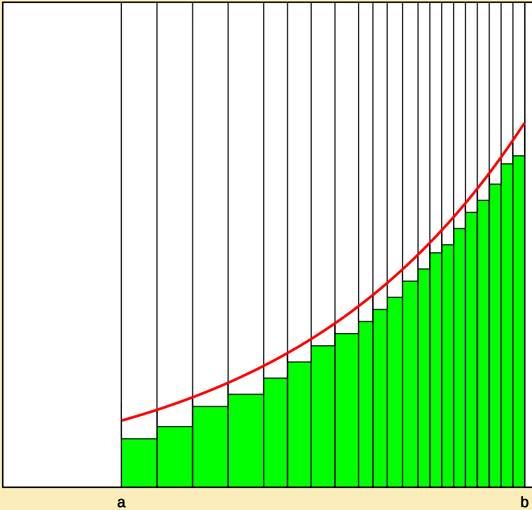
Fig. 27. Early steps in the calculus. From Sawaguchi Kazuyuki's *Kokon Sampō-ki* (1670).

Nech f je daná nezáporná funkcia, ktorá je definovaná na intervale $[a, b]$.

Chceme určiť plošný obsah oblasti
$a \leq x \leq b$
$0 \leq y \leq f(x)$



Označme ho $I(f)$.

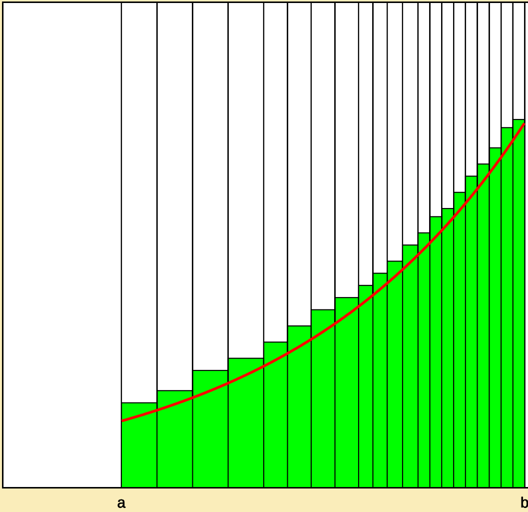


Plošný obsah $I(f)$ je väčší ako plošný obsah oblasti určenej schodovitou funkciou φ, ktorá leží pod grafom funkcie f, t.j. pre každé $x \in [a, b]$ platí $\varphi(x) \le f(x)$.

Označme ho $I(\varphi)$. Teda $I(\varphi) \le I(f)$.

Položme $\underline{I}(f) = \sup_\varphi I(\varphi)$.

Plošný obsah oblasti



Tento plošný obsah je menší ako plošný obsah oblasti určenej schodovitou funkciou ψ, ktorá leží nad grafom funkcie f, t.j. pre každé $x \in [a, b]$ platí $\psi(x) \geq f(x)$.

Označme ho $I(\psi)$. Teda $I(\psi) \geq I(f)$.

Položme $\overline{I}(f) = \inf_{\psi} I(\psi)$.

8

V prípade, že platí $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, túto spoločnú hodnotu prijmeme za definíciu veličiny $I(f)$. Píšeme

$$I(f) = \int_a^b f.$$

Supremum a infimum

Supremum množiny M bolo definované ako jej najmenšie horné ohraničenie.
Teda $\sup M$ je charakterizované nasledujúcimi vlastnosťami:

1. Pre všetky $x \in M$ platí $x \leq \sup M$.
2. Ak z je také, že pre každé $x \in M$ platí $x \leq z$, potom $\sup M \leq z$.

Pritom existujú množiny M, pre ktoré platí: $\sup M \in \{-\infty, \infty\}$.

Supremum množiny M môžeme charakterizovať aj takto:

1. Pre všetky $x \in M$ platí $x \leq \sup M$.
2. Pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $t \in M$ také, že $t > \sup M - \varepsilon$.

Infimum množiny M bolo definované ako jej najväčšie dolné ohraničenie.
Teda $\inf M$ je charakterizované nasledujúcimi vlastnosťami:

1. Pre všetky $x \in M$ platí $x \geq \inf M$.
2. Ak z je také, že pre každé $x \in M$ platí $x \geq z$, potom $\inf M \geq z$.

Pritom existujú množiny M, pre ktoré platí: $\inf M \in \{-\infty, \infty\}$.

Infimum množiny M môžeme charakterizovať aj takto:

1. Pre všetky $x \in M$ platí $x \geq \inf M$.
2. Pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $t \in M$ také, že $t < \inf M + \varepsilon$.

Úloha 1. Nájdite supremum a infimum množiny $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, kde

$$a_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\binom{n}{2}}.$$

Úloha 2. Nájdite supremum a infimum množiny $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, kde

$$a_n = (-1)^n \cdot \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n + \sin \tfrac{\pi n}{4}.$$

Úloha 3. Nájdite supremum a infimum množiny $M = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{k} : k, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Úloha 4. Nájdite supremum a infimum množiny $M = \left\{\frac{n}{n+k} : k, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Minkowského funkcionál množiny $A \subset \mathbb{R}$ definujeme predpisom

$$p_A(x) = \inf\left\{\alpha > 0 : \tfrac{x}{\alpha} \in A\right\} \text{ pre každé } x \in \mathbb{R}.$$

Úloha 5. Nájdite všetky také intervaly I, ktorých Minkowského funkcionál p_I je konečný.

Úloha 6. Nájdite taký interval I, ktorého Minkowského funkcionál je $p_I(x) = x + |x|$ pre každé reálne číslo x.

Nech I je ohraničený interval s koncovými bodmi $a \leq b$, t.j. niektorý z intervalov

$$\begin{aligned}(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},\\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},\\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},\\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.\end{aligned}$$

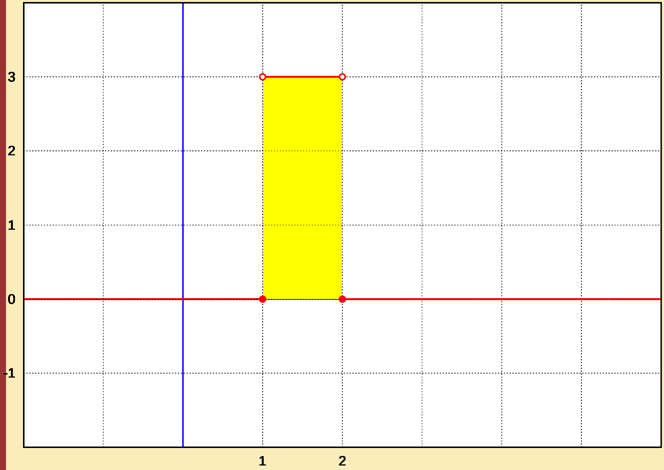
Uvažujme jednoduchú funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ určenú predpisom

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{ak } x \in I,\\ 0 & \text{ak } x \notin I.\end{cases}$$

Určitý integrál z tejto funkcie budeme definovať takto:

$$\int_a^b f = c(b - a).$$

2



$$I = (1, 2)$$
$$c = 3$$

$$f(x) = 0, \text{ ak } x \leq 1$$
$$f(x) = 3, \text{ ak } x \in (1, 2)$$
$$f(x) = 0, \text{ ak } x \geq 2$$

$$f = \chi_{(1,2)}$$

$$\int_1^2 f = 3$$

Pojem určitého integrálu rozšírime na lineárne kombinácie takýchto jednoduchých funkcií. Nech

$$-\infty < x_0 < \cdots < x_n < \infty,$$

kde n je prirodzené číslo. Potom množinu

$$P = \{x_0, \ldots, x_n\}$$

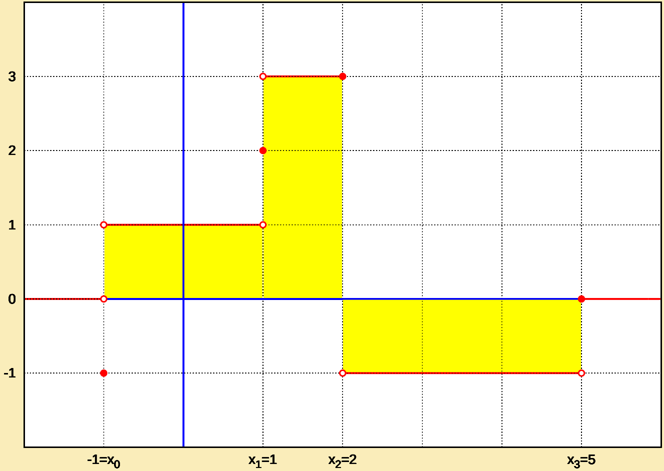
voláme delenie na množine $\mathbb{R}$. Funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa volá schodovitá funkcia, ak existuje delenie $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ a reálne čísla $c_1, \ldots, c_n$ také, že platí $f(x) = c_j$ pre každé $x \in (x_{j-1}, x_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$, pričom $f(x) = 0$ pre každé $x \notin [x_0, x_n]$.

Všimnime si, že

1) Schodovitá funkcia je spojitá v každom bode $x \notin P$.
2) Schodovitá funkcia nadobúda iba konečne veľa hodnôt. Pritom pre každé $c \neq 0$ množina $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = c\}$ je buď prázdna množina, ale konenčné zjednotenie ohraničených intervalov.

Poznamenajme, že delenie P pre danú schodovitú funkciu nie je jednoznačne určené, pretože vždy môžeme pridať ďalšie deliace body.

4

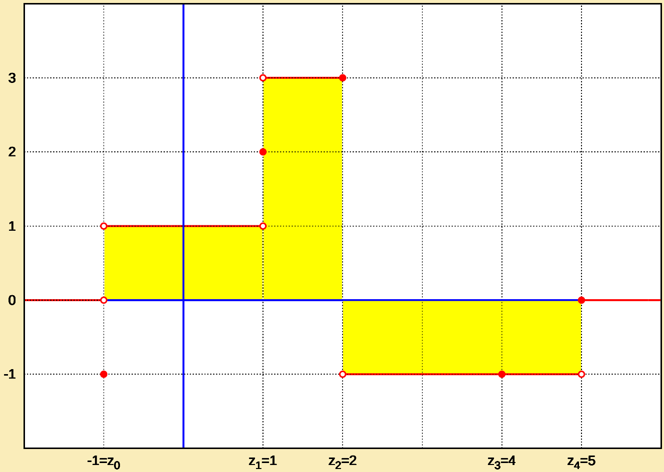


$$P_1 = \{-1, 1, 2, 5\}$$

$$x_0 = -1$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 5$$

$$c_1 = 1$$
$$c_2 = 3$$
$$c_3 = -1$$

$$f = \chi_{(-1,1)} + 3\chi_{(1,2)} - \chi_{(2,5)} - \chi_{[-1,-1]} + 2\chi_{[1,1]} + 3\chi_{[2,2]}$$



$$P_2 = \{-1, 1, 2, 4, 5\}$$

$$z_0 = -1$$
$$z_1 = 1$$
$$z_2 = 2$$
$$z_3 = 4$$
$$z_4 = 5$$
$$d_1 = 1$$
$$d_2 = 3$$
$$d_3 = -1$$
$$d_4 = -1$$

$$f = \chi_{(-1,1)} + 3\chi_{(1,2)} - \chi_{(2,4)} - \chi_{(4,5)} - \chi_{[-1,-1]} + 2\chi_{[1,1]} + 3\chi_{[2,2]} - \chi_{[4,4]}$$

Aby sme mohli schodovité funkcie vyjadriť analyticky, zavedieme pojem charakteristickej funkcie množiny. Ak $A \subset \mathbb{R}$, potom charakteristická funkcia množiny A je definovaná predpisom

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in A, \\ 0 & \text{ak } x \notin A. \end{cases}$$

Ak f je schodovitá funkcia s delením $P = \{x_0 < \cdots < x_n\}$ a $f(x) = c_j$ na intervaloch (x_{j-1}, x_j) $(j = 1, \ldots, n)$, potom túto funkciu môžeme vyjadriť v tvare

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{(x_{j-1}, x_j)} + \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \chi_{[x_k, x_k]},$$

t.j. f je lineárna kombinácia charakteristických funkcií ohraničených intervalov.

Na druhej strane, funkcia $f = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \chi_{J_k}$, kde J_k sú ohraničené intervaly a a_k sú reálne čísla $(k = 1, \ldots, m)$, je schodovitá funkcia.

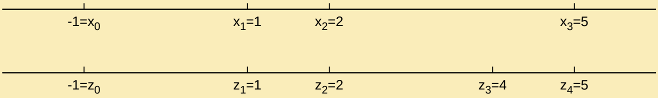
Ak f je schodovitá funkcia s delením $P_1 = \{x_0 < \cdots < x_n\}$, môžeme ju vyjadriť v tvare

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{(x_{j-1}, x_j)} + \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \chi_{[x_k, x_k]}.$$

Pridaním ďalšieho bodu do delenia P_1 vznikne nové delenie $P_2 = \{z_0 < \cdots < z_{n+1}\}$ a funkciu f môžeme vyjadriť v tvare

$$f = \sum_{j=1}^{n+1} d_j \chi_{(z_{j-1}, z_j)} + \sum_{k=0}^{n+1} f(z_k) \chi_{[z_k, z_k]}.$$

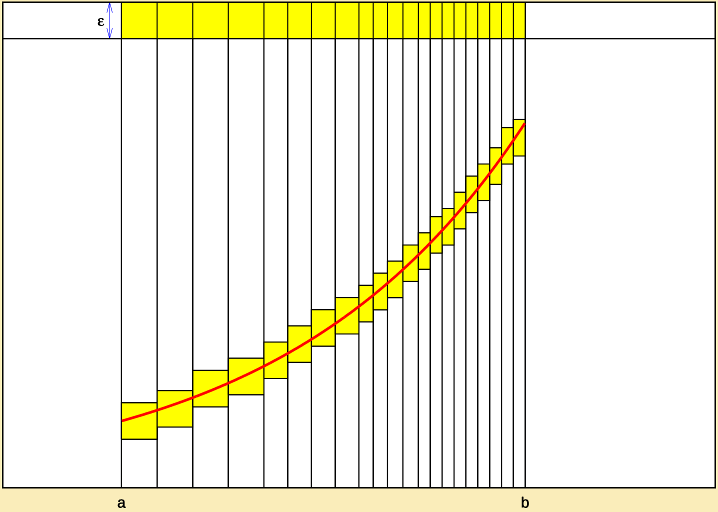
Podrobne to zdôvodnite.



Uvedený postup môžeme opakovať.

Literatúra

[1] Qian, Z., *Analysis III: Integration*, Mathematical Institute, Oxford, 2011.


ε
a
b

2

Predpokladajme, že funkcia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá.

Funkcie φ a ψ nám dovoľujú pokryť graf funkcie f konečným počtom obdĺžnikov, ktorých strany sú vertikálne alebo horizontálne. Pritom ľubovoľné dva obdĺžniky patriace do tohto pokrytia sú buď disjunktné, alebo susediace (t.j. dotýkajú sa svojimi vertikálnymi stranami).

Nech $\varepsilon > 0$. Potom pre každé $x \in [a, b]$ existuje $\delta_x > 0$ také, že pre každé $z \in [a, b]$ platí

$$x - \delta_x < z < x + \delta_x \quad \Rightarrow \quad f(x) - \varepsilon < f(z) < f(x) + \varepsilon. \tag{1}$$

Týmto spôsobom sme vytvorili systém otvorených intervalov

$$\{(x - \delta_x, x + \delta_x)\}_{x \in [a,b]}, \tag{2}$$

ktorý pokrýva interval $[a, b]$. To znamená, že platí

$$[a, b] \subset \bigcup_{x \in [a,b]} (x - \delta_x, x + \delta_x).$$

Ukážeme, že existuje jeho konečný podsystém

$$I_1 = (x_1 - \delta_{x_1}, x_1 + \delta_{x_1}), \dots, I_n = (x_n - \delta_{x_n}, x_n + \delta_{x_n}), \tag{3}$$

ktorý tiež pokrýva interval $[a, b]$, t.j. že platí

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i.$$

Nech $c \in (a, a + \delta_a)$. Pretože

$$[a, c] \subset (a - \delta_a, a + \delta_a),$$

interval $[a, c]$ možno pokryť konečným počtom intervalov patriacich do systému (2).

Teda množina Ξ všetkých takých $\xi \in [a, b]$, že interval $[a, \xi]$ možno pokryť konečným počtom intervalov patriacich do systému (2), je neprázdna. Položme

$$d = \sup \Xi.$$

Pretože $d \geq c > a$, zrejme $d \in (a, b]$.

Ukážeme, že $d = b$. Sporom. Predpokladajme, že $d < b$. Nech $\eta \in (d, d + \delta_d)$. Pretože $d - \delta_d < d = \sup \Xi$, existuje $\xi \in (d - \delta_d, d)$ také, že $\xi \in \Xi$. To znamená, že interval $[a, \xi]$ možno pokryť konečným počtom intervalov patriacich do systému (2).

K tomuto konečnému počtu intervalov patriacich do systému (2) pridáme interval $(d-\delta_d, d+\delta_d)$. Tým vznikne nový konečný systém intervalov patriacich do systému (2), ktorý pokrýva interval $[a, \eta]$. Tým sme dokázali, že $\eta \in \Xi$. Teda $\eta \leq \sup \Xi = d$, čo je spor s tým, že $\eta > d$. Tento spor dokazuje, že $d = b$, t.j. že interval $[a, b]$ možno pokryť konečným počtom intervalov patriacich do systému (2).

Môžeme predpokladať, že systém intervalov (3) je minimálny v tom zmysle, že po vynechaní ľubovoľného intervalu z tohto systému zostávajúce intervaly už nebudú pokrývať interval $[a, b]$. Tento predpoklad nám umožňuje usporiadať jednotlivé intervaly systému (3) zľava doprava, t.j. tak, aby platilo

$$a_1 < a_2 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n,$$

kde $I_k = (a_k, b_k)$, pre každé k. Z každého intervalu (a_{k+1}, b_k) vyberme bod z_k. Položme $z_0 = a$, $z_n = b$. Potom graf funkcie f môžeme pokryť obdĺžnikmi

$$R_k = [z_{k+1}, z_k] \times [f(x_k) - \varepsilon, f(x_k) + \varepsilon].$$

Posunutím týchto obdĺžnikov vo vertikálnom smere môžeme vytvoriť jeden obdĺžnik s plošným obsahom $\varepsilon(b-a)$. Pretože $\varepsilon > 0$ bolo ľubovoľné, integrovateľnosť spojitej funkcie je dokázaná.

