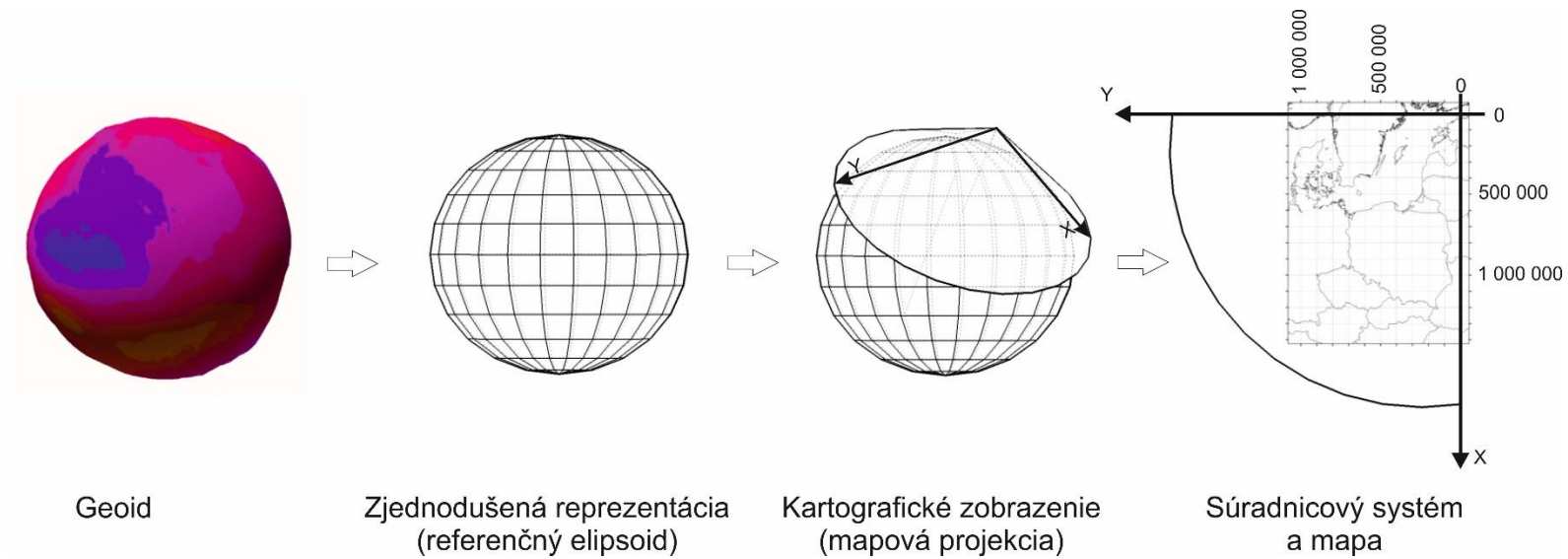




Tvar zemského telesa

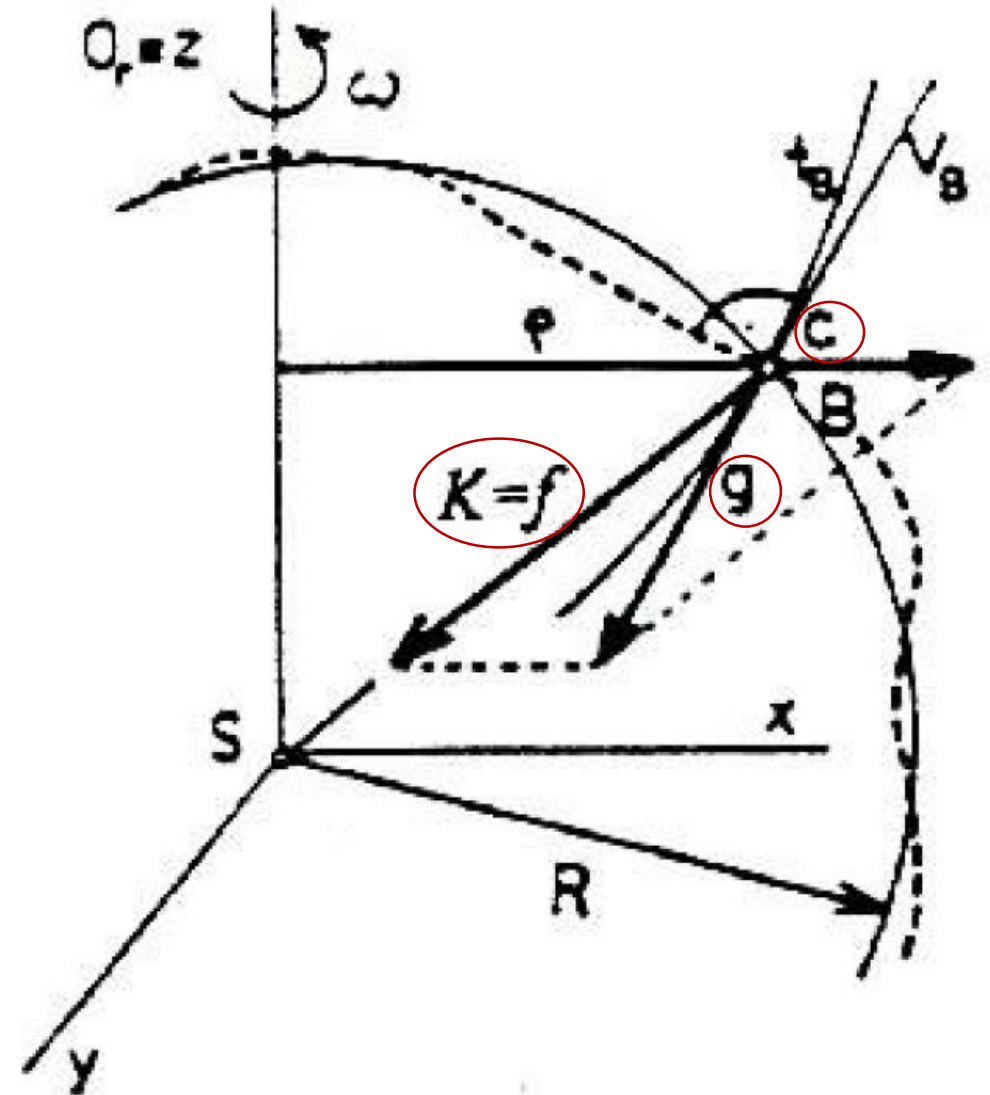
Geoid

Referenčné plochy

Tvar zemského telesa

Newtonov gravitačný zákon

- Teleso vytvára nad svojím povrchom **gravitačné pole**
- V každom bode na zemskom povrchu aj jeho okolí pôsobí **príťažlivá (gravitačná) sila Zeme** – f
- V dôsledku otáčania Zeme pôsobí **odstredivá sila Zeme** – c
- Výslednica týchto síl je **tiažové pole** – tiažové zrýchlenie - g



Tvar zemského telesa

K – je intenzita gravitačného poľa pôsobiaca na objekty s hmotnosťou

K sa v každom bode poľa rovná f

R polomer telesa (Zeme)