Túto vlastnosť o pokrývaní grafu funkcie konečným počtom obdĺžnikov s ľubovoľne malým celkovým plošným obsahom možno prijať za definíciu určitého integrálu.

Definition. A function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is integrable provided for any $\varepsilon > 0$, there exists a finite collection $\{R_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ of adjacent rectangles with

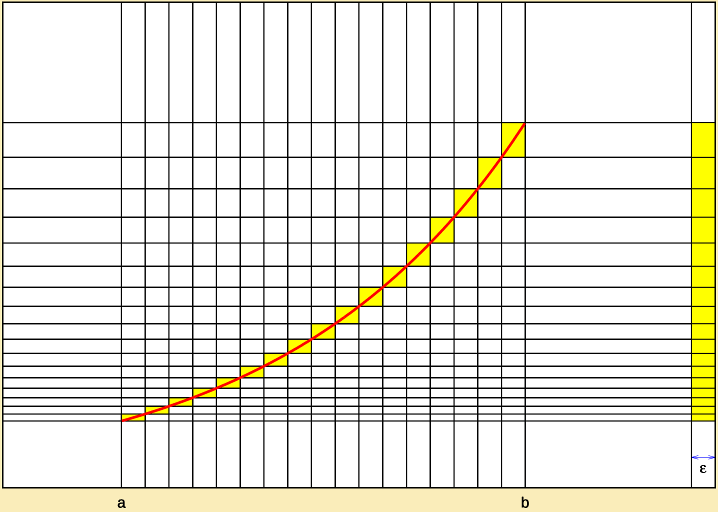
$$G(f) \subset \bigcup_{i=1}^{n} R_i$$

and such that the sum of the areas of the rectangles is less than ε.

Literatúra

[1] Lynch, M., *Advanced calculus reform: continuity and integration*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **25** (1994), 563–571.

6



Predpokladajme, že funkcia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je rastúca.

Nech $\varepsilon > 0$. Pre jednoduchosť zvolíme ε v tvare $\varepsilon = \frac{b-a}{n}$, kde n je prirodzené číslo. To nám umožňuje definovať delenie intervalu $[a, b]$ nasledujúcim spôsobom:

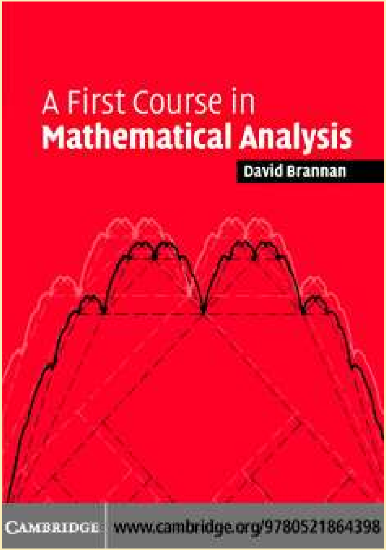
$$z_k = a + k\varepsilon \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Potom graf funkcie f môžeme pokryť obdĺžnikmi tvaru

$$R_i = [z_{i-1}, z_i] \times [f(z_{i-1}), f(z_i)].$$

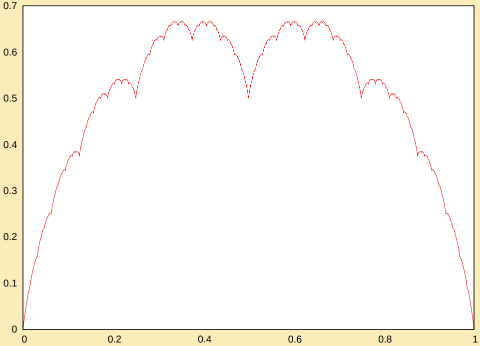
Posunutím týchto obdĺžnikov v horizontálnom smere môžeme vytvoriť jeden obdĺžnik s plošným obsahom $\varepsilon|f(b) - f(a)|$. Pretože n bolo ľubovoľné prirodzené číslo, integrovateľnosť rastúcej funkcie je dokázaná.

Spojitá funkcia, ktorá nie je monotónna na žiadnom intervale

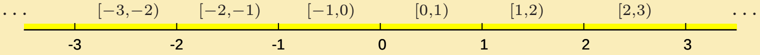


Brannan, D.: A First Course
in Mathematical Analysis,
Cambridge University Press, 2006.

THE BLANCMANGE FUNCTION
Teiji Takagi, 1903



Celá časť reálneho čísla



Intervaly tvaru $[k, k+1)$, kde k je ľubovoľné celé číslo, tvoria rozklad množiny všetkých reálnych čísel. Teda pre každé reálne číslo x existuje práve jedno celé číslo n také, že

$$n \leq x < n+1.$$

Číslo n voláme *dolná celá časť* reálneho čísla x a označujeme ho symbolom $\lfloor x \rfloor$.

Analogicky, intervaly tvaru $(k, k+1]$, kde k je ľubovoľné celé číslo, tvoria rozklad množiny všetkých reálnych čísel. Teda pre každé reálne číslo x existuje práve jedno celé číslo m také, že

$$m < x \leq m+1.$$

Číslo m voláme *horná celá časť* reálneho čísla x a označujeme ho symbolom $\lceil x \rceil$.

Zlomková časť reálneho čísla x sa definuje predpisom

$$\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor.$$

Všimnime si, že ak m je celé číslo, potom $\lfloor m \rfloor = m$, teda $\langle m \rangle = m - m = 0$.

Literatúra

[1] Odvárko, O., Ryšánková, M., *Matematika pre 2. ročník gymnázia. Funkcie II*, SPN, Bratislava, 1985.

Príklad 2

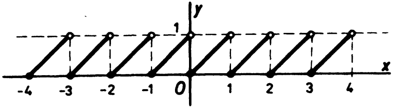
Načrtnime graf funkcie m: $y = x - [x]$.

Riešenie: Vypíšeme si najprv niekoľko dvojíc, ktoré patria do grafu funkcie m:

x	-1	$-0,8$	$-0,6$	$-0,5$	$-0,1$	0	$0,2$	$0,4$	$0,5$	$0,9$	1	$1,2$
$[x]$	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	1
$x-[x]$	0	$0,2$	$0,4$	$0,5$	$0,9$	0	$0,2$	$0,4$	$0,5$	$0,9$	0	$0,2$

Už z tejto tabuľky môžeme súdiť, že hodnoty funkcie $y = x - [x]$ sa periodicky opakujú.

Graf funkcie je na obrázku 1.11.



Obr. 1.11

4

Definujme funkciu f_0 predpisom

$$f_0(x) = \tfrac{1}{2} - \left|\langle x\rangle - \tfrac{1}{2}\right|$$

pre každé reálne číslo x. Všimnime si, že ak k je celé číslo, potom $\langle k\rangle = 0$, teda $f_0(k) = 0$.

Pre každé prirodzené číslo m definujme funkciu f_m predpisom

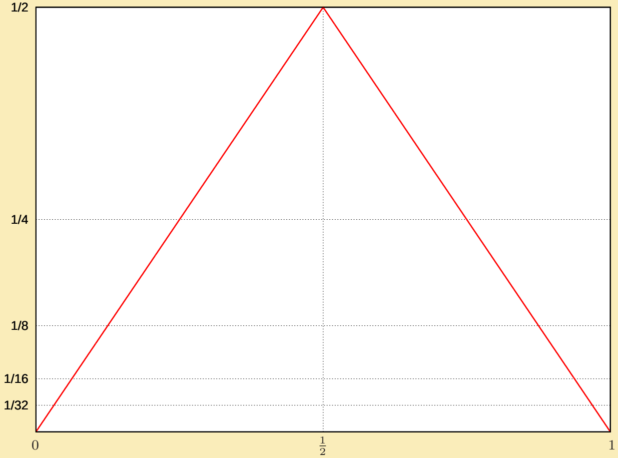
$$f_m(x) = 2^{-m} f_0(2^m x)$$

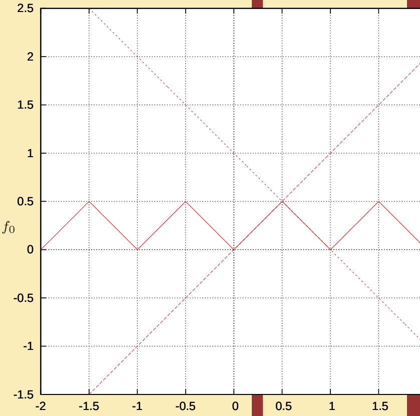
pre každé reálne číslo x. Názornú predstavu o grafoch týchto funkcií si môžeme vytvoriť pomocou nasledujúcich obrázkov.

Funkciu f definujme predpisom

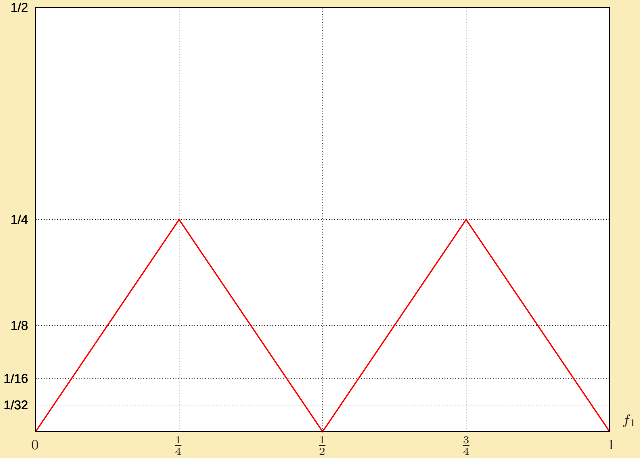
$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x)$$

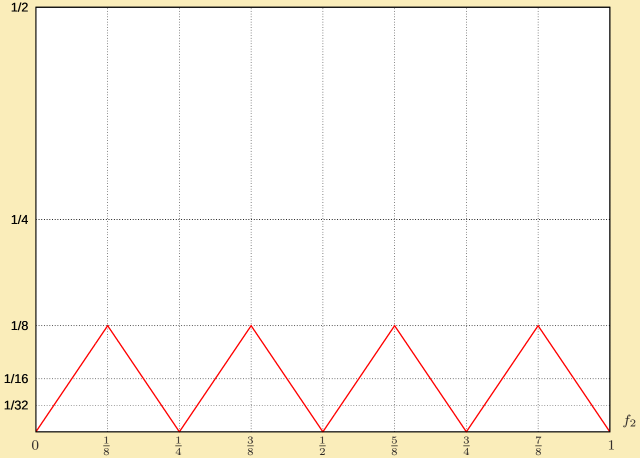
pre každé reálne číslo x.


1/2
1/4
1/8
1/16
1/32
0
$\frac{1}{2}$
1

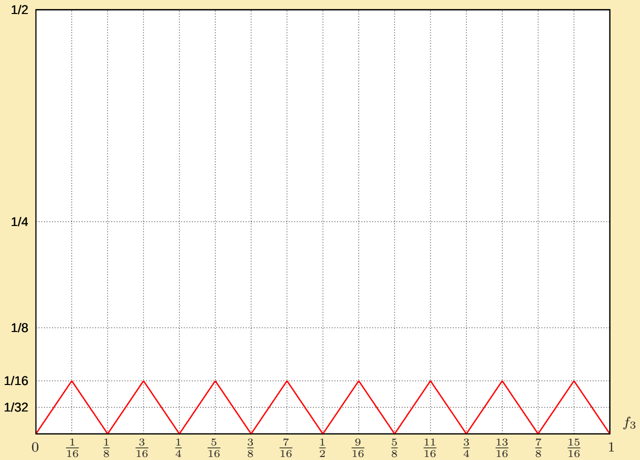

2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
f_0
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

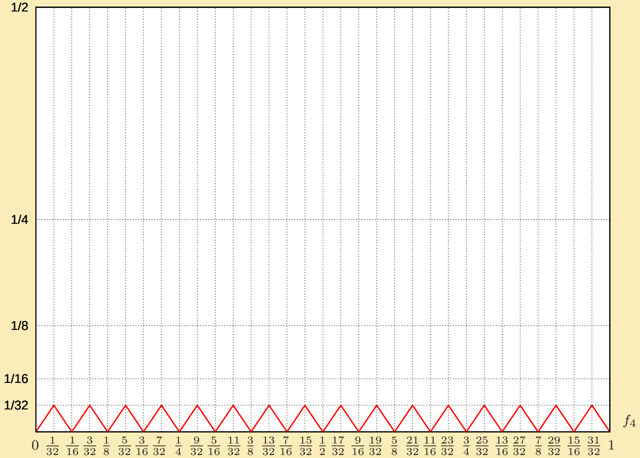
6




1/2
1/4
1/8
1/16
1/32
0
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{5}{8}$
$\frac{3}{4}$
$\frac{7}{8}$
1
f_2

8


1/2
1/4
1/8
1/16
1/32
0
1/16
1/8
3/16
1/4
5/16
3/8
7/16
1/2
9/16
5/8
11/16
3/4
13/16
7/8
15/16
1
f_3



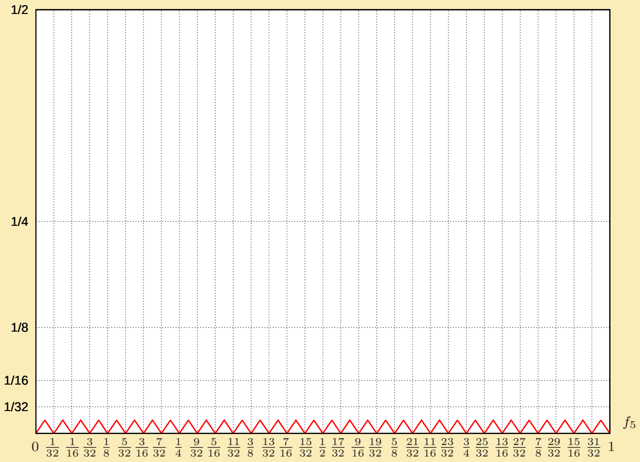
1/2
1/4
1/8
1/16
1/32
f_4
0 1/32 1/16 3/32 1/8 5/32 3/16 7/32 1/4 9/32 5/16 11/32 3/8 13/32 7/16 15/32 1/2 17/32 9/16 19/32 5/8 21/32 11/16 23/32 3/4 25/32 13/16 27/32 7/8 29/32 15/16 31/32 1

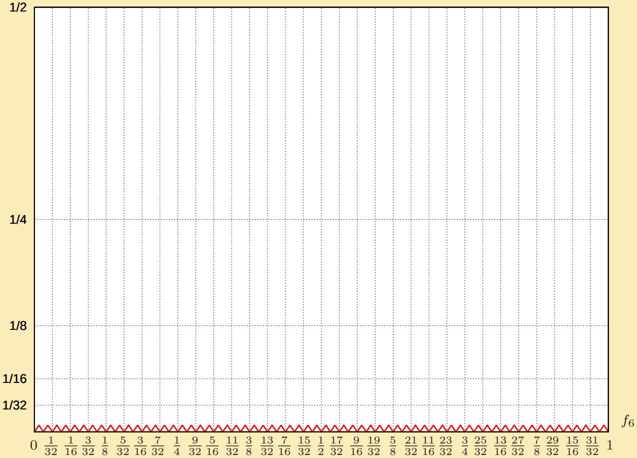
$f_0(x) = \frac{1}{2} - |\langle x \rangle - \frac{1}{2}|$

Definície

$f_m(x) = 2^{-m} f_0(2^m x)$

10




1/2
1/4
1/8
1/16
1/32
f_6
0 $\frac{1}{32}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{3}{32}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{5}{32}$ $\frac{3}{16}$ $\frac{7}{32}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{9}{32}$ $\frac{5}{16}$ $\frac{11}{32}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{13}{32}$ $\frac{7}{16}$ $\frac{15}{32}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{17}{32}$ $\frac{9}{16}$ $\frac{19}{32}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{21}{32}$ $\frac{11}{16}$ $\frac{23}{32}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{25}{32}$ $\frac{13}{16}$ $\frac{27}{32}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{29}{32}$ $\frac{15}{16}$ $\frac{31}{32}$ 1

V každom neprázdnom otvorenom intervale $I \subset [0,1]$ ležia body tvaru

$$x_{k,n} = \frac{k}{2^n},$$

kde k a n sú prirodzené čísla, pričom $k < 2^n$. Dokážte.

Ľahko vidieť, že platí

$$f_n(x_{k,n}) = 2^{-n} f_0(2^n x_{k,n}) = 2^{-n} f_0(2^n \cdot \tfrac{k}{2^n}) = 2^{-n} f_0(k) = 0.$$

Analogicky, pre $m \geq n$ platí

$$f_m(x_{k,n}) = 2^{-m} f_0(2^m x_{k,n}) = 2^{-m} f_0(2^{m-n} k).$$

Pretože $2^{m-n}k$ je celé číslo, platí $f_0(2^{m-n}k) = 0$. Teda

$$f_m(x_{k,n}) = 2^{-m} f_0(2^{m-n} k) = 0.$$

Odtiaľ vyplýva, že platí

$$f(x_{k,n}) = \sum_{m=0}^{n-1} f_m(x_{k,n}).$$

Pre $j > n$ uvažujme body

$$a_{k,n,j} = x_{k,n} - \frac{1}{2^j}, \qquad b_{k,n,j} = x_{k,n} + \frac{1}{2^j}.$$

Predpoklad $j > n$ nám zaručuje, že čísla $a_{k,n,j}$ a $b_{k,n,j}$ ležia v intervale $(0, 1)$. Dokážte to.