Na bod B pôsobí podľa NGZ sila

$$K = GMR^{-2}$$

$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ - gravitačná konštanta

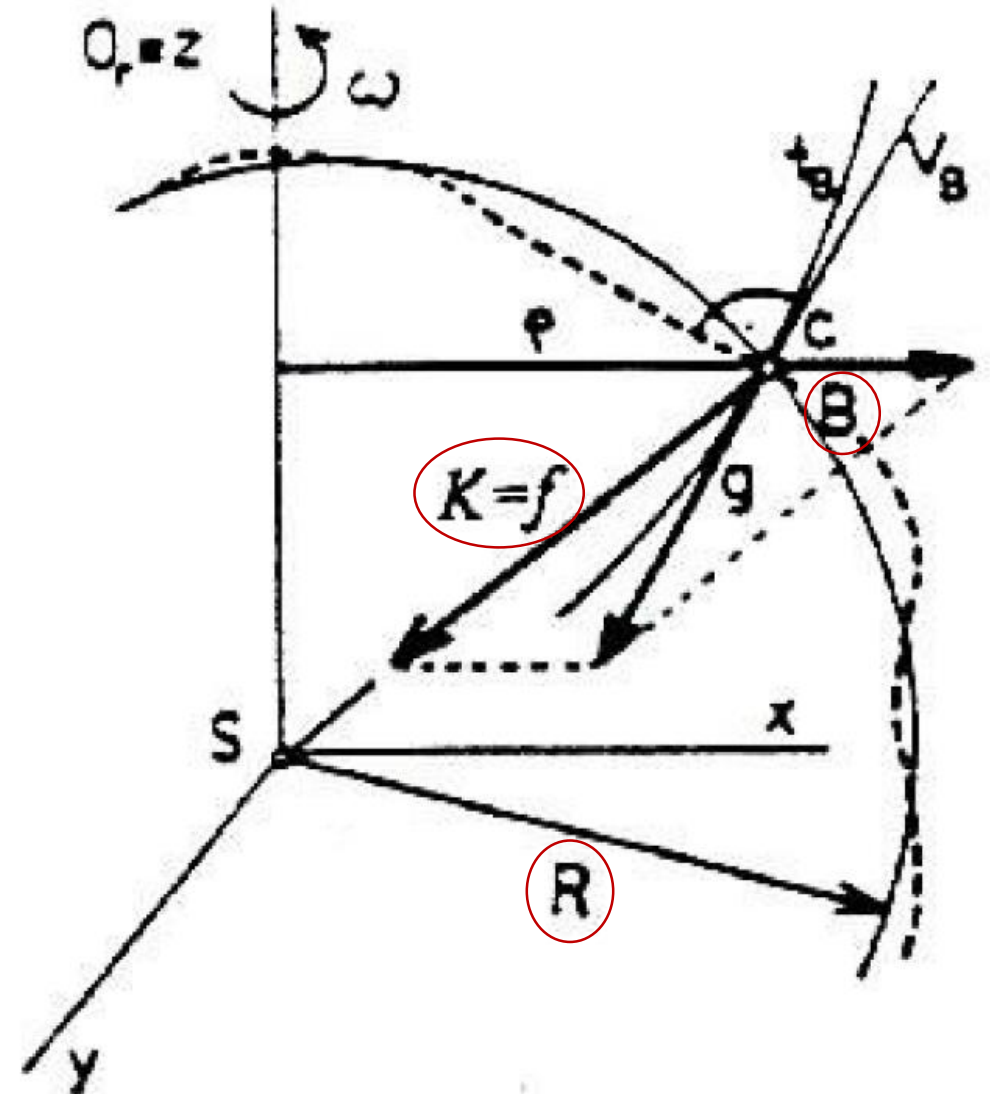
$M = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ – hmotnosť Zeme

g je podmienené pôsobením rotácie Zeme

$$c = \omega^2 \rho$$

ω je uhlová rýchlosť

ρ je vzdialenosť bodu B od rotačnej osi



Tvar zemského telesa

Zároveň platí, že

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} + \mathbf{c}$$

Zemská tiaž je súčtom vektorov príťažlivej sily Zeme a odstredivej sily Zeme

Gravitačné pole možno definovať aj potenciálmi W , V a P (potenciál je energia prislúchajúca polohe danej sústavy)

$$W=V+P$$

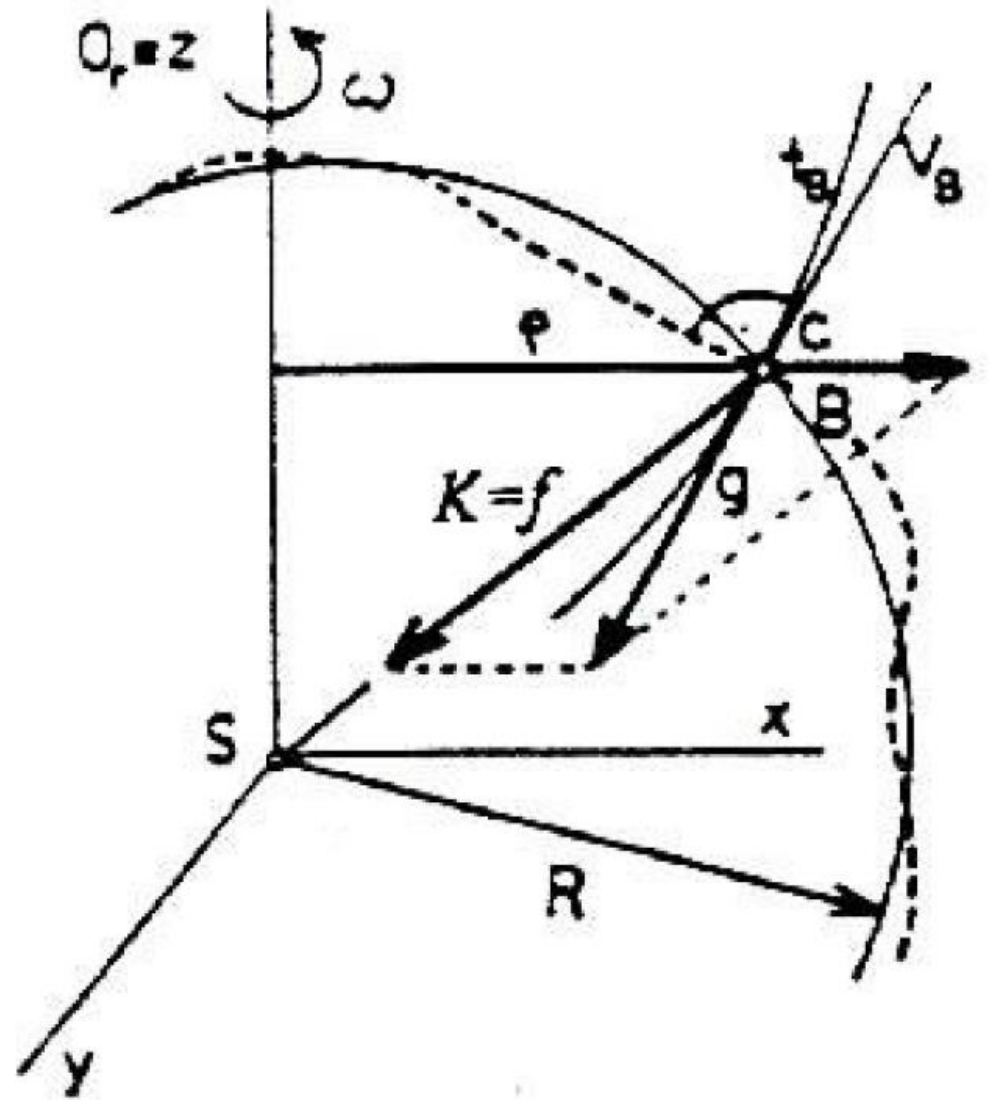
W – tiažový potenciál

V – gravitačný potenciál

P – odstredivý potenciál

Pre uvažovaný kolmý smer tiažového zrýchlenia platí

$W = C$ (konštanta)



Potenciál je množstvo práce potrebnej na prenesenie jednotkového elektrického náboja z bodu s nulovým prisúdeným potenciálom do daného miesta

Tvar zemského telesa

$$W=V+P$$

$$W = C \text{ (konštanta)}$$

V ľubovoľnej výške vo vzťahu k hladine mora dostaneme inú hladinovú plochu $W_1, W_2 \dots W_n$

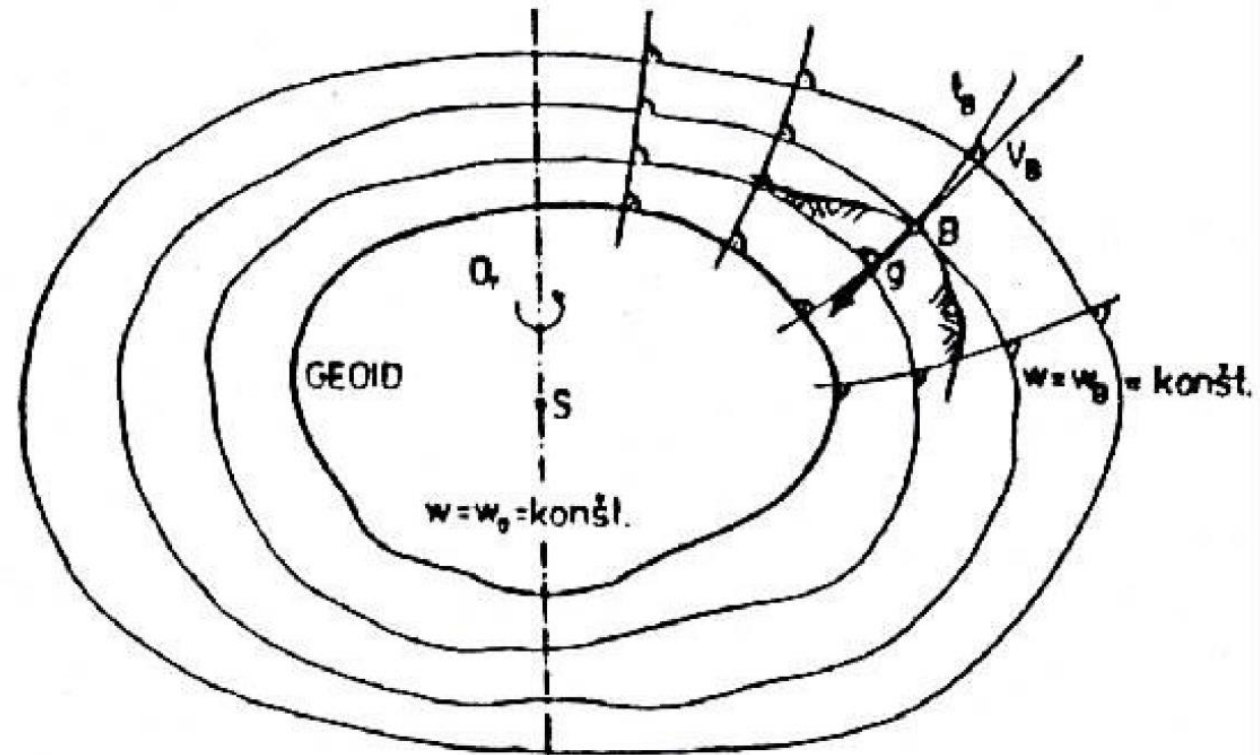
$W=V+P$ – vyjadruje plochy, v ktorých každá má v ľubovoľnom bode rovnakú hodnotu potenciálu.

Tieto plochy sa nazývajú ekvipotenciálne, resp. geopotenciálne alebo hladiné plochy tiaže.

Z toho vyplýva, že každá ekvipotenciálna plocha je kolmá na príslušný smer zemskej tiaže.

g rastie od rovníka k pólom

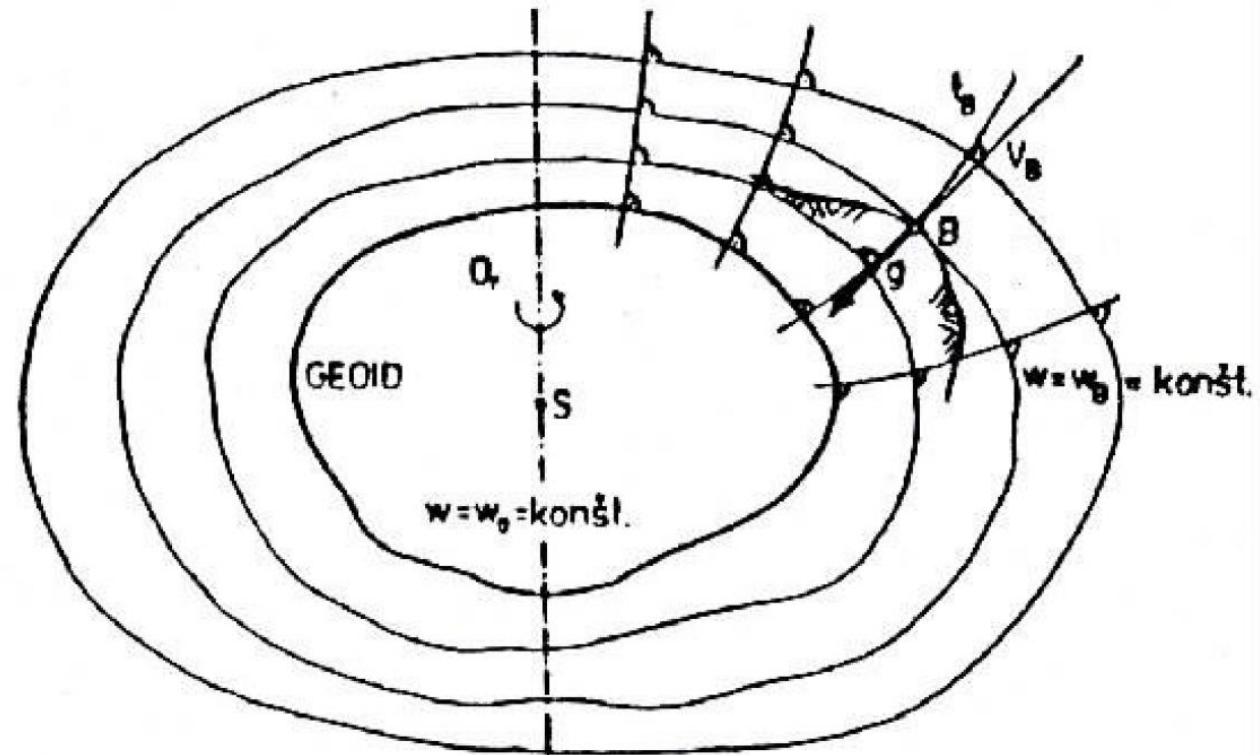
Póly majú nulovú odstredivú silu.



Tvar zemského telesa

g rastie od rovníka k pólom

Hladinové plochy sa budú smerom k pólom navzájom približovať.



Tvar zemského telesa

Ak chceme znázorňovať zemský povrch na mapu, musíme najskôr vyjadriť povrch Zeme.

Zemský povrch je veľmi zložitý a členitý (pohoria, údolia) => **matematicky ťažko definovateľný**. Navyše, povrch Zeme (ktorý vyjadruje tvar zemského telesa) je výslednicou pôsobenia endogénnych a exogénnych procesov.

Pre vyjadrenie skutočného tvar Zeme sa používajú fyzikálne teórie.

Ak chceme Zemský povrch vyjadriť, musíme ho zjednodušiť.

Ak by bol zemský povrch tvorený ideálnou tekutinou, jeho tvar by bol výslednicou tiažového poľa Zeme.

- základnou plochou zemského telesa je **geoid**.