Pretože

$$a_{k,n,j} = \frac{k}{2^n} - \frac{1}{2^j} = \frac{2^{j-n}k - 1}{2^j} = x_{u,j}, \qquad b_{k,n,j} = \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^j} = \frac{2^{j-n}k + 1}{2^j} = x_{v,j},$$

platí

$$f(a_{k,n,j}) = \sum_{m=0}^{j-1} f_m(a_{k,n,j}), \qquad f(b_{k,n,j}) = \sum_{m=0}^{j-1} f_m(b_{k,n,j}).$$

Pozrime sa na hodnoty $f_m(a_{k,n,j})$ pre $m = 0, 1, \dots, j-1$.

Najskôr predpokladajme, že $m \in \{n, \dots, j-1\}$. Potom

$$f_m(a_{k,n,j}) = 2^{-m} f_0(2^m a_{k,n,j}) = 2^{-m} f_0(2^{m-n}k - 2^{m-j}).$$

$x_{k,n} = \frac{k}{2^n}$

Pretože $2^{m-n}k$ je celé číslo a $0 < 2^{m-j} < 1$, platí

$$\left\langle 2^{m-n}k - 2^{m-j} \right\rangle = 1 - 2^{m-j}.$$

Pretože $\frac{1}{2} \geq 2^{m-j}$, máme

$$f_0(2^{m-n}k - 2^{m-j}) = \tfrac{1}{2} - \left|\left\langle 2^{m-n}k - 2^{m-j} \right\rangle - \tfrac{1}{2}\right| = \tfrac{1}{2} - \left|\left(1 - 2^{m-j}\right) - \tfrac{1}{2}\right| = 2^{m-j}.$$

Preto

$$f_m(a_{k,n,j}) = 2^{-m} f_0(2^{m-n}k - 2^{m-j}) = \frac{1}{2^j}.$$

Teraz predpokladajme, že $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
Položme

$$s = \left\lceil 2^{m+1} x_{k,n} \right\rceil.$$

Potom platí

$$s < 2^{m+1} x_{k,n} \leq s + 1, \quad \text{odkiaľ} \quad \frac{s}{2} < 2^m x_{k,n} \leq \frac{s+1}{2}.$$

$x_{k,n} = \frac{k}{2^n}$

$a_{k,n,j} = x_{k,n} - \frac{1}{2^j}$

Ukážeme, že platí

$$\frac{s}{2} < 2^m a_{k,n,j} < 2^m x_{k,n} \leq \frac{s+1}{2}.$$

Z nerovnosti

$$s < 2^{m+1} x_{k,n} = \frac{2^{m+1} k}{2^n}$$

dostávame

$$2^{n-1-m} s < k.$$

Pretože $m \leq n-1$, číslo na ľavej strane tejto nerovnosti je celé. Pretože ide o nerovnosť medzi celými číslami, odtiaľ dostávame

$$2^{n-1-m} s + 1 \leq k.$$

Po malej úprave

$$\frac{s}{2^{m+1}} \leq \frac{k}{2^n} - \frac{1}{2^n} = x_{k,n} - \frac{1}{2^n}.$$

$x_{k,n} = \frac{k}{2^n}$

$a_{k,n,j} = x_{k,n} - \frac{1}{2^j}$

$s < 2^{m+1} x_{k,n} \leq s + 1$

Odtiaľ vyplýva, že pre každé $j > n$ platí

$$\frac{s}{2^{m+1}} < x_{k,n} - \frac{1}{2^j} = a_{k,n,j}.$$

Teda

$$\frac{s}{2} < 2^m a_{k,n,j}.$$

Tým je prvá z nasledujúcich nerovostí

$$\frac{s}{2} < 2^m a_{k,n,j} < 2^m x_{k,n} \leq \frac{s+1}{2}$$

dokázaná. Ostané sú zrejmé. Premyslite si to.

Pretože s je celé číslo, funkcia f_0 je na intervale $\left(\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}\right]$ lineárna, pričom jej smernica je ± 1. Teda

$$\left| \frac{f_0(2^m x_{k,n}) - f_0(2^m a_{k,n,j})}{2^m x_{k,n} - 2^m a_{k,n,j}} \right| = 1,$$

t.j.

$$\frac{|f_0(2^m x_{k,n}) - f_0(2^m a_{k,n,j})|}{2^{m-j}} = 1.$$

$x_{k,n} = \frac{k}{2^n}$

$a_{k,n,j} = x_{k,n} - \frac{1}{2^j}$

$s < 2^{m+1} x_{k,n} \leq s+1$

Potom

$$|f_m(x_{k,n}) - f_m(a_{k,n,j})| = \left|2^{-m} f_0(2^m x_{k,n}) - 2^{-m} f_0(2^m a_{k,n,j})\right| = 2^{-j}.$$

Odtiaľ

$$f_m(a_{k,n}) - f_m(a_{k,n,j}) \leq |f_m(a_{k,n}) - f_m(a_{k,n,j})| = 2^{-j},$$

čo po úprave dáva

$$f_m(a_{k,n,j}) \geq f_m(x_{k,n}) - \frac{1}{2^j}.$$

Keď to zhrnieme, dostávame

$$\begin{aligned} f_m(a_{k,n,j}) &= \frac{1}{2^j}, && \text{ak} \quad j > m \geq n, \\ f_m(a_{k,n,j}) &\geq f_m(x_{k,n}) - \frac{1}{2^j}, && \text{ak} \quad j > n > m \geq 0. \end{aligned}$$

$x_{k,n} = \frac{k}{2^n}$

$a_{k,n,j} = x_{k,n} - \frac{1}{2^j}$

Potom

$$f(a_{k,n,j}) = \sum_{m=0}^{j-1} f_m(a_{k,n,j}) = \sum_{m=0}^{n-1} f_m(a_{k,n,j}) + \sum_{m=n}^{j-1} f_m(a_{k,n,j}) \geq$$

$$\geq \sum_{m=0}^{n-1} \left(f_m(x_{k,n}) - \frac{1}{2^j} \right) + \sum_{m=n}^{j-1} \frac{1}{2^j} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} f_m(x_{k,n}) - \frac{n}{2^j} + \frac{j-n}{2^j} =$$

$$= f(x_{k,n}) + \frac{j-2n}{2^j}.$$

Stačí zvoliť $j > 2n$ také, aby platilo $a_{k,n,j} \in I$. Potom budeme mať

$$f(a_{k,n,j}) > f(x_{k,n}).$$

Analogicky sa dá ukázať, že platí

$$f(b_{k,n,j}) > f(x_{k,n}).$$

Overte to.

Odtiaľ vyplýva, že funkcia f nie je monotónna na intervale I.

$x_{k,n} = \frac{k}{2^n}$

$a_{k,n,j} = x_{k,n} - \frac{1}{2^j}$

Monotónna funkcia s hustou množinou bodov nespojitosti

Nech A je nekonečná spočítateľná podmnožina intervalu $(0,1)$ (napr. $A=\mathbb{Q}$). Potom ju môžeme vyjadriť v tvare $A=\{a_1,a_2,a_3,\dots\}$. Pre každé prirodzené číslo n definujeme funkciu f_n predpisom

$$f_n(x)=\frac{1}{2^n}\cdot\chi_{(a_n,1]}(x).$$

Podľa Weierstraßovho kritéria rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje rovnomerne. Položme

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Potom funkcia f je neklesajúca a nespojitá v každom bode množiny A.

Neklesajúcosť funkcie f vyplýva z toho, že každá z funkcií f_n je neklesajúca.

Nech n je prirodzené číslo. Nech $x\in(a_n,1]$. Pretože $f_n(a_n)=0$ a $f_n(x)=\frac{1}{2^n}$, máme

$$f_n(a_n)+\frac{1}{2^n}=f_n(x).$$

20

Pretože funkcie f_i sú neklesajúce, pre každé $k \geqq n$ platí

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(a_n) + \frac{1}{2^n} \leqq \sum_{i=1}^{k} f_i(x).$$

Pre $k \to \infty$ odtiaľ dostávame

$$f(a_n) + \frac{1}{2^n} \leqq f(x).$$

Tým sme ukázali, že funkcia f nie je spojitá v bode a_n.

Lema 1. *Ak f, g sú dve schodovité funkcie, potom pre ne existuje spoločné delenie $P = \{x_0 < \cdots < x_n\}$ také, že*

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{(x_{j-1},x_j)} + \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\chi_{[x_i,x_i]},$$
$$g = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{(x_{j-1},x_j)} + \sum_{i=0}^{n} g(x_i)\chi_{[x_i,x_i]},$$

kde a_j, b_j sú reálne čísla.

Dôkaz. Nech f je schodovitá funkcia s delením P_1. Nech g je schodovitá funkcia s delením P_2. Potom množina $P = P_1 \cup P_2$ je spoločné delenie pre obidve tieto funkcie.

Množinu všetkých schodovitých funkcií označme symbolom $\mathcal{L}_{\text{step}}$.

Lema 2. *Množina $\mathcal{L}_{\text{step}}$ je vektorový priestor so sčítaním funkcií a násobením funkcií reálnymi číslami.*

Dokážte. Je to užitočné cvičenie na vektorové priestory.

Lema 3.

1) Množina $\mathcal{L}_{\text{step}}$ je algebra: ak f, g sú dve schodovité funkcie, taký je aj ich súčin fg.

2) Ak f je schodovitá funkcia a F funkcia definovaná na množine $\mathbb{R}$ taká, že $F(0) = 0$, potom $F \circ f$ je znova schodovitá funkcia.

Dôkaz.

1) Vzhľadom na lemu 1 môžeme vybrať spoločné delenie $P = \{x_0 < \cdots < x_n\}$ také, že

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{(x_{j-1}, x_j)} + \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \chi_{[x_i, x_i]}$$

a

$$g = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{(x_{j-1}, x_j)} + \sum_{i=0}^{n} g(x_i) \chi_{[x_i, x_i]}.$$

Potom

$$fg = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \chi_{(x_{j-1}, x_j)} + \sum_{i=0}^{n} f(x_i) g(x_i) \chi_{[x_i, x_i]}.$$

2) Skutočne, ak f má reprezentáciu

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{(x_{j-1}, x_j)} + \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \chi_{[x_i, x_i]},$$

potom

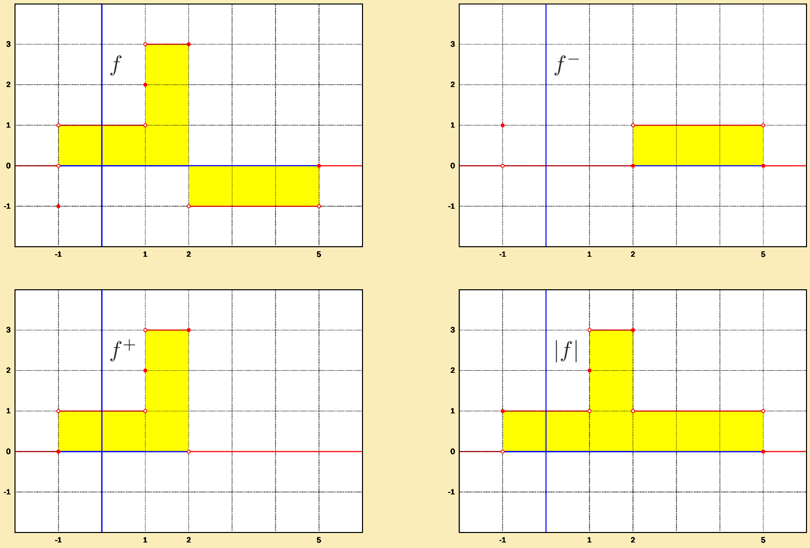
$$F \circ f = \sum_{j=1}^{n} F(a_j) \chi_{(x_{j-1}, x_j)} + \sum_{i=0}^{n} (F \circ f)(x_i) \chi_{[x_i, x_i]}.$$

Kde sme použili predpoklad $F(0) = 0$?

Lema 4.

1) *Množina $\mathcal{L}_{\text{step}}$ je uzavretá vzhľadom na zväzové operácie $\vee$ a $\wedge$. Pripomeňme si, že $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ a $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Ak f, g sú schodovité funkcie, potom také sú aj funkcie $f \vee g$ a $f \wedge g$.*
2) *Ak f je schodovitá funkcia, potom $f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f) \vee 0$ a $|f| = f^+ + f^-$ sú schodovité funkcie.*

4



Dôkaz. Podľa lemy 1 môžeme písať

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{(x_{j-1},x_j)} + \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\chi_{[x_i,x_i]}$$

a

$$g = \sum_{i=1}^{n} b_j \chi_{(x_{j-1},x_j)} + \sum_{i=0}^{n} g(x_i)\chi_{[x_i,x_i]},$$

kde $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ je spoločné delenie. Potom

$$f \vee g = \sum_{j=1}^{n} (a_j \vee b_j)\chi_{(x_{j-1},x_j)} + \sum_{i=0}^{n} (f \vee g)(x_i)\chi_{[x_i,x_i]}$$

je schodovitá funkcia.

Doplňte zostávajúce časti dôkazu.

Definícia 5. Ak f je schodovitá funkcia taká, že

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{(x_{j-1},x_j)} + \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \chi_{[x_k,x_k]}.$$

Potom jej integrál definujeme predpisom

$$I(f) = \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1}).$$

Ukážte, že $I(f)$ nezávisí na výbere konečného delenia $P = \{x_0 < \cdots < x_n\}$. Teda zobrazenie $I : \mathcal{L}_{\text{step}} \to \mathbb{R}$ je dobre definované.

Ak $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{J_k}$, kde J_k sú po dvoch disjunktné ohraničené intervaly, potom

$$I(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k \ell(J_k),$$

kde $\ell(J_k)$ označuje dĺžku intervalu J_k.

Veta 6. *Zobrazenie $I : \mathcal{L}_{\text{step}} \to \mathbb{R}$ má nasledujúce vlastnosti:*

1) *Zobrazenie I je lineárne: $I(\lambda f + \mu g) = \lambda I(f) + \mu I(g)$ pre ľubovoľné $f, g \in \mathcal{L}_{\text{step}}$ a ľubovoľné reálne čísla λ, μ.*
2) *$I(\chi_J) = \ell(J)$, ak J je ohraničený interval.*
3) *Zobrazenie I zachováva nezápornosť: ak $f \in \mathcal{L}_{\text{step}}$ a $f \geq 0$, potom $I(f) \geq 0$.*

Dôkaz. Najskôr dokážeme 1). Vyberme spoločné delenie $P = \{x_0 < \cdots < x_n\}$ také, že

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{(x_{j-1}, x_j)} + \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \chi_{[x_i, x_i]},$$

$$g = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{(x_{j-1}, x_j)} + \sum_{i=0}^{n} g(x_i) \chi_{[x_i, x_i]}.$$

Potom

$$\lambda f + \mu g = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_j + \mu b_j) \chi_{(x_{j-1}, x_j)} + \sum_{i=0}^{n} (\lambda f + \mu g)(x_i) \chi_{[x_i, x_i]},$$

8

$$
\begin{aligned}
I(\lambda f + \mu g) &= \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_j + \mu b_j)(x_j - x_{j-1}) \\
&= \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j(x_j - x_{j-1}) + \mu \sum_{j=1}^{n} b_j(x_j - x_{j-1}) = \lambda I(f) + \mu I(g).
\end{aligned}
$$

Vlastnosť 2) je zrejmá z definície integrálu schodovitej funkcie.
Ak $f \geq 0$, potom $a_j \geq 0$ pre všetky $j = 1, \ldots, n$, teda

$$
I(f) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x_j - x_{j-1}) \geq 0,
$$

čo dokazuje 3).

Jean Gaston Darboux

GASTON DARBOUX

Mémoire sur les fonctions discontinues

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2^e série, tome 4 (1875), p. 57-112.

Considérons la somme

$$\Sigma = \delta_1 f(a + \theta_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \theta_2 \delta_2) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \theta_n \delta_n).$$

Il est clair qu'elle dépend à la fois du choix des intervalles δ et des quantités θ. Examinons d'abord comment elle varie quand on donne aux θ tous les systèmes possibles de valeurs.

Désignons par M_i, m_i les limites maxima et minima de la fonction dans le $i^{ième}$ intervalle. Le terme $\delta_i f(x_i + \theta_{i+1} \delta_{i+1})$ demeurera compris lorsque θ_{i+1} variera entre $\delta_i M_i$ et $\delta_i m_i$, et il s'approchera autant qu'on le voudra de l'une ou de l'autre de ces quantités. Donc la somme Σ demeurera comprise entre les deux sommes

$$M = \delta_1 M_1 + \ldots + \delta_n M_n,$$
$$m = \delta_1 m_1 + \ldots + \delta_n m_n,$$

dont elle pourra s'approcher autant qu'on voudra.

Riemannov–Darbouxov integrál

Nech je pevne daný ohraničený interval $[a,b]$. Budeme uvažovať iba reálne funkcie f, ktoré sú ohraničené na intervale $[a,b]$.

Delenie P intervalu $[a,b]$ je množina $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bodov intervalu $[a,b]$ s vlastnosťou

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Nech f je daná funkcia, ktorá je definovaná na intervale $[a,b]$, pričom platí

$$m \le f(x) \le M$$

pre všetky $x \in [a,b]$. Pre každé $i = 1, 2, \dots, n$ položme

$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} < x < x_i\},$$
$$M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} < x < x_i\}.$$

Dolný súčet $L(f,P)$ a horný súčet $U(f,P)$ pre funkciu f a delenie P definujeme takto:

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Všimnime si, že $L(f,P) = \displaystyle\int_a^b \varphi$ a $U(f,P) = \displaystyle\int_a^b \psi$, kde φ a ψ sú schodovité funkcie

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} m_j \chi_{(x_{j-1},x_j)} + \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\chi_{[x_k,x_k]},$$

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} M_j \chi_{(x_{j-1},x_j)} + \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\chi_{[x_k,x_k]}.$$

Pre tieto funkcie platí $\varphi \le f \le \psi$ na intervale $[a,b]$.

Funkcia f sa volá integrovateľná, ak

$$\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P). \tag{1}$$

Integrál funkcie f na intervale $[a,b]$ je spoločná hodnota výrazov v (1) a označuje sa

$$\int_a^b f.$$

Plošný obsah množiny

$$S = \{(x,y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

je definovaný pomocou tohto integrálu za predpokladu, že funkcia f je integrovateľná a nezáporná.

Lower sum

Upper sum

Nech $a < b$ sú dve reálne čísla. Chceme definovať integrály pre funkcie definované na intervale (a, b).

Ak $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia, potom f možno rozšíriť na funkciu definovanú na množine $\mathbb{R}$ takým spôsobom, že jej hodnoty budú rovné nule pre $x \geq b$ alebo $x \leq a$, t.j. definujeme $f\chi_{(a,b)}$ tak, že $f\chi_{(a,b)} = f$ na (a, b) a $f\chi_{(a,b)} = 0$ pre $x \geq b$ alebo $x \leq a$. Definujeme dolný integrál funkcie f na intervale (a, b) predpisom

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{I(\varphi) : \varphi \in \mathcal{L}_{\text{step}}, \varphi \leq f\chi_{(a,b)}\}$$

a horný integrál funkcie f na intervale (a, b) predpisom

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{I(\psi) : \psi \in \mathcal{L}_{\text{step}}, \psi \geq f\chi_{(a,b)}\}.$$

1. Predpokladajme, že f je ohraničená zhora konštantou M na intervale (a, b): $f(x) \leq M$ pre každé $x \in (a, b)$. Potom $M\chi_{(a,b)} \geq f\chi_{(a,b)}$ a teda

$$\overline{\int_a^b} f \leq I(M\chi_{(a,b)}) \leq M(b - a).$$

Podobne, ak m je dolné ohraničenie funkcie f na intervale (a, b), potom

$$\underline{\int_a^b} f \geq m(b-a).$$

Teda pre ohraničenú funkciu f na intervale (a, b) horný a dolný integrál existujú a sú konečné.

2. Vzhľadom na definíciu infima a suprema, pre každé $\varepsilon > 0$ existujú dve schodovité funkcie φ a ψ také, že $\varphi \leq f\chi_{(a,b)} \leq \psi$, pričom

$$I(\varphi) \leq \underline{\int_a^b} f \leq I(\varphi) + \varepsilon \quad \text{a} \quad I(\psi) - \varepsilon \leq \overline{\int_a^b} f \leq I(\psi).$$

3. Ak φ a ψ sú dve schodovité funkcie také, že $\varphi \leq f\chi_{(a,b)} \leq \psi$ (odkiaľ vyplýva, že $\varphi(x) \leq 0$ a $\psi(x) \geq 0$ pre $x \geq b$ alebo $x \leq a$), potom

$$I(\varphi) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq I(\psi). \tag{1}$$

Definícia 1. Ohraničená funkcia f na intervale (a,b) je Riemannovsky integrovateľná, ak

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f. \tag{2}$$

Táto spoločná hodnota sa označuje $\int_a^b f$ a volá sa Riemannov integrál funkcie f na intervale (a,b).

Príklad 2. 1) Ak φ je schodovitá funkcia, potom φ je Riemannovsky integrovateľná a $\int_a^b \varphi = I(\varphi\chi_{(a,b)})$.

2) Položme $f(x) = 1$, ak x je racionálne a $f(x) = -1$ v opačnom prípade. Potom $\underline{\int_0^1} f = -1$ a $\overline{\int_0^1} f = 1$, teda f nie je Riemannovsky integrovateľná. Skutočne, $f\chi_{(0,1)} \leq \chi_{(0,1)}$, teda $\overline{\int_0^1} f \leq 1$. Na druhej strane, predpokladajme, že $\psi \geq f$ na $(0,1)$, kde ψ je schodovitá funkcia s delením

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1,$$

pričom $f(x) = c_j$ na intervale (x_{j-1}, x_j), kde c_j sú konštanty. Pretože $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$, musí byť $c_j \geq 1$ pre všetky $j = 1, \ldots, n$. Teda

$$I(\psi) = \sum c_j(x_j - x_{j-1}) \geq \sum (x_j - x_{j-1}) = 1,$$

odkiaľ $\overline{\int_0^1} f \geq 1$ a tak $\overline{\int_0^1} f = 1$. Podobne môžeme ukázať, že $\underline{\int_0^1} f = -1$. Na druhej strane, $|f| = 1$, teda $|f|$ je Riemannovsky integrovateľná na intervale $(0, 1)$. Poznamenajme, že f nie je spojitá v žiadnom bode, ale $|f|$ je spojitá v každom bode intervalu $(0, 1)$.
Inou zaujímavou funkciou je nasledujúca modifikácia Dirichletovej funkcie: $g(x) = 0$, ak x je iracionálne číslo a $g(x) = \frac{1}{p+q}$, ak $x \in (0, 1)$ je racionálne číslo, pričom $x = \frac{p}{q}$ je vyjadrené v základnom tvare. Funkcia g je spojitá v iracionálnych číslach, ale nespojitá v racionálnych. Možno ukázať, že g je Riemannovsky integrovateľná na intervale $(0, 1)$ a $\int_0^1 g = 0$.

Lema 3. *Nech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia. Potom f je Riemannovsky integrovateľná na intervale (a, b) práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existujú dve schodovité funkcie φ a ψ také, že $\varphi \leq f\chi_{(a,b)} \leq \psi$ a $I(\psi - \varphi) < \varepsilon$. Okrem toho, $0 \leq \int_a^b f - I(\varphi) < \varepsilon$ a $0 \leq I(\psi) - \int_a^b f < \varepsilon$.*

Dôkaz. Ak φ a ψ sú dve schodovité funkcie také, že $\varphi \leq f\chi_{(a,b)} \leq \psi$, potom

$$\overline{\int_a^b} f \leq I(\psi) \quad \text{a} \quad \underline{\int_a^b} f \geq I(\varphi),$$

teda

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq I(\psi - \varphi),$$

čo implikuje postačujúcosť.

Na druhej strane, pre každé $\varepsilon > 0$ existujú schodovité funkcie φ a ψ také, že

$$I(\psi) \geq \overline{\int_a^b} f > I(\psi) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad I(\varphi) \leq \underline{\int_a^b} f < I(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2},$$

teda

$$I(\psi - \varphi) \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f + \varepsilon,$$

čo dáva nutnosť.

Veta 4. *Ak $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá, potom f je Riemannovsky integrovateľná.*

Dôkaz. Pripomeňme si, že spojitá funkcia definovaná na ohraničenom uzavretom intervale je rovnomerne spojitá. Teda pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že platí $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ pre ľubovoľné $x, y \in (a,b)$ také, že $|x-y| < \delta$. Nech n je také prirodzené číslo, že $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{b-a}$. Položme $x_j = a + j \cdot \frac{b-a}{n}$ pre každé $j = 0, \dots, n$. Potom $P = \{x_0 < \cdots < x_n\}$ je delenie intervalu $[a,b]$. Položme

$$m_j = \inf\{f(x) : x \in (x_{j-1}, x_j)\} \quad \text{a} \quad M_j = \sup\{f(x) : x \in (x_{j-1}, x_j)\}.$$

Potom (z rovnomernej spojitosti)

$$f(x) < f(y) + \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall x, y \in (x_{j-1}, x_j).$$

Odtiaľ dostávame, že platí

$$M_j = \sup\{f(x) : x \in (x_{j-1}, x_j)\} \le f(y) + \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall y \in (x_{j-1}, x_j),$$

t.j.

$$M_j - \frac{\varepsilon}{b-a} \le f(y) \quad \forall y \in (x_{j-1}, x_j).$$

2

Odtiaľ dostávame, že platí

$$M_j - \frac{\varepsilon}{b-a} \leq \inf\{f(y) : x \in (x_{j-1}, x_j)\} = m_j,$$

t.j.

$$M_j - m_j \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Zostrojíme dve schodovité funkcie

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} m_j \chi_{(x_{j-1},x_j)} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\chi_{[x_i,x_i]}$$

a

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} M_j \chi_{(x_{j-1},x_j)} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\chi_{[x_i,x_i]}.$$

Potom $\varphi \le f\chi_{(a,b)} \le \psi$ a

$$I(\psi - \varphi) = \sum_{j=1}^{n}(M_j - m_j)(x_j - x_{j-1})$$
$$\le \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1}) = \varepsilon.$$

Vzhľadom na lemu 3, funkcia f je Riemannovsky integrovateľná.

Poznámka 5. 1) V dôkaze sme použili iba ten fakt, že f je rovnomerne spojitá na intervale (a, b). Na druhej strane vieme, že f je rovnomerne spojitá na intervale (a, b) práve vtedy, keď ju možno rozšíriť na spojitú funkciu definovanú na intervale $[a, b]$ (a to jediným spôsobom). Teda trieda spojitých funkcií na $[a, b]$ je taká istá, ako trieda rovnomerne spojitých funkcií na (a, b).

2) Pre funkcie φ a ψ z dôkazu predchádzajúcej vety máme

$$\sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}) \le \int_a^b f \le \sum_{j=1}^{n} m_j(x_i - x_{j-1}),$$

4

teda

$$0 \le \int_a^b f - \sum_{i=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) \le I(\psi) - I(\varphi) \le \varepsilon$$

a

$$\sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b f \le I(\psi) - I(\varphi) \le \varepsilon.$$

3) V dôkaze sme použili deliace body x_j, ktoré sú rozložené rovnomerne v intervale (a, b). Iné delenia $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ fungujú rovnako dobre za predpokladu, že $x_j - x_{j-1} \le \delta$. Teda, ak $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá, potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre ľubovoľné delenie $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ s vlastnosťou $\max_j(x_j - x_{j-1}) \le \delta$, platí

$$\sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) < \varepsilon$$

a

$$\sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) \le \int_a^b f \le \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}),$$

kde $m_j = \inf_{x\in(x_{j-1},x_j)} f(x)$ a $M_j = \sup_{x\in(x_{j-1},x_j)} f(x)$. Teda

$$\left| \int_a^b f - \begin{array}{c} \sum_{j=1}^n M_j(x_i - x_{j-1}) \\ \text{alebo } \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) \end{array} \right| < \varepsilon.$$

Pre každé j vyberme $x_j^* \in [x_{j-1}, x_j]$. Potom, pretože $m_j \leq f(x_j^*) \leq M_j$, máme

$$\left| \int_a^b f - \sum_{j=1}^n f(x_j^*)(x_j - x_{j-1}) \right| < \varepsilon.$$

Tento fakt môžeme prepísať ako

$$\int_a^b f = \lim_{\max_j(x_j - x_{j-1}) \to 0} \sum_{j=1}^n f(x_j^*)(x_j - x_{j-1}),$$

kde limitný proces prebieha cez všetky konečné delenia intervalu (a, b) také, že $\max_j(x_j - x_{j-1}) \to 0$ (teda delenie je stále jemnejšie a jemnejšie). Toto je definícia Riemannovho integrálu, ktorá sa často používa v učebniciach.

Nasledujúca veta ukazuje, že rovnomerná spojitosť funkcie f na intervale (a,b) nie je nutná.

Veta 6. *Ak $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ je ohraničená a spojitá, potom f je Riemannovsky integrovateľná.*

Dôkaz. Predpokladajme, že $M>0$ je také, že $|f(x)|\le M$ pre každé $x\in(a,b)$. Nech $\varepsilon>0$. Položme $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{8(M+1)},\frac{b-a}{3}\}$. Potom f je spojitá na uzavretom intervale $[a+\delta,b-\delta]$, teda f je Riemannovsky integrovateľná na intervale $(a+\delta,b-\delta)$. Teda existujú schodovité funkcie φ a ψ také, že $\varphi\le f\chi_{(a+\delta,b-\delta)}\le\psi$ a $I(\psi-\varphi)\le\frac{\varepsilon}{2}$. Položme

$$\begin{aligned}\tilde\varphi&=-M\chi_{(a,a+\delta]}+\varphi\chi_{(a+\delta,b-\delta)}-M\chi_{[b-\delta,b)},\\ \tilde\psi&=M\chi_{(a,a+\delta]}+\psi\chi_{(a+\delta,b-\delta)}+M\chi_{[b-\delta,b)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Potom } \tilde\varphi\le f\chi_{(a,b)}\le\tilde\psi \text{ a } I(\tilde\psi-\tilde\varphi)&=4M\delta+I((\psi-\varphi)\chi_{(a+\delta,b-\delta)})\\ &\le 4M\delta+I(\psi-\varphi)\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

teda f je Riemannovsky integrovateľná.

Príklad. Funkcia $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ je spojitá na intervale $(0,1)$ a je tam ohraničená, teda je Riemannovsky integrovateľná. Pritom f nie je rovnomerne spojitá na intervale $(0,1)$, pretože $\lim_{x\to 0+}\sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

Veta 7. *Ak f je Riemannovsky integrovateľná na intervale (a,b) a $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ je taká ohraničená funkcia, že $f = g$ na (a,b) s možnou výnimkou konečne veľa bodov $a_1 < \cdots < a_N$, potom g je tiež Riemannovsky integrovateľná a $\int_a^b f = \int_a^b g$.*

Dôkaz. Pre každé $\varepsilon > 0$ existujú schodovité funkcie $\varphi \le f\chi_{(a,b)} \le \psi$ také, že $I(\psi-\varphi)\le\varepsilon$. Modifikujme φ a ψ nasledujúcim spôsobom

$$\tilde{\varphi} = \varphi\chi_{\{x\ne a_1,\dots,a_N\}} + \sum_{i=1}^{N} g(a_i)\chi_{\{a_i\}}$$

a

$$\tilde{\psi} = \psi\chi_{\{x\ne a_1,\dots,a_N\}} + \sum_{i=1}^{N} g(a_i)\chi_{\{a_i\}}.$$

Potom zrejme $\tilde{\varphi} \le g\chi_{(a,b)} \le \tilde{\psi}$ a

$$I(\tilde{\psi}-\tilde{\varphi}) \le \varepsilon,$$

teda g je Riemannovsky integrovateľná a

$$\int_a^b g \leq I(\tilde{\psi}) = I(\psi) \leq \int_a^b f + \varepsilon.$$

Pretože ε bolo ľubovoľné, musí platiť $\int_a^b g \leq \int_a^b f$. Zo symetrie vyplýva, že platí $\int_a^b f \leq \int_a^b g$, teda $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Lema 8. *Ak f a g sú ohraničené na (a,b), potom*

$$\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g, \tag{3}$$

$$\underline{\int_a^b}(f+g) \geq \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g. \tag{4}$$

Dôkaz. Napríklad, aby sme dokázali (3), budeme postupovať nasledujúcim spôsobom. Podľa definície, pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ môžeme nájsť dve schodovité funkcie ψ_1 a ψ_2 také, že $\psi_1 \geq f\chi_{(a,b)}$ a $\psi_2 \geq g\chi_{(a,b)}$, pričom

$$I(\psi_1) \leq \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad I(\psi_2) \leq \overline{\int_a^b} g + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Teraz $\psi = \psi_1 + \psi_2$ je schodovitá funkcia, $\psi \geq (f+g)\chi_{(a,b)}$, kde

$$\begin{aligned}\overline{\int_a^b}(f+g) &\leq I(\psi) = I(\psi_1) + I(\psi_2)\\ &\leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g + \varepsilon.\end{aligned}$$

Pretože $\varepsilon > 0$ bolo ľubovoľné, (3) je dokázané. Podobným spôsobom sa dokáže aj (4).

Teda ak f a g sú obidve Riemannovsky integrovateľné na $\langle a, b\rangle$, potom aj $f+g$ je Riemannovsky integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ a

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \tag{5}$$

Lema 9. *Predpokladajme, že f je ohraničená na $\langle a, b\rangle$ a λ je konštanta. Potom*

$$\overline{\int_a^b} f = -\underline{\int_a^b}(-f), \qquad \underline{\int_a^b} f = -\overline{\int_a^b}(-f)$$

a

$$\overline{\int_a^b} \lambda f = \begin{cases} \lambda \overline{\int_a^b} f & ak\ \lambda \geq 0; \\ \lambda \underline{\int_a^b} f & ak\ \lambda \leq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Dôkaz. Najskôr, ak $\lambda > 0$, potom ψ je schodovitá funkcia práve vtedy, keď $\lambda\psi \in \mathcal{L}_{\text{step}}$ a $\psi \geq \lambda f \chi_{(a,b)}$ práve vtedy, keď $\lambda^{-1}\psi \geq f\chi_{(a,b)}$, teda

$$\begin{aligned}
\overline{\int_a^b} \lambda f &= \inf\{I(\psi) : \psi \geq \lambda f \chi_{(a,b)}, \psi \in \mathcal{L}_{\text{step}}\} \\
&= \inf\{I(\psi) : \lambda^{-1}\psi \geq f\chi_{(a,b)}, \psi \in \mathcal{L}_{\text{step}}\} \\
&= \inf\{\lambda I(\lambda^{-1}\psi) : \lambda^{-1}\psi \geq f\chi_{(a,b)}, \psi \in \mathcal{L}_{\text{step}}\} \\
&= \inf\{\lambda I(\psi) : \psi \geq f\chi_{(a,b)}, \psi \in \mathcal{L}_{\text{step}}\} \\
&= \lambda \inf\{I(\psi) : \psi \geq f\chi_{(a,b)}, \psi \in \mathcal{L}_{\text{step}}\} \\
&= \lambda \overline{\int_a^b} f.
\end{aligned}$$

Teraz sa budeme zaoberať prípadom $\lambda < 0$. Stačí nám to urobiť pre prípad $\lambda = -1$.

Pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ môžeme vybrať schodovitú funkciu ψ takú, že $\psi \geq f\chi_{(a,b)}$ a

$$I(\psi) - \varepsilon \leq \overline{\int_a^b} f \leq I(\psi).$$

Základné vlastnosti integrálov

4

Pretože $-\psi \le -f\chi_{(a,b)}$, platí

$$\underline{\int_a^b}(-f) \ge I(-\psi) = -I(\psi) \ge -\overline{\int_a^b} f - \varepsilon.$$

Pretože $\varepsilon > 0$ bolo ľubovoľné, platí $\underline{\int_a^b}(-f) \ge -\overline{\int_a^b} f$. Podobne, môžeme vybrať schodovitú funkciu φ takú, že $\varphi \le -f\chi_{(a,b)}$ a

$$I(\varphi) \le \underline{\int_a^b}(-f) \le I(\varphi) + \varepsilon.$$

Pretože $-\varphi \ge f\chi_{(a,b)}$, máme

$$\overline{\int_a^b} f \le I(-\varphi) \le -\underline{\int_a^b}(-f) + \varepsilon,$$

teda musí platiť $\overline{\int_a^b} f \le -\underline{\int_a^b}(-f)$, t.j. $\underline{\int_a^b}(-f) \le -\overline{\int_a^b} f$. Teda $\overline{\int_a^b} f = -\underline{\int_a^b}(-f)$. Zámenou f za $-f$ dostávame tiež $\overline{\int_a^b}(-f) = -\underline{\int_a^b} f$.

Teraz zhrnieme hlavné vlastnosti Riemannových integrálov.

Veta 10. *Riemannovské integrovanie $\int_a^b : f \mapsto \int_a^b f$ je lineárne a zachováva nezápornosť.*

1) *Ak f, g sú Riemannovsky integrovateľné na (a,b) a λ, μ sú reálne čísla, potom $\lambda f + \mu g$ je Riemannovsky integrovateľná a*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Priestor všetkých (ohraničených) Riemannovsky integrovateľných funkcií na (a,b) je lineárny priestor;

2) *Ak f je Riemannovsky integrovateľná a $f \geq 0$, potom $\int_a^b f \geq 0$;*
3) *Ak $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a Riemannovsky integrovateľná, $f \geq 0$ a existuje aspoň jeden bod $x_0 \in (a,b)$ taký, že $f(x_0) > 0$, potom $\int_a^b f > 0$. Teda ak f je spojitá a ohraničená na (a,b), potom $\int_a^b |f| = 0$ práve vtedy, keď $f \equiv 0$ na (a,b).*
4) *Ak f a g sú Riemannovsky integrovateľné na (a,b) a $f \leq g$ na (a,b), potom $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

Dôkaz. 1) vyplýva z predchádzajúcich pomocných tvrdení. Aby sme dokázali 2), pretože $f \geq 0$, funkcia $\varphi = 0$ je schodovitá a $\varphi \leq f\chi_{(a,b)}$, pričom $\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \geq I(\varphi) = 0$.

Teraz dokážeme 3). Pretože f je spojitá v bode $x_0 \in (a,b)$, existuje $\delta > 0$ také, že $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$ a $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)$ pre všetky $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Položme $\varphi = \frac{1}{2} f(x_0)\chi_{(x_0-\delta, x_0+\delta)}$. Potom $\varphi \leq f\chi_{(a,b)}$, pričom

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \geq I(\varphi) = \frac{1}{2} f(x_0)\delta > 0.$$

4) vyplýva z 1) a 2).

Dôsledok 11. *Ak f je Riemannovsky integrovateľná na (a,b) a $m \leq f(x) \leq M$ pre všetky $x \in (a,b)$, potom*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Dôkaz. Vyplýva z nerovností $m\chi_{(a,b)} \leq f \leq M\chi_{(a,b)}$ na (a,b) a zo 4) z predošlej vety.

Dôsledok 12. *Ak f je Riemannovsky integrovateľná na (a, b), potom sú Riemannovsky integrovateľné aj funkcie $f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f) \vee 0$ a $|f|$, pričom*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|. \tag{7}$$

Dôkaz. Potrebujeme iba ukázať, že f^+ je Riemannovsky integrovateľná, lebo $|f| = f^+ + f^-$ a $f^- = (-f)^+$. Pre každé $\varepsilon > 0$, pretože f je Riemannovsky integrovateľná, existujú schodovité funkcie φ a ψ také, že $\varphi \leq f\chi_{(a,b)} \leq \psi$ na (a, b) a $I(\psi - \varphi) < \varepsilon$. Potom zrejme

$$\varphi^+\chi_{(a,b)} \leq f^+\chi_{(a,b)} \leq \psi^+\chi_{(a,b)}$$

a

$$\begin{aligned} I(\psi^+\chi_{(a,b)} - \varphi^+\chi_{(a,b)}) &= I((\psi^+ - \varphi^+)\chi_{(a,b)}) \\ &\leq I(\psi^+ - \varphi^+) \\ &\leq I(\psi - \varphi) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Obidve funkcie $\psi^+\chi_{(a,b)}$ a $\varphi^+\chi_{(a,b)}$ sú schodovité, teda podľa lemy 3 funkcia $|f|$ je Riemannovsky integrovateľná. Pretože $|f| \geq \pm f$ na (a,b), bezprostredne z $\int_a^b |f| \geq \pm \int_a^b f$ vyplýva, že platí (7).

Veta 13. *(Veta o strednej hodnote pre integrály) Predpokladajme, že $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $g \geq 0$ je ohraničená a spojitá na (a,b). Potom existuje $\xi \in [a,b]$ také, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{8}$$

Dôkaz. Ak $\int_a^b g = 0$, potom (pretože $g \geq 0$ je spojitá) musí platiť $g \equiv 0$ na (a,b), teda $fg \equiv 0$ na (a,b). V tomto prípade (8) platí pre ľubovoľné $\xi \in [a,b]$. Teda môžeme predpokladať, že $\int_a^b g > 0$. Pretože f je spojitá na $[a,b]$, nadobúda tam svoje hranice. Nech $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ a $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Potom, pretože $g \geq 0$ na (a,b),

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \quad \forall x \in (a,b),$$

teda

$$m\int_a^b g(x) \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x).$$

Preto

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M.$$

Použijeme vetu o medzihodnote na funkciu f. Preto existuje $\xi \in [a,b]$ také, že $f(\xi) = \int_a^b fg / \int_a^b g$. Tým je dôkaz ukončený.

Potrebovali sme iba predpokladať, že g je Riemannovsky integrovateľná a $g \geq 0$ na (a,b).

Veta 14. *(Aditivita Riemannových integrálov) Nech $a < b < c$. Ak $f : (a, c) \to \mathbb{R}$ a f je Riemannovsky integrovateľná na (a, b) a tiež na (b, c), potom f je Riemannovsky integrovateľná na (a, c), pričom*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Dôkaz. Pretože f je integrovateľná na obidvoch intervaloch (a, b) a (b, c), pre každé $\varepsilon > 0$ existujú schodovité funkcie φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 také, že $\varphi \le f\chi_{(a,b)} \le \psi_1$ a $\varphi_2 \le f\chi_{(b,c)} \le \psi_2$, pričom

$$I(\psi_1 - \varphi_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad I(\psi_2 - \varphi_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme

$$\varphi = \varphi_1 + f(b)\chi_{[b,b]} + \varphi_2$$

a

$$\psi = \psi_1 + f(b)\chi_{[b,b]} + \psi_2,$$

2

Potom φ, ψ sú schodovité funkcie a $\varphi \leq f\chi_{(a,c)} \leq \psi$ na (a, c), pričom

$$I(\psi - \varphi) \leq I(\psi_1 - \varphi_1) + I(\psi_2 - \varphi_2) < \varepsilon,$$

teda f je Riemannovsky integrovateľná na (a, c). Okrem toho,

$$\int_a^c f(x)\,dx \leq I(\psi_1) + I(\psi_2) \leq \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \varepsilon$$

a

$$\int_a^c f(x)\,dx \geq I(\varphi_1) + I(\varphi_2) \geq \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx - \varepsilon.$$

Pretože $\varepsilon > 0$ bolo ľubovoľné, aditivita je dokázaná.

Poznámka 15. Ak f je Riemannovsky integrovateľná na (a, b) a $(c, d) \subset (a, b)$, potom f je Riemannovsky integrovateľná na (c, d).

Dohodneme sa na konvencii, podľa ktorej ak f je integrovateľná na (a, b), potom $\int_b^a f = -\int_a^b f$. Potom aditivita

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

platí pre ľubovoľné poradie bodov a, b, c, pretože f je integrovateľná na intervale maximálnej dĺžky s koncovými bodmi a, b, c.

Aditivita Riemannových integrálov nám dovoľuje rozšíriť Riemannov integrál na 1) niektoré neohraničené funkcie, alebo 2) na neohraničené intervaly.

Presnejšie, ak $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá, ale nie nutne ohraničená, potom, pretože f je spojitá na ľubovoľnom $[c, d] \subset (a, b)$, funkcia f sa stáva neohraničenou iba v blízkosti bodu a alebo bodu b, alebo obidvoch týchto bodov. Teda môžeme definovať

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^c f + \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_c^{b-\varepsilon} f,$$

ak obidve limity na pravej strane existujú. Aditivita Riemannových integrálov implikuje, že ľavá strana nezávisí od výberu bodu $c \in (a, b)$. V tomto prípade hovoríme, že f je integrovateľná (alebo že $\int_a^b f$ existuje) a $\int_a^b f$ sa volá Riemannov integrál funkcie f na intervale (a, b). V niektorých učebniciach sa tieto integrály volajú nevlastné integrály.

Podobne, ak $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ je funkcia, ktorá je integrovateľná na každom intervale (a, B), kde $B > a$ je ľubovoľné reálne číslo, definujeme

$$\int_a^\infty f = \lim_{B \to \infty} \int_a^B f.$$

4

Podobne, ak $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ je funkcia, ktorá je integrovateľná na každom intervale (A, b), kde $A < b$ je ľubovoľné reálne číslo, potom

$$\int_{-\infty}^{b} f = \lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{b} f,$$

za predpokladu, že tieto limity existujú. Nakoniec, ak $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ je taká funkcia, že $\int_A^B f$ existuje pre ľubovoľné $A < B$, potom definujeme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{\infty} f = \lim_{B \to \infty, A \to -\infty} \int_{A}^{B} f,$$

ak limita na pravej strane existuje. Znova aditivita integrálov implikuje, že táto definícia nezáleží na výbere bodu $c \in (-\infty, \infty)$.

Ak f je funkcia definovaná na (a, b) s možnou výnimkou konenečne veľa bodov y_i $(i = 1, \ldots, N-1)$, kde $a = y_0 < y_1 < \cdots < y_N = b$, a ak integrály $\int_{j_{i-1}}^{y_i} f$ existujú pre všetky $i = 1, \ldots, N$, potom

$$\int_{a}^{b} f = \sum_{i=1}^{N} \int_{y_{i-1}}^{y_i} f.$$

Aditivita integrálov a veta 7 zaručujú, že ľavá strana je dobre definovaná, t.j. nezávisí na konečnom súbore bodov y_i.

Vetu 10 môžeme aplikovať aj na zovšeobecnené integrály.

Veta 1. *(Neurčitý integrál) Predpokladajme, že f je ohraničená, Riemannovsky integrovateľná na (a, b). Definujme $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ nasledujúcim spôsobom:*

$$F(x) = \int_a^x f(y)\,dy \quad \textit{pre} \quad x \in [a, b]. \tag{4.1}$$

Potom platí:

1) *F je spojitá na $[a, b]$.*
2) *Ak $c \in (a, b)$ je také, že f je spojitá v bode c, potom F je diferencovateľná v bode c a $F'(c) = f(c)$.*

Dôkaz. 1) Pretože f je Riemannovsky integrovateľná na (a, b), je tam ohraničená. Predpokladajme, že $|f| \le M$ na (a, b). Potom pre ľubovoľné $x, x' \in [a, b]$ (môžeme predpokladať, že $x' \ge x$) máme

$$|F(x') - F(x)| = \left| \int_x^{x'} f(y)\,dy \right| \le M|x' - x|,$$

teda F je (Lipschitzovsky) spojitá.

2

2) Predpokladajme, že f je pojitá v bode $c \in (a, b)$. Pre $h \neq 0$ také, že $c+h \in (a, b)$, máme

$$\frac{F(c+h) - F(c)}{h} = \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f.$$

Spolu s faktom, že $\int_c^{c+h} f(c)\, dx = hf(c)$, dostávame, že

$$\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) = \frac{1}{h} \int_c^{c+h} (f(x) - f(c))\, dx.$$

Pretože f je spojitá, pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ pre ľubovoľné $x \in (a, b)$ také, že $|x - c| < \delta$. Teda (predpokladáme, že $h > 0$, prípad $h < 0$ je podobný)

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} (f(x) - f(c))\, dx \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_c^{c+h} |f(x) - f(c)|\, dx \\ &\leq \frac{\varepsilon h}{h} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Podľa definície máme $F'(c) = f(c)$.

Veta 2. *(Základná veta integrálneho počtu) Predpokladajme, že 1) $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá, 2) F je diferencovateľná na (a, b), 3) F' je ohraničená a spojitá na (a, b). Potom*

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

Dôkaz. Nech $G(x) = \int_a^x F'(y)\,dy$. Potom podľa vety 1, funkcie G a F sú spojité na $[a, b]$, pričom $G' = F'$ na (a, b). Potom podľa vety o jednoznačnosti platí $F = G + C$ na $[a, b]$, kde C je konštanta. Ale $G(a) = 0$, teda $C = F(a)$, odkiaľ $G(x) = F(x) - F(a)$ pre ľubovoľné $x \in [a, b]$. Špeciálne, $G(b) = F(b) - F(a)$, čo sme chceli dokázať.

Dôsledok 3. *1) ak F' je spojitá na $[a, b]$, potom $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$.*

2) Ak F je spojitá na (a, b) a obidve jednostranné limity $F(b-) = \lim_{x\to b-} F(x)$, $F(a+) = \lim_{x\to a+} F(x)$ existujú a F' je spojitá na (a, b), potom

$$\int_a^b F' = F(b-) - F(a+).$$

4

Tu a a/alebo b môžu byť nekonečné.

Dôkaz. Predpokladajme, že $a < b$ sú konečné. Pre každé $\varepsilon > 0$ dostaočne malé a $c \in (a, b)$ máme

$$\int_{a+\varepsilon}^{c} F' = F(c) - F(a+\varepsilon) \quad \text{a} \quad \int_{c}^{b-\varepsilon} F' = F(b-\varepsilon) - F(c).$$

Pre $\varepsilon \to 0+$ dostávame

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{c} F' = F(c) - F(a+), \qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{c}^{b-\varepsilon} F' = F(b-) - F(c),$$

teda podľa definície

$$\begin{aligned} \int_{a}^{b} F' &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{c} F' + \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{c}^{b-\varepsilon} F' \\ &= F(c) - F(a+) + F(b-) - F(c) \\ &= F(b-) - F(a+). \end{aligned}$$

Poznámka 4. Pripomeňme si, že spojitá funkcia F na (a, b) je rovnomerne spojitá na (a, b) práve vtedy, keď $F(a+)$ a $F(b-)$ existujú.

Ako aplikácie základnej vety integrálneho počtu uvedieme substitučnú metódu a metódu per partes.

Tvrdenie 5. *(Substitúcia) Predpokladajme, že 1) funkcia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá, 2) funkcia $h : [c, d] \to [a, b]$ je diferencovateľná na $[c, d]$ a h' je spojitá na $[c, d]$, 3) $h(c) = a$ a $h(d) = b$. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(h(t))h'(t)\,dt.$$

Dôkaz. Nech $F(x) = \int_a^x f(y)\,dy$ a $G(x) = (F \circ h)(x)$. Potom

$$G'(x) = F'(h(x))h'(x) = f(h(x))h'(x),$$

teda podľa základnej vety integrálneho počtu máme

$$\begin{aligned}\int_c^d f(h(t))h'(t)\,dt &= G(d) - G(c)\\ &= F(h(d)) - F(h(c))\\ &= F(b) - F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Poznámka 6. Funkcia h je monotónna, teda h' nemení znamienko na danom intervale.

Tvrdenie 7. *(Per partes) Ak $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sú diferencovateľné na $[a,b]$ a také, že f', g' sú spojité na $[a,b]$, potom*

$$\int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'.$$

Dôkaz. Nech $F = fg$. Potom $F' = f'g + g'f$ je spojitá na $[a, b]$, teda podľa základnej vety integrálneho počtu máme

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

Teda

$$\int_a^b (f'g + fg') = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

čo dáva integráciu per partes.

Rozdiel $f(b)g(b) - f(a)g(a)$ sa obyčajne zapisuje v tvare

$$fg\Big|_a^b \quad \text{alebo} \quad f(x)g(x)\Big|_a^b,$$

teda integráciu per partes možno zapísať

$$\int_a^b f'g = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg'.$$

4

Príklad. Uvažujme integrál $I_n = \int_0^1 x^k \ln^n x\,dx$, kde $k > 0$ a $n = 0, 1, 2, \dots$. Pretože $k > 0$, $\lim_{x\to 0+} x^k \ln^n x = 0$ (l'Hospital), teda $x^k \ln^n x$ je spojitá a ohraničená na $(0, 1)$, teda integrovateľná pre ľubovoľné $n \geq 0$.

Integrovaním metódou per partes (pre $\varepsilon > 0$ dostatočne malé) dostávame

$$\int_\varepsilon^1 x^k \ln x\,dx = -\frac{1}{k+1}\varepsilon^{k+1}\ln^n \varepsilon - \frac{n}{n+1}\int_\varepsilon^1 x^k \ln^{n-1} x\,dx.$$

Pre $\varepsilon \to 0+$ dostávame

$$\begin{aligned} I_n &= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{k+1}\varepsilon^{k+1}\ln^n \varepsilon - \frac{n}{n+1} I_{n-1} \\ &= -\frac{n}{n+1} I_{n-1} = (-1)^n \frac{n!}{(k+1)^n} I_0 \\ &= (-1)^n \frac{n!}{(k+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Príklad. Predpokladajme, že f je spojitá na $[0,1]$. Potom

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx.$$

Skutočne, zámenou premennej $x = \pi - t$ dostávame $dx = -dt$ a $\sin x = \sin t$, teda

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx &= \int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin t)(-dt)\\ &= \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t)\,dt\\ &= \pi\int_0^\pi f(\sin t)\,dt - \int_0^\pi t f(\sin t)\,dt,\end{aligned}$$

čo dáva požadovanú identitu.