Geoid

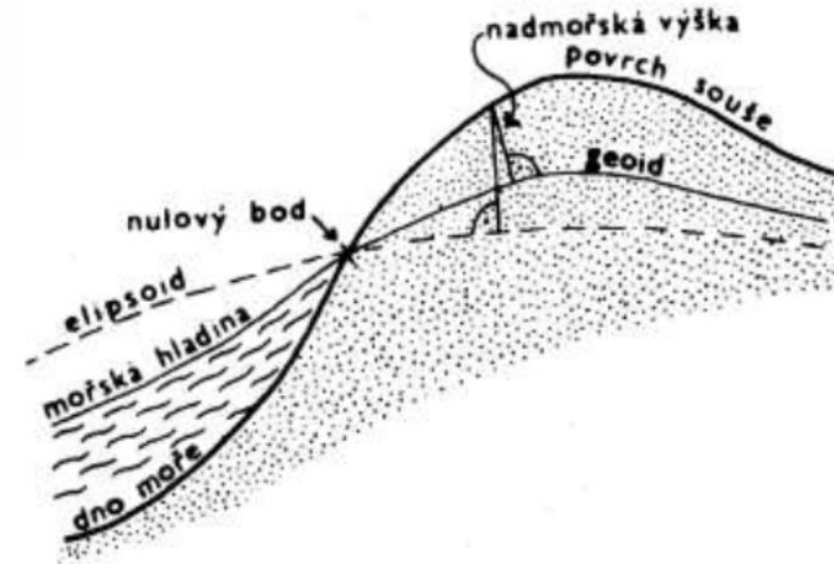
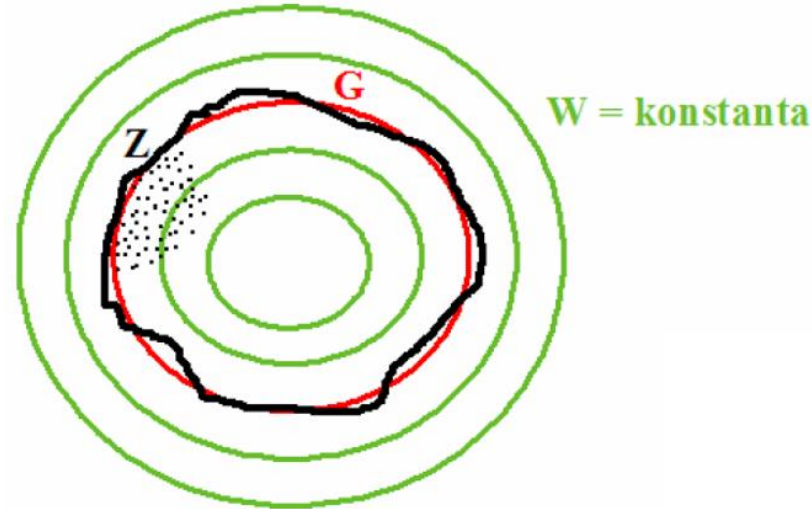
Pojem „geoid“ zaviedol v roku 1873 J. B. Listing.

- uzavretá spojitá plocha so zložitým a nepravidelným priebehom;
- vyjadruje hustotné a objemové zloženie látok zemskej kôry;
- analytická plocha, ktorú nemožno použiť pre polohové výpočty.

Geoid je ekvipotenciálna plocha
(s konštantným tiažovým potenciálom na svojom povrchu, $W_0 = \text{konšt.}$), **ktorá sa najviac primyká strednej kľudovej hladine mora a zároveň prechádza daným výškovým bodom**

Používa sa:

- Pre určenie referenčnej plochy (gule a elipsoidu)
- Ako referenčná plocha pre určenie výšky



Geoid

Problém vyjadrenia geoidu a teda aj vyjadrenia nadmorskej výšky je omnoho zložitejší, čomu sa venuje predovšetkým fyzikálna a astronomická geodézia.

Ide o **dynamické teleso**, nakoľko dochádza neustále k jeho zmene, na čo má vplyv

- meniace sa gravitačné pole Mesiaca a Slnka,
- presun pevninových, vodných a vzdušných mäs

Nepoznáme zloženie látok v Zemskom telese ani ich rozmiestnenie

⇒ dochádza k jeho regularizácii (harmonizácii) – Stoke

Pre vyjadrenie geoidu sa v súčasnosti používa jeho sférická harmonická reprezentácia vypočítaná z radu koeficientov označovaných ako EGM 2008 (Earth Gravity Model 2008)

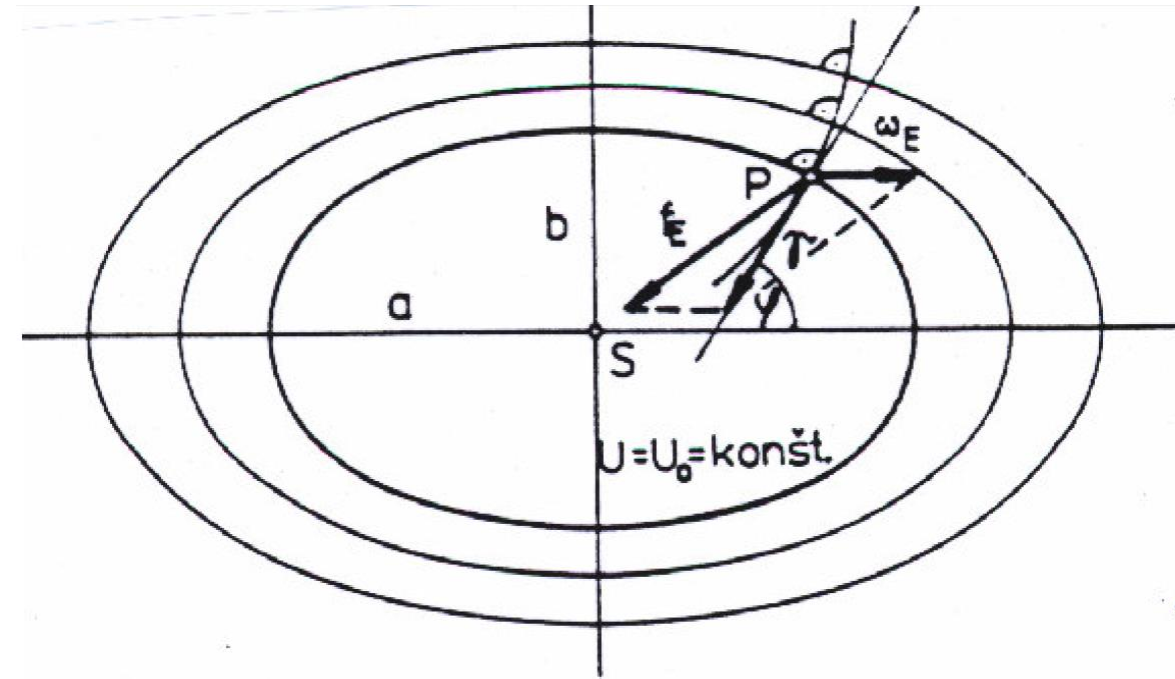
Normálne tiažové pole

Pre najvernejšie zobrazenie povrchu Zeme z hľadiska matematickej parametrizácie je navrhnuté teleso - tzv. normálna Zem

- z geometrického hľadiska ide o rotačný elipsoid (veľká a malá poloos, sploštenie)
- je vyjadrená parametrami odvodenými pre Zemské teleso (hmotnosť, uhlová rýchlosť ...)
- „normálny tvar Zeme“ je potom reprezentované výslednicou pôsobenia gravitačnej a odstredivej sily a výsledný povrch má charakter hladinovej plochy => **normálny elipsoid**