Uvažujme postupnosť schodovitých funkcií na $(0,1)$: $\varphi_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}$.
Zrejme $\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = 1$ pre každé n a $\varphi_n \to \varphi = 0$ na $(0,1)$, pritom

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \int_0^1 \varphi = 0 \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n = 1.$$

Teda vo všeobecnosti nemôžeme zameniť poradie dvoch operácií: limity a integrálu.

Veta 1. *Predpokladajme, že 1) f_n sú Riemannovsky integrovateľné na (a,b), 2) $f_n \to f$ rovnomerne na (a,b). Potom f je Riemannovsky integrovateľná a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Dôkaz. Najskôr ukážeme, že f je Riemannovsky integrovateľná. Pre každé $\varepsilon > 0$, pretože $f_n \to f$ rovnomerne na (a,b), existuje N také, že

$$\sup_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall n > N.$$

2

Pretože f_{N+1} je Riemannovsky integrovateľná, existujú schodovité funkcie φ a ψ také, že

$$\varphi \leq f_{N+1}\chi_{(a,b)} \leq \psi$$

a $I(\psi - \varphi) < \varepsilon$. Položme

$$\tilde{\psi} = \psi\chi_{(a,b)} + \frac{\varepsilon}{b-a}\chi_{(a,b)}, \qquad \tilde{\varphi} = \varphi\chi_{(a,b)} - \frac{\varepsilon}{b-a}\chi_{(a,b)}.$$

Potom $\tilde{\psi}$ a $\tilde{\varphi}$ sú schodovité funkcie a pre každé $x \in (a,b)$ platí

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(x) = \psi(x) + \frac{\varepsilon}{b-a} &\geq f_{N+1}(x) + \frac{\varepsilon}{b-a} \\ &\geq f(x) \geq f_{N+1}(x) - \frac{\varepsilon}{b-a} \\ &\geq \varphi(x) - \frac{\varepsilon}{b-a} = \tilde{\varphi}(x),\end{aligned}$$

teda $\tilde{\varphi} \leq f\chi_{(a,b)} \leq \tilde{\psi}$. Okrem toho,

$$\begin{aligned}I(\tilde{\psi} - \tilde{\varphi}) &= I((\psi - \varphi)\chi_{(a,b)}) + 2\varepsilon \\ &\leq I(\psi - \varphi) + 2\varepsilon \\ &< 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Podľa lemy 3 funkcia f je Riemannovsky integorvateľná na (a, b).

Teraz $|f_n - f|$ je Riemannovsky integrovateľná (dôsledok 12) pre každé n, pričom

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

pre každé $n > N$. Podľa definície $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.

Teda priestor všetkých Riemannovsky integrovateľných funkcií je uzavretý vzhľadom na rovnomernú konvergenciu.

Dôsledok 2. *Predpokladajme, že 1) každá f_n je Riemannovsky integrovateľná na (a, b) a 2) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na (a, b). Potom $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ je Riemannovsky integrovateľná a*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

To znamená, že za predpokladu rovnomernej konvergencie môžeme integrovať rad člen po člene.

Poznámka 3. Podobne, ak f_n a f_n' sú spojité na $[a,b]$ a obidva rady $\sum f_n$ a $\sum f_n'$ konvergujú rovnomerne na $[a,b]$, potom $g \equiv \sum f_n$ je diferencovateľná na (a,b) a rad $\sum f_n$ môžeme derivovať člen po člene, t.j.

$$\frac{d}{dx}\sum f_n = \sum \frac{d}{dx} f_n.$$

Vyplýva to zo základnej vety integrálneho počtu, predchádzajúceho dôsledku aplikovaného na $\sum f_n'$ a faktu, že g je spojitá na $[a,b]$ (Spojitosť sa zachováva pri rovnomernej konvergencii).

Príklad 4. Ukážte, že

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Pripomeňme si, že geometrický rad $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konverguje rovnomerne na intervale $[0, 1-\varepsilon]$ pre ľubovoľné $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Funkcia $\ln x$ je ohraničená na intervale $[\varepsilon, 1]$, teda rad

$$-\frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n(-\ln x)$$

konverguje rovnomerne na intervale $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$. (Otázka: konverguje tento rad rovnomerne na intervale $(0,1)$?) Teda môžeme integrovať člen po člene tento rad na intervale $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, čím dostávame

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^n(-\ln x) \qquad \text{(Dôsledok 5.2).}$$

Teraz $x^n(-\ln x) \geq 0$ na $(0,1)$, teda $\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^n(-\ln x) \geq 0$ a

$$0 \leq \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^b(-\ln x) \leq \int_0^1 x^n(-\ln x) = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Podľa Weierstraßovho kritéria rad $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^n(-\ln x)$ konverguje rovnomerne v premennej $\varepsilon \in (0,1/2)$ (tu pracujeme s funkciami $f_n(\varepsilon) \equiv \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^n(-\ln x)$ ako s funkciami premennej ε, teda rad $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na intervale

$(0, 1/2))$, teda

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \sum_{n=0}^{\infty} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} x^n(-\ln x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} x^n(-\ln x)$$

[Spojitosť sa zachováva pri rovnomernej konvergencii]

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n(-\ln x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Príklad 5. Nech f je Riemannovsky integrovateľná na $(-\pi, \pi)$. Položme $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx$ (tieto čísla sa volajú Fourierove koeficienty funkcie f). Potom $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Toto je príklad, kde postupnosť integrovateľných funkcií nemusí konvergovať, ale odpovedajúca postupnosť integrálov má limitu.

Naozaj, ak $f = \chi_{(a,b)}$, kde $-\pi \leq a < b \leq \pi$, potom

$$\int_{-\pi}^{\pi} \chi_{(a,b)}(x) \sin nx = \int_{a}^{b} \sin nx = \frac{\cos na - \cos nb}{n} \to 0.$$

Teda pre ľubovoľnú $f \in \mathcal{L}_{\text{step}}$ máme $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \to 0$. Môžeme teraz predpokladať, že f je Riemannovsky integrovateľná. Pre každé $\varepsilon > 0$ existuje schodovitá funkcia φ taká, že $\varphi \leq f\chi_{(-\pi,\pi)}$ a

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f - \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} |f - \varphi| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pretože $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx \to 0$, existuje N také, že $\left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, teda

$$\begin{aligned} |b_n| &\leq \left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \varphi(x)) \sin nx\right| + \left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx\right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f - \varphi| + \left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Podľa definície, $b_n \to 0$.

V tejto časti budem aplikovať nástroje vytvorené v predchádzajúcej časti na dôkaz niektorých výsledkov o mocninových radoch.

Uvažujme mocninový rad $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ktorého polomer konvergencie je $R > 0$ (R môže byť aj ∞), kde a_n sú konštanty, voláme ich koeficienty mocninového radu. Formálnym derivovaním a integrovaním (na intervale $(0, x)$) mocninového radu člen po člene dostávame nové mocninové rady $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ a $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Lema 1. *Mocninové rady f, g a h majú ten istý polomer konvergencie R.*

Dôkaz. Domáca úloha.

Veta 2. *Ak $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má polomer konvergencie $R > 0$, potom 1) f je Riemannovsky integrovateľná na intervale $(0, x)$ pre ľubovoľné $|x| < R$ a*

$$\int_0^x f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

2) f je diferencovateľná na intervale $(-R, R)$ a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \forall x \in (-R, R).$$

2

Dôkaz. 1) Ak $|x| < R$, potom $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ konverguje rovnomerne na intervale $[-|x|, |x|]$, teda ho môžeme integrovať člen po člene, čím dostávame

$$\int_0^x f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n y^n \, dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

2) Aplikujeme 1) na rad $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, čím dostávame

$$G(x) \equiv \int_0^x g = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

a $f(x) = G(x) + a_0$. Pretože, vzhľadom na vetu 4.1, máme $G'(x) = g(x)$, platí $f(x) = g(x)$ pre ľubovoľné $x \in (-R, R)$.

Dôkaz druhej časti tejto vety na domácu úlohu.

Videli sme, že pre daný ohraničený interval (a, b) priestor všetkých Riemannovsky integrovateľných funkcií je lineárny podpriestor priestoru ohraničených funkcií, ktorý zahŕňa všetky ohraničené spojité funkcie na intervale (a, b). Existuje však veľa iných funkcií, ktoré sú Riemannovsky integrovateľné, ale nie sú spojité. Napríklad všetky monotónne funkcie na intervale (a, b) sú Riemannovsky integrovateľné, ako aj všetky po častiach spojité funkcie na intervale $[a, b]$ sú tiež Riemannovsky integrovateľné. Monotónne funkcie a po častiach spojité funkcie sú spojité s výnimkou najviac spočítateľne veľa bodov, teda sú takmer spojité.

Veta 1. *Ohraničená funkcia f definovaná na intervale (a, b) je Riemannovsky integrovateľná práve vtedy, keď je spojitá skoro všade na intervale (a, b).*

Aby sme rozumeli tejto vete, potrebujeme vedieť, čo znamená, keď povieme "spojitá skoro všade". Nech $A = \{x \in (a, b) : f \text{ nie je spojitá v bode } x\}$. Hovoríme, že f je spojitá skoro všade, ak A je nulová množina v tom zmysle, že pre každé $\varepsilon > 0$ môžeme nájsť postupnosť intervalov J_n takú, že 1) súbor $\{J_n : n \geq 1\}$ pokrýva množinu A, t.j. $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \supseteq A$, a 2) celková dĺžka tohto súboru je malá, t.j. $\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| < \varepsilon$. Napríklad, $\mathbb{Q} \cap (a, b)$ je nulová množina, pretože každá spočítateľná množina je nulová množina. Vzhľadom na vetu 1 každá ohraničená funkcia na intervale (a, b), ktorá je spojitá okrem spočítateľnej množiny, je Riemannovsky integrovateľná na (a, b). Napríklad modifikovaná Dirichletova funkcia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \text{ je iracionálne,} \\ \frac{1}{p+q} & \text{ak } x = \frac{p}{q} \in (0,1) \text{ v základnom tvare} \end{cases}$$

je spojitá v iracionálnych bodoch a nespojitá v racionálnych bodoch, ktorých je spočítateľne veľa, teda je Riemannovsky integrovateľná.

Na druhej strane, existuje veľa nespočítateľných nulových množín.

Literatúra

[1] Bear, H. S., *A Primer of Lebesgue Integration*, Academic Press, 2002.

[2] Lynch, M., *Advanced calculus reform: continuity and integration*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **25** (1994), 563–571.

[3] Riečan, B., *Čo s Riemannovým integrálom*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky **38** (3/2009), 5–16.

[4] Qian, Z., *Analysis III: Integration*, Mathematical Institute, Oxford, 2011.

Začneme intervalmi na reálnej osi. Interval je množina reálnych čísel s nasledujúcou vlastnosťou: ľubovoľné číslo ležiace medzi dvomi číslami z tejto množiny je tiež prvkom tejto množiny. Uzavretý interval medzi dvomi číslami a a b sa označuje $[a, b]$, pričom koncové body sú zahrnuté do tejto množiny. Otvorený interval sa označuje (a, b), pričom koncové body nepatria do tejto množiny. Tiež máme polootvorené intervaly $[a, b)$ a $(a, b]$, v ktorých jeden z koncových bodov patrí do danej množiny a druhý z nich tam nepatrí.

Nech I je ohraničený interval ľubovoľného typu s koncovými bodmi a a b, t.j. $I = [a, b]$, $I = [a, b)$, $I = (a, b]$, alebo $I = (a, b)$. Dĺžku intervalu I definujeme predpisom $\ell(I) = b - a$.

Táto definícia nám dovoľuje určiť jeden typ podmnožín reálnej osi, ktoré sú nulové, t.j. majú nulovú dĺžku. Uvažujme jednoprvkovú množinu $\{a\}$, ktorú môžeme vyjadriť ako interval $I = [a, a]$. Zrejme takéto jednoprvkové množiny sú nulové, pretože $\ell(I) = \ell([a, a]) = a - a = 0$.

Chceme ísť ďalej, napríklad že všetky konečné množiny (t.j. všetky množiny obsahujúce konečne veľa prvkov) na reálnej osi sú nulové. Je to intuitívne zrejmé, pretože všetky neprázdne konečné množiny sú tvaru $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. To je zjednotenie jednoprvkových množín, každá z nich má nulovú dĺžku, teda sčítaním konečného počtu týchto nulových dĺžok dostaneme nulovú dĺžku celej množiny. Pokračujúc v tejto logike by sme mohli povedať, že všetky spočítateľné množiny na reálnej osi, či už konečné alebo nekonečné, majú nulovú dĺžku.

Nulová množina A na reálnej osi je množina, ktorú možno pokryť postupnosťou intervalov ľubovoľne malej celkovej dĺžky. Inými slovami, pre každé $\varepsilon > 0$ môžeme nájsť postupnosť intervalov $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že platí

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon.$$

V takomto prípade hovoríme, že množina A je nulová. Intervaly v tejto definícii môžu byť uzavreté, otvorené, alebo polootvorené. Nie je v tom žiadny rozdiel. Navyše, tieto intervaly nemusia byť disjunktné, t.j. môžu sa prekrývať.

Aplikujme túto definíciu na rôzne typy množín na reálnej osi. Najskôr, prázdna množina $\emptyset$ je nulová, pretože pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ môžeme definovať nekonečne veľa intervalov nulovej dĺžky, konkrétne $I_n = [0, 0]$ pre každé n prirodzené. Potom $\emptyset \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = 0 < \varepsilon$.

Teraz môžeme potvrdiť pomocou tejto formálnej definície, že všetky jednoprvkové množiny tvaru $\{x\}$ sú nulové. Pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ položme $I_1 = [x, x]$ a $I_n = [0, 0]$ pre každé prirodzné číslo $n \geq 2$. Potom $\{x\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = 0 < \varepsilon$.

Teraz môžeme ísť ďalej a použiť našu formálnu definíciu na dôkaz toho, že ľubovoľná spočítateľná množina $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ je nulová. Urobíme to dvomi cestami. Tá ľahšia je vziať $I_n = [x_n, x_n]$ pre všetky n prirodzené. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ budeme mať $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = 0 < \varepsilon$. Druhá cesta je trochu zložitejšia, ale bude užitočná v ďalšom. Dovoľuje pokryť množinu A otvorenými intervalmi. Nech $\varepsilon > 0$. Množinu A pokryjeme nasledujúcimi intervalmi:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left(x_1 - \tfrac{\varepsilon}{8}, x_1 + \tfrac{\varepsilon}{8}\right), \\
I_2 &= \left(x_2 - \tfrac{\varepsilon}{16}, x_2 + \tfrac{\varepsilon}{16}\right), \\
I_3 &= \left(x_3 - \tfrac{\varepsilon}{32}, x_3 + \tfrac{\varepsilon}{32}\right), \\
&\vdots \\
I_n &= \left(x_n - \tfrac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x_n + \tfrac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right), \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Dĺžka každého z týchto intervalov je $\ell(I_n) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$. Množina A je nulová, pretože

$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Použili sme pritom súčet geometrického radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Tento malý trik sa často používa v dôkazoch a bude použitý aj v dôkaze vety o postupnosti nulových množín v ďalšej časti.

Na konci predošlej časti sme dokázali, že množina A je nulová, ak je spočítateľným zjednotením jednoprvkových množín, každá z ktorých je samozrejme nulová. Tento poznatok zovšeobecníme. Ukážeme, že spočítateľné zjednotenie ľubovoľnej postupnosti nulových množín bude tiež nulová množina.

Lema 1. *Ak $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ je postupnosť nulových množín na reálnej osi, potom ich zjednotenie $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ je tiež nulová množina.*

Dôkaz. Predpokladajme, že všetky množiny N_k sú nulové. Nech $\varepsilon > 0$. Ukážeme, že množina $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ môže byť pokrytá spočítateľným počotom intervalov s celkovou dĺžkou menšou ako ε.

Najskôr uvažujme množinu N_1. Pretože podľa predpokladu je nulová, existujú intervaly $I_{(1,k)}$ také, že $N_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{(1,k)}$ a $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{(1,k)}) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Teraz uvažujme nulovú množinu N_2. Pre túto množinu môžeme nájsť intervaly $I_{(2,k)}$ také, že $N_2 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{(2,k)}$ a $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{(2,k)}) < \frac{\varepsilon}{8}$.

Pokračujúc v tejto ceste, môžeme pokryť nulovú množinu N_n intervalmi $I_{(n,k)}$ takými, že $N_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{(n,k)}$ a $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{(n,k)}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Takto sme vytvorili spočítateľný systém intervalov $I_{(n,k)}$, ktorý môžeme usporiadať do postupnosti $\{J_j\}_{j=1}^{\infty}$. Napríklad, môžeme položiť

$$J_1 = I_{(1,1)}, J_2 = I_{(1,2)}, J_3 = I_{(2,1)}, J_4 = I_{(1,3)}, J_5 = I_{(3,1)}, J_6 = I_{(2,2)}, J_7 = I_{(4,1)}, \dots$$

takým spôsobom, že žiadny z intervalov $I_{(n,k)}$ sa nestratí.

V tejto ukážke sme položili $J_j = I_{(a_j,b_j)}$, kde

$$\begin{aligned} a_{2j-1} &= j, & a_{2j} &= a_j; \\ b_{2j-1} &= 1, & b_{2j} &= 1 + b_j. \end{aligned}$$

Overte, že priradenie $j \mapsto (a_j, b_j)$ je bijekcia medzi množinami $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Nájdite k nej inverznú funkciu.

Zjednotenie tohto nového systému intervalov musí byť také isté ako zjednotenie starého systému, teda musí platiť $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{(n,k)} = \bigcup_{j=1}^{\infty} J_j$.

6

K dokončeniu dôkazu potrebujeme vypočítať dĺžku množiny $\bigcup_{j=1}^{\infty} J_j$. Nech m je prirodzené číslo. Ukážeme, že platí

$$\sum_{j=1}^{m} \ell(J_j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pre lepšie porozumenie budeme pracovať s konkrétnym súčtom pre $m = 7$, pričom použijeme vyššie popísané usporiadanie:

$$\ell(J_1) + \ell(J_2) + \ell(J_3) + \ell(J_4) + \ell(J_5) + \ell(J_6) + \ell(J_7) = \\ = \ell(I_{(1,1)}) + \ell(I_{(1,2)}) + \ell(I_{(2,1)}) + \ell(I_{(1,3)}) + \ell(I_{(3,1)}) + \ell(I_{(2,2)}) + \ell(I_{(4,1)}).$$

Teraz zmeníme poradie sčítancov tak, aby indexy boli usporiadané podobne ako slová v slovníku, t.j. lexikograficky:

$$\ell(J_1) + \ell(J_2) + \ell(J_3) + \ell(J_4) + \ell(J_5) + \ell(J_6) + \ell(J_7) = \\ = \ell(I_{(1,1)}) + \ell(I_{(1,2)}) + \ell(I_{(1,3)}) + \ell(I_{(2,1)}) + \ell(I_{(2,2)}) + \ell(I_{(3,1)}) + \ell(I_{(4,1)}).$$

a	**1**
absolvent	$(1,1)$
abstinent	$(1,2)$
abstrakcia	$(1,3)$
adresa	**2**
agresia	$(2,1)$
aktivita	$(2,2)$
anarchia	**3**
antitalent	$(3,1)$
arogancia	**4**
b	$(4,1)$
bahno	
bicykel	
bieda	
blud	
c	
cena	
cesnak	
cukor	

Nakoniec vyznačíme skupiny s rovnakou prvou zložkou v indexoch:

$$\ell(J_1)+\ell(J_2)+\ell(J_3)+\ell(J_4)+\ell(J_5)+\ell(J_6)+\ell(J_7)=$$
$$=[\ell(I_{(1,1)})+\ell(I_{(1,2)})+\ell(I_{(1,3)})]+[\ell(I_{(2,1)})+\ell(I_{(2,2)})]+\ell(I_{(3,1)})+\ell(I_{(4,1)}).$$

Potom platí:

$$\ell(J_1)+\ell(J_2)+\ell(J_3)+\ell(J_4)+\ell(J_5)+\ell(J_6)+\ell(J_7)=$$
$$=[\ell(I_{(1,1)})+\ell(I_{(1,2)})+\ell(I_{(1,3)})]+[\ell(I_{(2,1)})+\ell(I_{(2,2)})]+\ell(I_{(3,1)})+\ell(I_{(4,1)})\leq$$
$$\leq\sum_{k=1}^{\infty}\ell(I_{(1,k)})+\sum_{k=1}^{\infty}\ell(I_{(2,k)})+\sum_{k=1}^{\infty}\ell(I_{(3,k)})+\sum_{k=1}^{\infty}\ell(I_{(4,k)})<\frac{\varepsilon}{2^2}+\frac{\varepsilon}{2^3}+\frac{\varepsilon}{2^4}+\frac{\varepsilon}{2^5}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Uvedený konkrétny postup je použiteľný pre ľubovoľné m a pre ľubovoľné usporiadanie intervalov $I_{(n,k)}$ do postupnosti $\{J_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Pretože m bolo ľubovoľné, máme

$$\sum_{j=1}^{\infty}\ell(J_j)\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

a	**1**
absolvent	$(1,1)$
abstinent	$(1,2)$
abstrakcia	$(1,3)$
adresa	**2**
agresia	$(2,1)$
aktivita	$(2,2)$
anarchia	**3**
antitalent	$(3,1)$
arogancia	**4**
b	$(4,1)$
bahno	
bicykel	
bieda	
blud	
c	
cena	
cesnak	
cukor	

Videli sme, že všetky spočítateľné množiny reálnych čísle sú nulové. V tejto časti budeme uvažovať príklad nespočítateľnej množiny reálnych čísel, ktorá je nulová. Konkrétne pôjde o Cantorovu množinu. Táto je konštruovaná nasledujúcim spôsobom. Začneme s uzavretým intervalom $[0,1]$ a vynecháme jeho strednú tretinu, t.j. otvorený interval $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Zostane nám množina $C_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$. V ďalšom kroku vynecháme strednú tretinu z každého uzavretého intervalu tvoriaceho množinu C_1. Dostaneme množinu $C_2=[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$. Táto pozostáva zo štyroch uzavretých intervalov, každý z nich má dĺžku $\frac{1}{9}$. Ďalej postupujeme týmto spôsobom tak, že na n-tom kroku dostávame množinu C_n pozostávajúcu z 2^n po dvoch disjunktných uzavretých intervalov, každý z nich má dĺžku $\frac{1}{3^n}$. Teda celková dĺžka množiny C_n je $2^n\times\frac{1}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Množinu $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n$ budeme volať Cantorova množina. Dá sa ukázať, že Cantorova množina obsahuje nespočítateľne veľa čísel. Tak veľa, ako pôvodný interval $[0,1]$, s ktorým sme začínali našu konštrukciu. Ukážeme, že existuje bijekcia Cantorovej množiny na uzavretý jednotkový interval $[0,1]$.

Začneme vyjadrením každého čísla z intervalu $[0,1]$ v trojkovej sústave. Pretože $\frac{1}{3}$ je 0.1 pri základe 3 a $\frac{2}{3}$ je 0.2 pri základe 3, pri konštrukcii množiny C_1 sme vyhodili všetky tie reálne čísla z intervalu $[0,1]$, ktoré v trojkovej sústave majú cifru 1 na prvom mieste za bodkou. Samozrejme, okrem samotného čísla 0.1 pri základe 3. Ale toto číslo má aj reprezentáciu $0.0222\ldots$ pri základe 3, teda ak vyberieme túto jeho reprezentáciu, potom sme vyhodili úplne všetky čísla, ktoré v trojkovej sústave majú cifru 1 na prvom mieste za bodkou. Podobne, pri konštrukcii množiny C_2 sme vyhodili všetky čísla, ktoré v trojkovej sústave majú cifru 1 na druhom mieste za bodkou. Vo všeobecnosti, pri konštrukcii množiny C_n sme vyhodili všetky čísla, ktoré v trojkovej sústave majú cifru 1 na n-tom mieste za bodkou. Odtiaľ vyplýva, že Cantorova množina obsahuje iba tie čísla z intervalu $[0,1]$, ktoré v trojkovej sústave neobsahujú cifru 1 na žiadnom mieste za bodkou. Inými slovami, prvkomi Cantorovej množiny sú tie reálne čísla z intervalu $[0,1]$, ktoré v trojkovej sústave obsahujú iba nuly a dvojky. Napríklad číslo $\frac{1}{4}$ musí ležať v množine C, pretože jeho vyjadrenie v trojkovej sústave je $0.0202\ldots$, teda obsahuje len nuly a dvojky. Ale číslo $\frac{1}{8}$ nemôže ležať v množine C, pretože jeho vyjadrenie v trojkovej sústave je $0.0101\ldots$, teda obsahuje cifru 1 na druhom mieste za bodkou. Museli sme ho vyhodiť pri konštrukcii množiny C_2.

Teda sme charakterizovali Cantorovu množinu C ako množinu obsahujúcu všetky tie reálne čísla z uzvretého intervalu $[0,1]$, ktorých vyjadrenie v trojkovej sústave obsahuje len nuly a dvojky. Koľko je takýchto čísel? Odpoveď je: toľko, ako je všetkých čísel v intervale $[0,1]$, t.j. nespočítateľne veľa. Aby sme to ukázali, budeme reprezentovať každé číslo z intervalu $[0,1]$ v dvojkovej sústave. Napríklad, číslo $\frac{1}{3}$ je $0.0101\ldots$ v dvojkovej sústave. Predpokladajme, že sme nahradili všetky jedničky v tejto reprezentácii dvojkami. Potom sme dostali číslo obsahujúce iba nuly a dvojky, čo reprezentuje v trojkovej sústave číslo patriace do množiny C. Teda musí byť aspoň tak veľa čísel v množine C, ako je ich v intervale $[0,1]$. Nemôže ich byť viac, pretože množina C vznikla vynechávaním čísel z intervalu $[0,1]$. Odtiaľ vyplýva, že Cantorova množina obsahuje tak isto veľa čísle, ako ich obsahuje interval $[0,1]$.

Formálnejšie, môžeme vytvoriť bijekciu množiny C na interval $[0,1]$, ktorá každému číslu množiny C, ktorého reprezentácia v trojkovej sústave obsahuje len nuly a dvojky, priradí to číslo z intervalu $[0,1]$, ktorého reprezentácia v dvojkovej sústave sa vytvorí tak, že nuly zostanú na svojom mieste a dvojky sa nahradia jedničkami.

Pretože interval $[0,1]$ má dĺžku jedna, Cantorova množina je nulová. Môžeme to ukázať pomocou definície. Pre pevne zvolené $\varepsilon > 0$ vyberme n tak veľké, že $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$. Definujme postupnosť intervalov $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ tak, že prvých 2^n intervalov tejto postupnosti bude presne tých istých 2^n intervalov, ktoré tvoria množinu C_n a zostávajúce intervaly budú nulovej dĺžky. Potom $C \subset C_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ a $\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) = \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$. Teda C je nulová množina. A to aj napriek tomu, že je nespočítateľná.

Vyjadrenie čísla v trojkovej sústave
V desiatkovej sústave číslo $0.1204345\ldots$ znamená

$$1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 0 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-4} + 3 \times 10^{-5} + 4 \times 10^{-6} + 5 \times 10^{-7} + \ldots$$

Vyjadrenie čísla v trojkovej sústave je podobné, len namiesto mocnín čísla 10 použijeme mocniny čísla 3. Napríklad, vyjadrenie čísla $\frac{1}{2}$ v trojkovej sústave nájdeme nasledujúcim spôsobom. Najskôr poznamenajme, že budem potrebovať iba záporné mocniny čísla 3. Všimnime si, že $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$. Teda prvá cifra za bodkou bude jednička. Musíme použiť 1×3^{-1}. Vypočítajme rozdiel $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Pretože $\frac{1}{9} < \frac{1}{6} < \frac{2}{9}$, musíme použiť 1×3^{-2}. Vypočítame rozdiel $\frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$. Takto pokračujeme ďalej. Zistíme, že vyjadrenie čísla $\frac{1}{2}$ v trojkovej sústave je $0,111\ldots$. Môžeme to overiť tak, že $3^{-1} + 3^{-2} + 3^{-3} + \ldots$ je geometrický rad s prvým členom $a = \frac{1}{3}$ a s kvocientom $q = \frac{1}{3}$, teda jeho súčet je $\frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$.

Lema 2. *Nech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je nezáporná Riemannovsky integrovateľná funkcia, ktorej integrál je rovný nule. Potom pre všetky $c > 0$ množina $\{x \in [a, b] : f(x) \geq c\}$ má nulovú mieru.*

Dôkaz. Nech $c > 0$. Položme $E = \{x \in [a, b] : f(x) \geq c\}$.

Nech $\varepsilon > 0$. Potom existuje delenie $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ intervalu $[a, b]$ také, že $\overline{I}(f, P) < c\varepsilon$, kde $\overline{I}(f, P)$ označuje horný Riemannov súčet odpovedajúci deleniu P, t.j.

$$\overline{I}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

kde

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in (x_{i-1}, x_i)\}.$$

Položme $I = \{i : E \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset\}$. Ak $i \in I$, potom $M_i \geq c$. Teda

$$c\varepsilon > \overline{I}(f, P) \geq \sum_{i \in I} M_i(x_i - x_{i-1}) \geq c \sum_{i \in I} (x_i - x_{i-1}).$$

Odtiaľ vyplýva, že $\sum_{i \in I} \ell([x_{i-1}, x_i]) = \sum_{i \in I} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$. Pritom množina E je pokrytá konečnou množinou intervalov $\{(x_{i-1}, x_i) : i \in I\} \cup \{[x_k, x_k] : k = 1, \ldots, n\}$.

Tým sme overili, že množina E má nulovú mieru.

Hovoríme, že vlastnosť V platí skoro všade na intervale $[a, b]$, ak množina všetkých tých $x \in [a, b]$, ktoré vlastnosť V nemajú, má nulovú mieru.

Dôsledok 3. *Nech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je nezáporná Riemannovsky integrovateľná funkcia, ktorej integrál je rovný nule. Potom f je nulová skoro všade.*

Dôkaz. Množina $\{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in [a, b] : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$, teda je to podľa predošlej lemy spočítateľné zjednotenie množín nulovej miery. Musí mať teda nulovú mieru.

Nech f je ohraničená funkcia, ktorá je definovaná na intervale $[a, b]$. Nech $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ je delenie intervalu $[a, b]$. Pre každé $i = 1, 2, \dots, n$ položme

$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} < x < x_i\},$$
$$M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} < x < x_i\}.$$

2

Nech φ a ψ sú schodovité funkcie

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} m_j \chi_{(x_{j-1},x_j)} + \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\chi_{[x_k,x_k]},$$
$$\psi = \sum_{j=1}^{n} M_j \chi_{(x_{j-1},x_j)} + \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\chi_{[x_k,x_k]}.$$

Ľahko sa overí, že $I(\phi) = U(f,P)$ a $I(\psi) = L(f,P)$. Pripomeňme si, že horný Riemannov integrál je daný predpisom

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f,P) : P \text{ je delenie intervalu } [a,b]\}$$

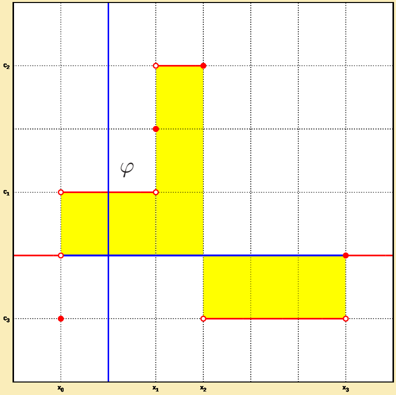
a dolný Riemannov integrál je daný predpisom

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P) : P \text{ je delenie intervalu } [a,b]\}.$$

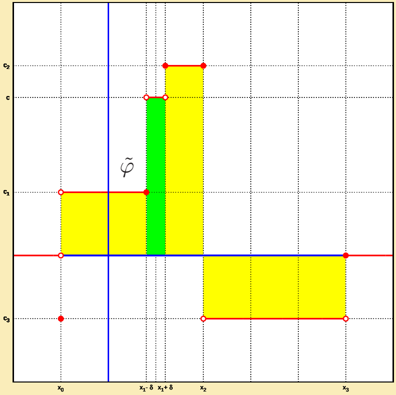
Podľa definície, funkcia je Riemannovsky integrovateľná, ak jej dolný integrál sa rovná jej hornému integrálu.

Schodovitú funkciu φ chceme modifikovať takým spôsobom, že bod x_k z delenia P nahradíme dvojicou bodov $x_k^- = x_k - \delta$ a $x_k^+ = x_k + \delta$, pričom na intervale (x_k^-, x_k^+) bude nová funkcia $\tilde{\varphi}$ nadobúdať konštantnú hodnotu c. Číslo $\delta > 0$ zvolíme tak, aby platilo $x_{k-1} < x_k - \delta$ a $x_k + \delta < x_{k+1}$.

4



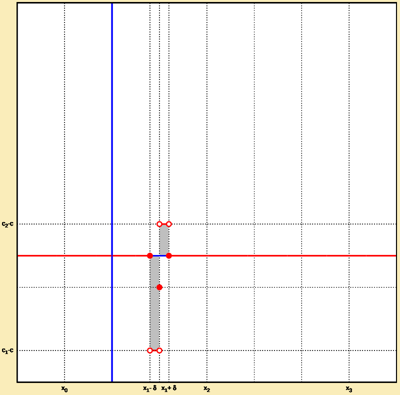
c_2
c_1
c_3
φ
x_0
x_1
x_2
x_3



c_2
c
c_1
c_3
$\tilde{\varphi}$
x_0
$x_1 - \delta$
$x_1 + \delta$
x_2
x_3

Spojitosť skoro všade

$\varphi - \tilde{\varphi}$



$I(\varphi - \tilde{\varphi}) = (c_k - c)\delta + (c_{k+1} - c)\delta$
Pre každé $\varepsilon > 0$ môžeme vybrať $\delta > 0$ tak, aby platilo $|I(\varphi - \tilde{\varphi})| < \varepsilon$.

Pre $c = \min\{c_k, c_{k+1}, \varphi(x_k)\}$ máme $\varphi \geq \tilde{\varphi}$.

Pre $c = \max\{c_k, c_{k+1}, \varphi(x_k)\}$ máme $\varphi \leq \tilde{\varphi}$.

Veta. *Nech* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je Riemannovsky integrovateľná funkcia. Potom* f *je spojitá skoro všade.*

Dôkaz. Položme

$$g = \sup\{\varphi \in \mathcal{L}_{\text{step}} : \varphi \le f\chi_{(a,b)}\},$$
$$h = \inf\{\psi \in \mathcal{L}_{\text{step}} : \psi \ge f\chi_{(a,b)}\}.$$

Zrejme platí $g \le f\chi_{(a,b)} \le h$.

Ukážeme, že funkcia g je Riemannovsky integrovateľná. Nech φ je taká schodovitá funkcia, že $\varphi \le f\chi_{(a,b)}$. Potom

$$I(\varphi) = \int_a^b \varphi \le \underline{\int_a^b} g \le \overline{\int_a^b} g \le \int_a^b f.$$

Odtiaľ

$$\int_a^b f = \sup\{I(\varphi) : \varphi \in \mathcal{L}_{\text{step}}, \varphi \le f\chi_{(a,b)}\} \le \underline{\int_a^b} g \le \overline{\int_a^b} g \le \int_a^b f.$$

Teda
$$\underline{\int_a^b} g = \overline{\int_a^b} g = \int_a^b f.$$
Podobne sa dá ukázať, že
$$\underline{\int_a^b} h = \overline{\int_a^b} h = \int_a^b f.$$
Pretože $g \leq h$ a $\int_a^b g = \int_a^b h$, platí $g = h$ skoro všade. To znamená, že množina
$$E = \{x \in [a,b] : g(x) \neq h(x)\}$$
má mieru nula.