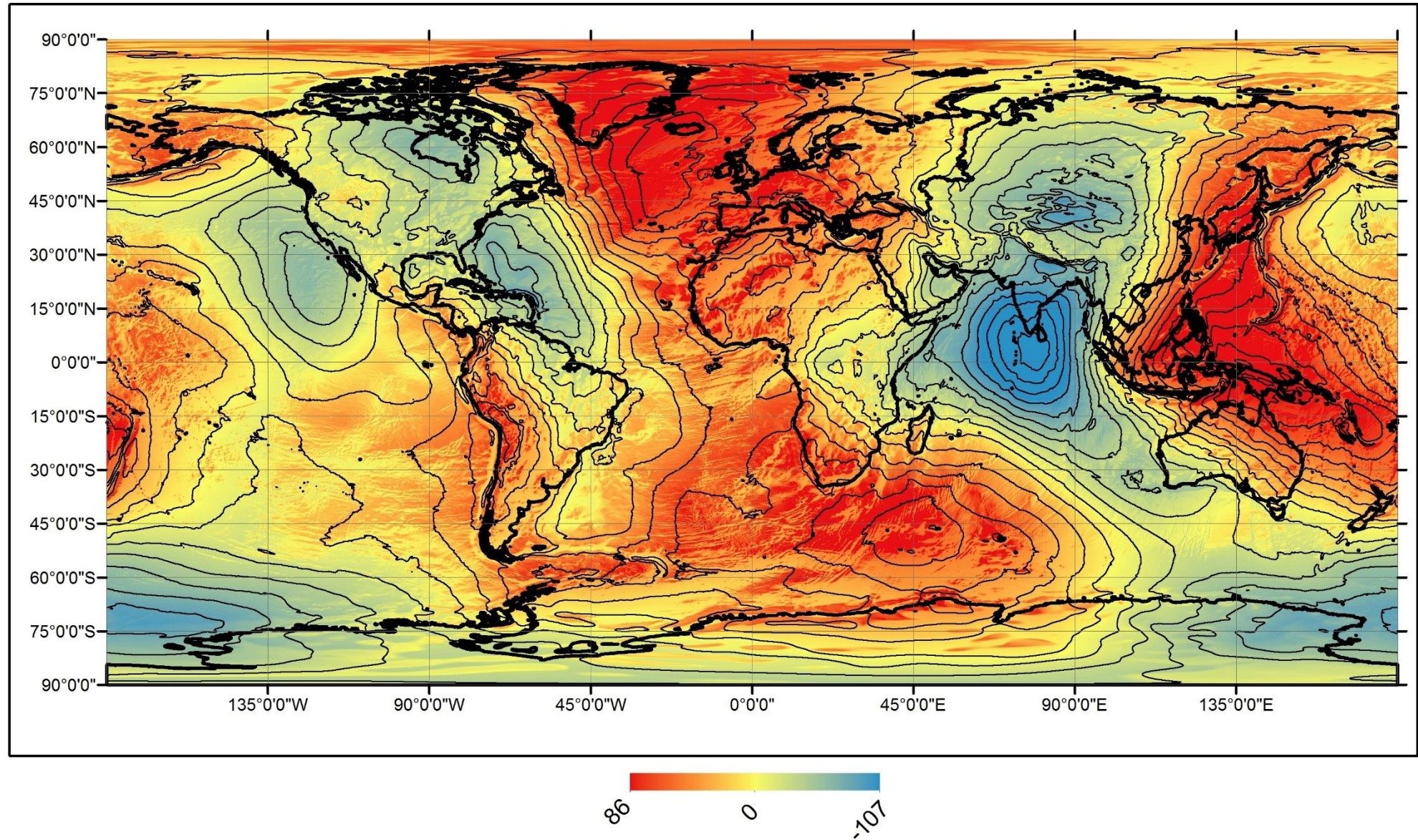
γ – normálne tiažové zrýchlenie
na povrchu Zeme sa používa konštanta $9,80665 \text{ m.s}^{-2}$

Je to priemet intenzity gravitačnej sily do normály k povrchu hladinového elipsoidu.



Geoid

EGM 2008 (Earth Gravity Model 2008)



Výška geoidu EGM 2008 nad referenčným elipsoidom WGS 84 vyjadrená v metroch (interval izolínií 10 m)

Kvázigeoid

V roku 1945 predstavil ruský geodet Molodenskij novú koncepciu riešenia tvaru Zeme.

- teórie určovania výšok na základe povrchových nivelačných a tiažových meraní
- bez použitia hypotéz a rozložení hustoty hmoty medzi geoidom a zemským povrchom.

???Úvaha ???

$$U_B = U(\varphi, h)$$

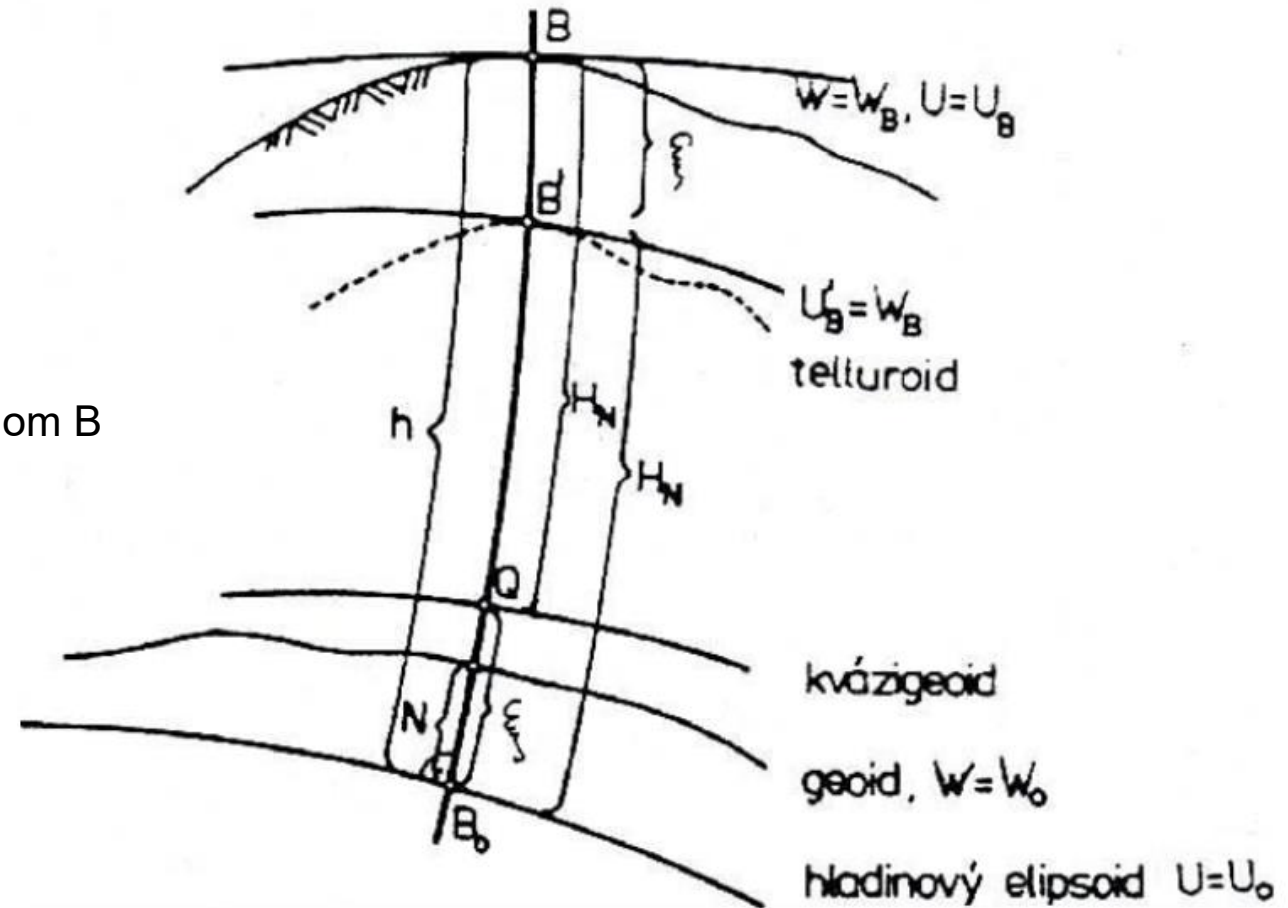
$$W_B - W_0 \neq U_B - U_0 = U(\varphi, h) - U_0$$