Ukážeme, že na množine $(a,b) \setminus E$ je funkcia f spojitá. Nech $x_0 \in (a,b) \setminus E$. Nech $\varepsilon > 0$. Potom $g(x_0) = f(x_0) = h(x_0)$.

Z definície funkcie g vyplýva, že existuje schodovitá funkcia φ taká, že $\varphi \leq f\chi_{(a,b)}$ a $g(x_0) - \varepsilon/2 < \varphi(x_0)$. Pritom môžeme predpokladať, že funkcia φ je konštantná na nejakom okolí bodu x_0 (ak bod x_0 patrí do delenia z predpisu pre funkciu φ, použijeme postup na jeho nahradenie bodmi x_0^- a x_0^+, ktorý je popísaný vyššie).

Podobne, z definície funkcie h vyplýva, že existuje schodovitá funkcia ψ taká, že $\psi \geq f\chi_{(a,b)}$ a $h(x_0) + \varepsilon/2 > \psi(x_0)$. Pritom môžeme predpokladať, že funkcia ψ je konštantná na nejakom okolí bodu x_0.

Nech $\delta > 0$ je také, že funkcie φ a ψ sú konštantné na intervale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Potom na intervale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} = g(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < \varphi(x_0) = \varphi \leq f \leq \psi = \psi(x_0) < h(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} = f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Veta. *Nech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia, ktorá je spojitá skoro všade. Potom f je Riemannovsky integrovateľná.*

Dôkaz. Pretože funkcia f je ohraničená, existuje konštanta M taká, že $|f(x)| \leq M$ pre každé $x \in [a,b]$. Nech $E \subset [a,b]$ je taká množina miery nula, že f je spojitá na množine $[a,b] \setminus E$. Potom pre všetky $x, y \in [a,b]$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq 2M.$$

Nech $\varepsilon > 0$. Pretože množina E má mieru nula, existujú otvorené intervaly $I_1, I_2, \ldots$ také, že $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \frac{\varepsilon}{4M}$. Pre každé $x \in [a,b] \setminus E$

4

existuje otvorený interval J_x taký, že $x \in J_x$ a $|f(z) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ pre každé $y, z \in J_x \cap [a, b]$, pretože f je spojitá v bode x. Potom

$$\{I_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{J_x : x \in [a, b] \setminus E\}$$

je pokrytie intervalu $[a, b]$ otvorenými intervalmi. Pretože uzavretý interval je kompaktná množina, existuje jeho konečné podpokrytie

$$\{I_k : k = 1, \ldots, n\} \cup \bigcup_{i=1}^{m} \{J_{x_i} : x_i \in [a, b] \setminus E\}.$$

Nech $P = \{a = t_0, \ldots, t_N = b\}$ je delenie intervalu $[a, b]$ zložené z koncových bodov intervalov tohto konečného podpokrytia. Pritom každý interval (t_{j-1}, t_j) je celý obsiahnutý v niektorom I_k alebo v niektorom J_{x_i}. Položme

$$J = \{j : (t_{j-1}, t_j) \subset I_k \text{ pre nejaké } k\}.$$

Potom $\overline{I}(f,P) - \underline{I}(f,P) = \sum_{j=1}^{N} \sup\{f(x)-f(y) : x,y \in (t_{j-1},t_j)\}(t_j - t_{j-1})$

$$\leq \sum_{j\in J} 2M(t_j - t_{j-1}) + \sum_{j\notin J} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(t_j - t_{j-1})$$

$$< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Teda f je Riemannovsky integrovateľná.

Lebesgue

Henri Léon Lebesgue

Veta. *(Lebesgue, 1902) Nech* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je ohraničená funkcia. Potom funkcia* f *je Riemannovsky integrovateľná práve vtedy, keď* f *je spojitá skoro všade.*

Ukážeme, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\ln 2.$$

Najskôr daný výraz upravíme do tvaru, v ktorom môžeme rozpoznať Riemannov integrálny súčet:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\ln 2.$$

Túto limitu môžeme použiť pri hľadaní súčtu nasledujúceho radu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

2

Pre jeho čiastočné súčty máme:

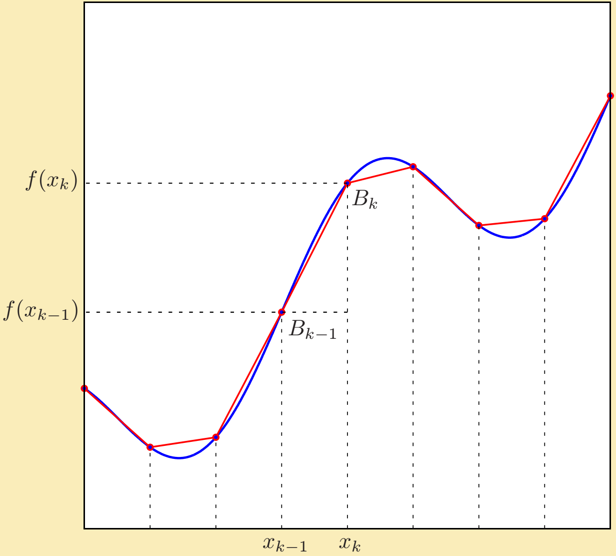
$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Teda $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = \ln 2$. Pretože $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, máme tiež $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = \ln 2$.

Domáca úloha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \qquad (\alpha > 0).$$

Dĺžka krivky - grafu funkcie



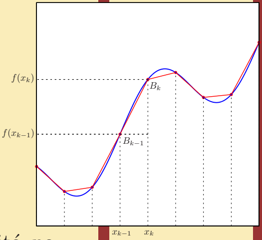
Uvažujme delenie P intervalu $[a,b]$ na n podintervalov $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$, kde

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Jednotlivé dvojice bodov $B_{k-1} = (x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ a $B_k = (x_k, f(x_k))$ spojíme úsečkami. Takto vznikne lomená čiara, ktorá je aproximáciou grafu funkcie f na intervale $[a,b]$.

Dĺžka úsečky $B_{k-1}B_k$ je rovná vzdialenosti jej krajných bodov, t.j.

$$|B_{k-1}B_k| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$



Preto dĺžka celej lomenej čiary $B_0B_1\ldots B_n$ je rovná číslu

$$\ell_P = \sum_{k=1}^{n} |B_{k-1}B_k| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Podľa vety o strednej hodnote (ak predpokladáme, že funkcia f je spojitá na intervale $[x_{k-1},x_k]$ a diferencovateľná na intervale (x_{k-1},x_k)) potom existuje bod $x_k^* \in (x_{k-1},x_k)$ taký, že platí

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}).$$

Teda

$$\ell_P = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}(x_k - x_{k-1}).$$

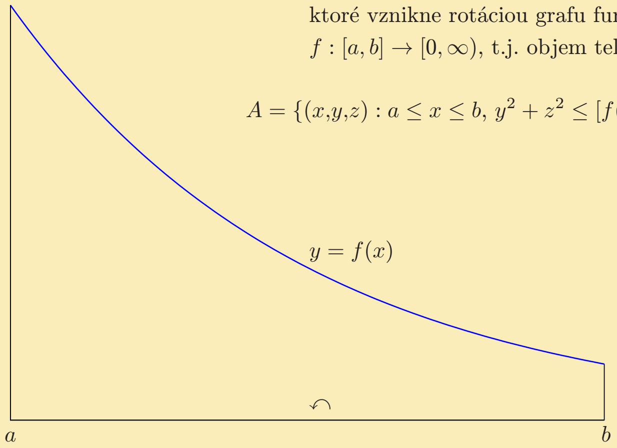
To je však Riemannov integrálny súčet funkcie $\sqrt{1 + [f']^2}$ pre delenie P.

Preto za dĺžku krivky, ktorá je grafom funkcie f, môžeme prehlásiť číslo

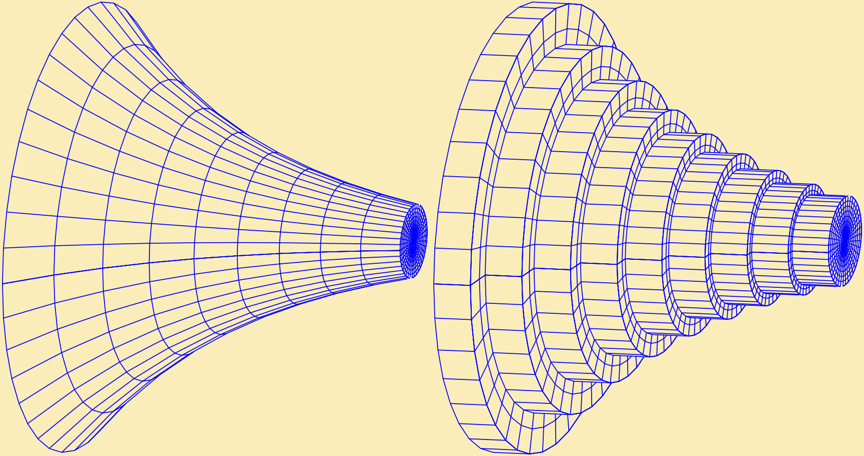
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f']^2}.$$

Chceme nájsť objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou grafu funkcie $f:[a,b]\to[0,\infty)$, t.j. objem telesa

$$A=\{(x,y,z): a\le x\le b,\ y^2+z^2\le[f(x)]^2\}.$$



2



Nech P je delenie intervalu $[a, b]$, t.j.

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Opísaný valec nad intervalom $[x_{i-1}, x_i]$ má objem

$$\pi M_i^2 (x_i - x_{i-1}),$$

vpísaný valec má objem

$$\pi m_i^2 (x_i - x_{i-1}).$$

Preto pre objem $V(A)$ rotačného telesa A platí

$$\sum_{i=1}^{n} \pi m_i^2 (x_i - x_{i-1}) \le V(A) \le \sum_{i=1}^{n} \pi M_i^2 (x_i - x_{i-1}).$$

To sa dá prepísať takto:

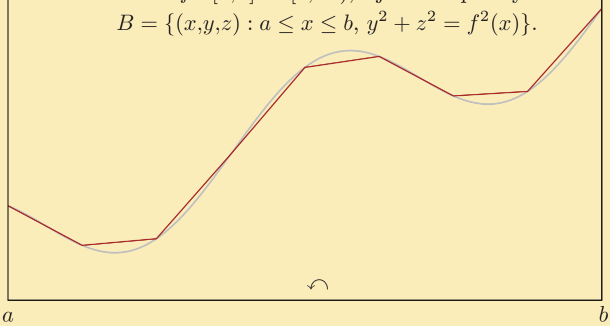
$$L(\pi f^2, P) \le V(A) \le U(\pi f^2, P).$$

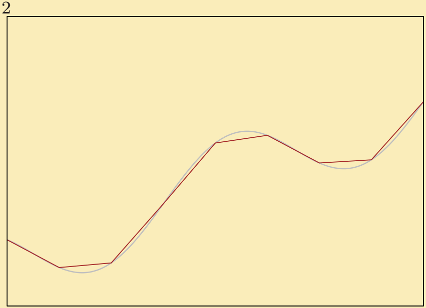
Preto

$$V(A) = \int_a^b \pi f^2.$$

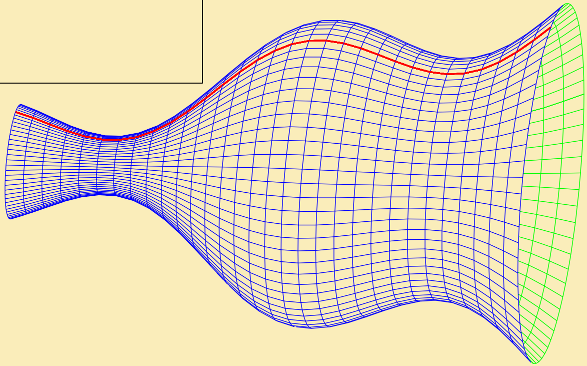
Chceme nájsť obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou grafu funkcie $f : [a, b] \to [0, \infty)$, t.j. obsah plochy

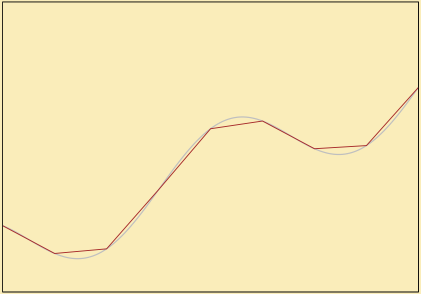
$$B = \{(x,y,z) : a \le x \le b,\ y^2 + z^2 = f^2(x)\}.$$



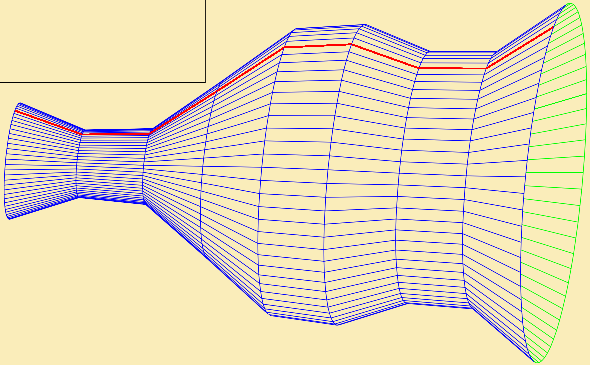


Rotačná plocha

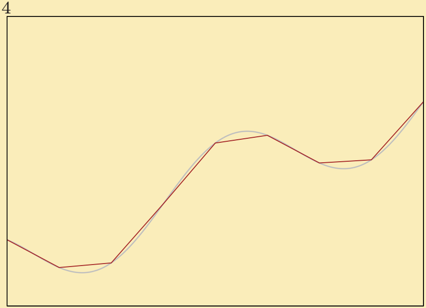




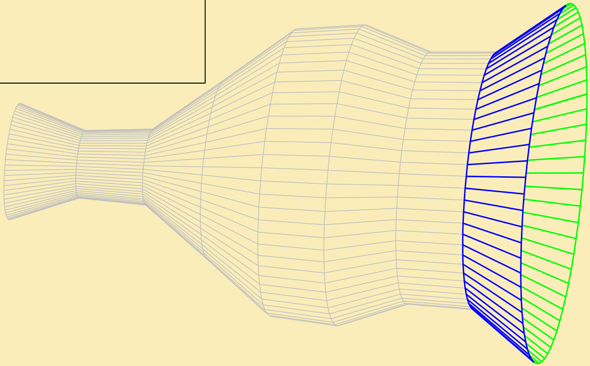
Aproximácia plochy



Obsah rotačnej plochy



Plášť zrezaného rotačného kužeľa



Ukážeme, že za predpokladu spojitosti derivácie platí vzorec

$$S(B) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Graf danej funkcie sme aproximovali lomenou čiarou. Rotáciou tejto lomenej čiary dostávame plochu B^* zloženú z plášťov zrezaných rotačných kužeľov. Nech P je delenie intervalu $[a, b]$ určené bodmi

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Plášť i-teho zrezaného rotačného kužeľa má obsah

$$2\pi \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

(zopakujte si odvodenie vzorca zo stredoškolskej matematiky). Potom obsah rotačnej plochy B^* je

$$S(B^*) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Podľa vety o strednej hodnote existuje bod $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$ taký, že platí

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}).$$

Teda

$$S(B^*) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Pretože funkcia f je spojitá, existuje bod $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ taký, že

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = f(\xi_i).$$

Položme $g = \sqrt{1 + f'^2}$. Potom

$$S(B^*) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) g(x_i^*)(x_i - x_{i-1}).$$

Tento súčet však nie je Riemannovým súčtom, pretože body x_i^* a ξ_i sú vo všeobecnosti navzájom rôzne. Stačí však použiť zovšeobecnené Riemannove súčty.

Nech f a g sú ohraničené funkcie, ktoré sú definované a spojité v každom bode intervalu $[a, b]$. Potom ich súčin fg je integrovateľná funkcia na intervale $[a, b]$. Ukážeme, že integrál tejto funkcie môžeme aproximovať zovšeobecnenými Riemanovými súčtami:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)(x_i - x_{i-1}),$$

kde delenie P je určené bodmi

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

pričom ξ_i a η_i sú ľubovoľné body z intervalu $[x_{i-1}, x_i]$.

Nech $\varepsilon > 0$. Zo spojitosti funkcie f na intervale $[a, b]$ vyplýva jej rovnomerná spojitosť, teda existuje $\delta > 0$ s vlastnosťou

$$|x' - x''| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Budeme uvažovať delenie P také, že $x_i - x_{i-1} < \delta$ pre každé $i = 1, \ldots, n$. Pretože funkcia g je ohraničená na intervale $[a, b]$, existuje konštanta M taká, že

$|g(x)| \leq M$ pre každé $x \in [a,b]$. Potom pre ľubovoľné body ξ_i a η_i z intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \dots, n)$ máme

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)g(\eta_i)(x_i - x_{i-1})\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i) - f(\eta_i)]g(\eta_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i) - f(\eta_i)||g(\eta_i)|(x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon M(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon M(b-a).$$

Ostatné kroky si doplňte samostatne.

Literatúra

[1] Kuratowski, K., *Introduction to Calculus*, Pergamon Press, 1962.

[2] Лузин, Н. Н., *Интегральное исчисление*, «Высшая школа», Москва, 1961.

Platí nasledujúca veta:

Veta. *(G. A. Bliss, 1914) Nech f a g sú ohraničené funkcie, ktoré sú definované a spojité v každom bode intervalu $[a,b]$. Potom ich súčin fg je integrovateľná funkcia na intervale $[a,b]$ a jej integrál môžeme aproximovať zovšeobecnenými Riemannovými súčtami nasledujúcim spôsobom: pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že*

$$\left| \int_a^b fg - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon,$$

kde body

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

sú také, že pre každé i platí

$$0 < x_i - x_{i-1} < \delta,$$

pričom ξ_i a η_i sú ľubovoľné body z intervalu $[x_{i-1}, x_i]$.

Literatúra

[1] Thomson, B. S., *The Calculus Integral*, ClassicalRealAnalysis.com, 2010, ISBN 1442180951.