W_B – potenciál skutočného tiažového poľa v bode B

U_B – potenciál hladinového tiažového poľa prechádzajúce bodom B

$W_0 = U_0 = \text{konštanta}$

h – výška bodu B nad hladinovým elipsoidom



Kvázigeoid

- Na siločiare t_B prechádzajúcou bodom B je možné určiť takú výšku H_N , kde platí vzťah:

$$W_B - W_O = U(\varphi, h) - U_O$$

Výška H_N na siločiare t_B určuje bod B' , v ktorom platí:

$$W_B = U(\varphi, h) = U'_B$$

Normálny potenciál U'_B sa v bode B' bude rovnať skutočnému potenciálu W_B v bode B = Telluroid

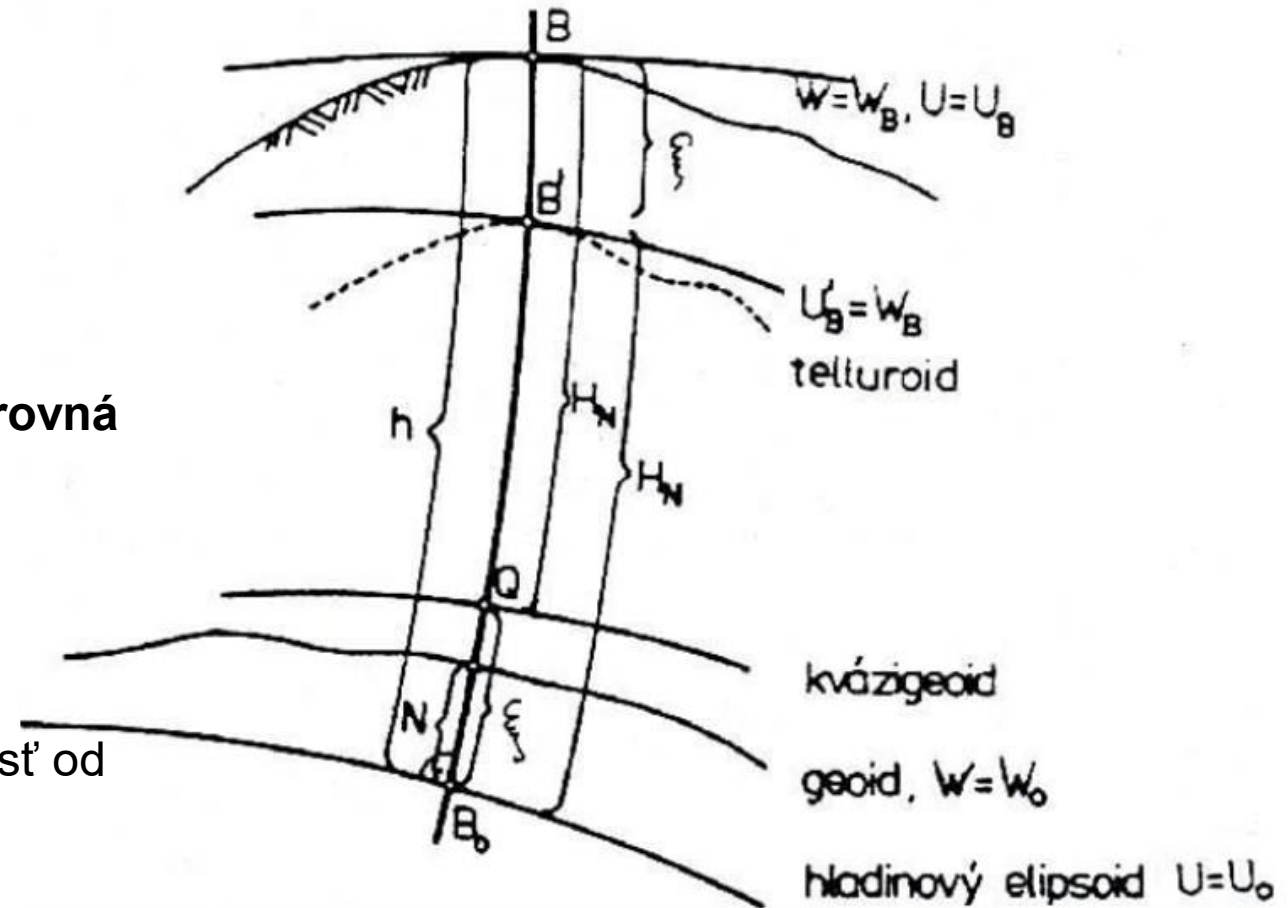
- rozdiel skutočného a normálneho potenciálu sa rovná

H_N - normálna výška bodu B, resp. výška bodu B' nad hladinovým elipsoidom

Q je bod vynesení v smere siločiar, ktorého vzdialenosť od bodu B je vyjadrená H_N - kvázigeoid

N - výška geoidu nad elipsoidom (výšková anomália)

- Ide o analytickú plochu veľmi podobnú geoidu (rozdiel výšok je približne 2 m v závislosti od lokality), ktorej presnosť je limitovaná presnosťou merania, pričom v oblastiach morí a oceánov splýva s geoidom.



Zjednodušená reprezentácia

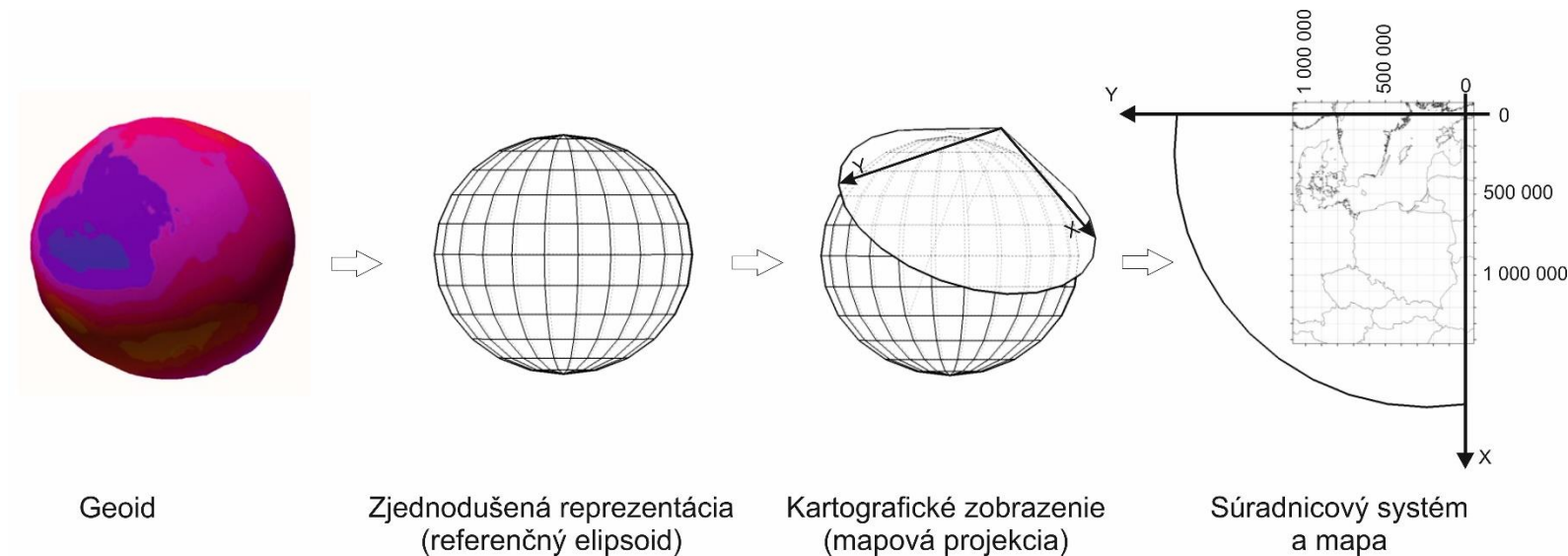
Geoid sa ďalej nahrádza inými referenčnými plochami, ktoré vystihujú jeho tvar a používajú sa na premietanie objektov zo zemského povrchu.

Všetky plochy využiteľné na zobrazovanie povrchu Zeme sú konštruované v závislosti od tvaru, polohy a veľkosti územia, ako aj od účelu mapy, pričom sú vyjadrené matematickými funkciami.

V kartografii sa používajú tri **referenčné geometrické plochy**.

Ide o:

- a) rotačný elipsoid
- b) guľu
- c) rovinu.



Rotačný elipsoid

Viaceré dokumentované pokusy o určenie rozmerov Zeme.

220 rokov pre Kristom – Eratosthenes

- Meral vzdialenosť medzi Alexandriou a Asuánom

9. stor. – arabský matematici

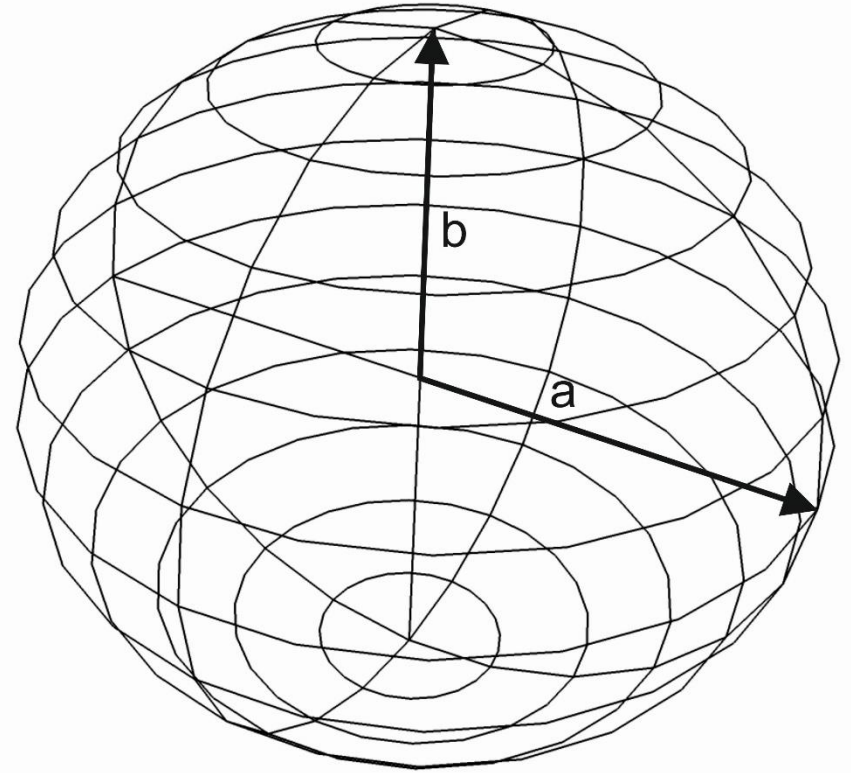
16. stor. – Fernel

- Odvodil dĺžku kvadrantu na základe pozemných meraní dĺžky medzi 2 bodmi, ktoré predstavovali 1° šírky – pomocou kola a počítaním otáčok

Spresnenie rozmeru dosiahol Snellius na základe merania dĺžky pomocou trojuholníkov.

1800 – Delamber – odvodil $1\text{m} = 1/10\,000\,000$ štvrtkvadrantu zemského poludníka

Neskôr sa to spresnilo – Bessel, Hayford a ďalší



Rotačný elipsoid

Parametre elipsoidu sa určujú na báze tzv. stupňových pozemných meraní.

Plochu geoidu by najlepšie vystihoval trojosí elipsoid, avšak kvôli zložitej geometrii sa v praxi používajú zásadne dvojosé (rotačné) elipsoidy.

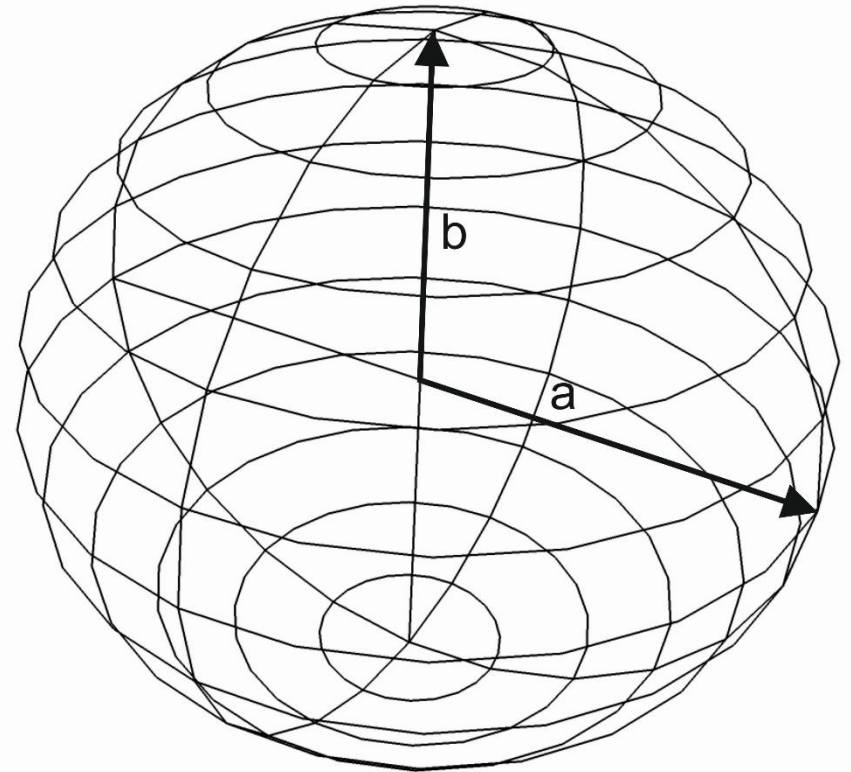
Dvojosí elipsoid vzniká otáčaním elipsy okolo malej (vedľajšej) osi (os totožná s osou zemskej rotácie - b) a veľkej (hlavnej) osi (os leží v rovine rovníka - a).

Každý dvojosí rotačný elipsoid je charakterizovaný polosami (a, b), ako aj excentricitou (e), ktorú vyjadrujeme pomocou funkcie:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

a sploštením (i) vyjadrené funkciou

$$i = \frac{a - b}{a}$$



Rotačný elipsoid

Normálny (hladinový) elipsoid

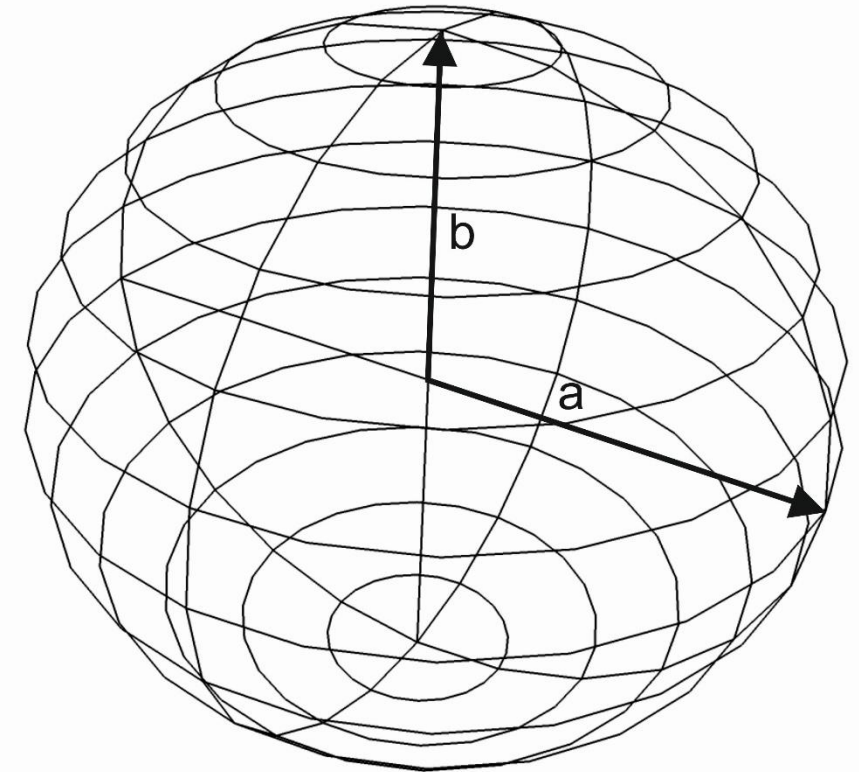
- rotačný elipsoid vytvorený na základe určenia vonkajšieho tiažového poľa Zeme (t.j. tiažového poľa na a nad zemským povrchom).

- Definujú sa:

1. geometrické parametre (veľkosť poloosí a sploštenie)
2. fyzikálne parametre Zeme (hmotnosť Zeme, uhlová rýchlosť rotácie Zeme, tiažové zrýchlenie, geocentrický gravitačná konštanta a ďalšie fyzikálne parametre).

Výsledný tvar sa určuje na základe gravitačných a rotačných účinkov.

Stredný zemský elipsoid - parametre najlepšie zodpovedajú reálnej Zemi. Takýchto elipsoidov bolo určených viacero, napr. Besselov elipsoid, Krasovského a mnohé ďalšie.



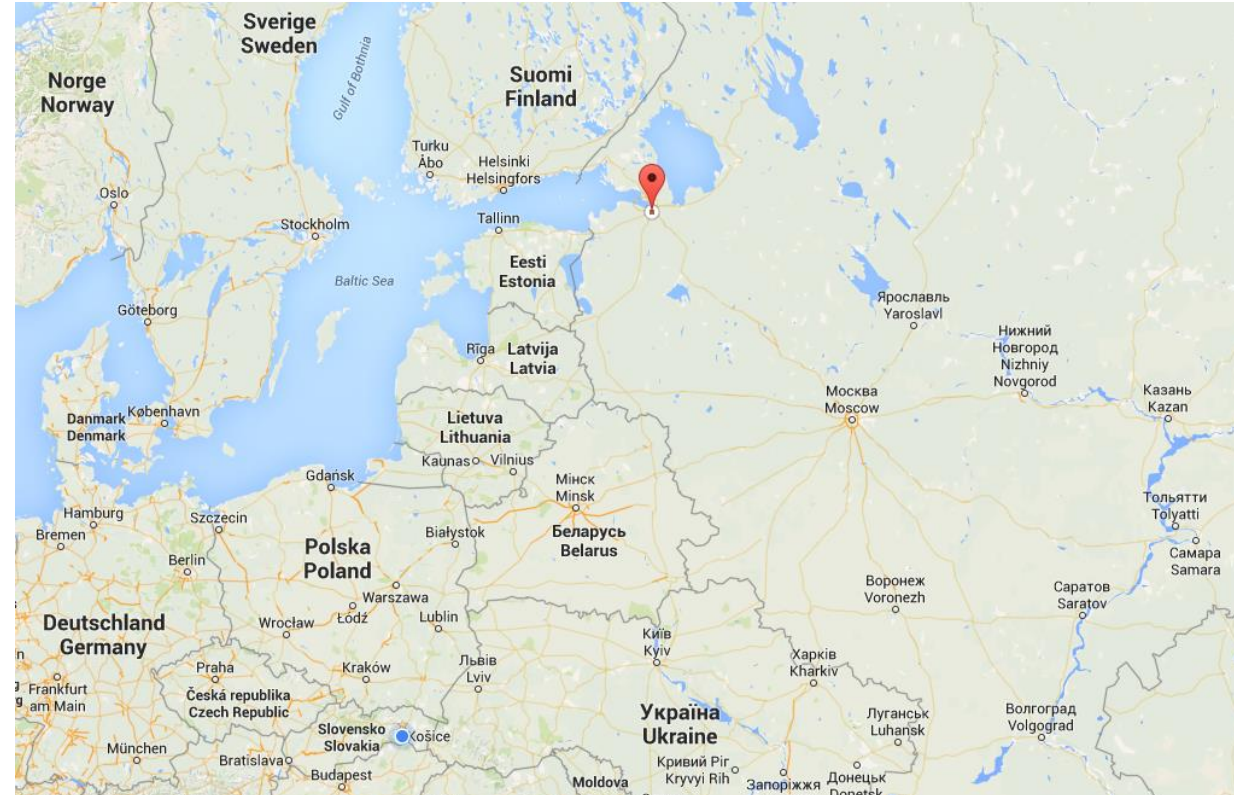
Rotačný elipsoid

referenčného bodu elipsoidu

- miesto na zemskom povrchu, ktorým je vedená ťažnica na geoid a ktorá je zároveň totožná s normálou referenčného telesa pri definovaných parametroch elipsoidu (rozmery polosí a orientácia).
- pre územie Ruska je použitý Krasovského elipsoid s referenčným bodom elipsoidu prechádzajúcim hviezdárňou v Pulkove,



V anglickej literatúre sa špecifikácie referenčného elipsoidu pre určité územia a jeho presná orientácia označuje pojmom **datum**. Referenčný bod elipsoidu ako **origin**.



Rotačný elipsoid

Ellipsoid	Semi-major axis	1/flattening
Airy 1830,	6377563.396	299.3249646
Modified Airy	6377340.189	299.3249646
Australian National	6378160	298.25
Bessel 1841 (Namibia)	6377483.865	299.1528128
Bessel 1841	6377397.155	299.1528128
Clarke 1866,	6378206.4	294.9786982
Clarke 1880,	6378249.145	293.465
Everest (India 1830)"	6377276.345	300.8017
Everest (Sabah Sarawak)	6377298.556	300.8017
Everest (India 1956)	6377301.243	300.8017
Everest (Malaysia 1969)	6377295.664	300.8017
Everest (Malay. & Sing)	6377304.063	300.8017
Everest (Pakistan)	6377309.613	300.8017
Modified Fischer 1960	6378155	298.3
Helmert 1906	6378200	298.3
Hough 1960	6378270	297
Indonesian 1974	6378160	298.247
International 1924	6378388	297
Krassovsky 1940	6378245	298.3
GRS 80	6378137	298.257222101
South American 1969	6378160	298.25
WGS 72	6378135	298.26
WGS 84	6378137	298.257223563

Rotačný elipsoid

Názov elipsoidu	Rok	Hlavná polos (a) vyjadrená v m	Vedľajšia polos (b) vyjadrená v m	Sploštenie (i)	Územie
Besselov	1841	6 377 397,2	6 356 079,0	1/299,15	Stredná Európa
Hayfordov	1909	6 378 388	6 356 912	1/297	Severná Amerika
Krasovského	1940	6 378 245	6 356 863	1/298,3	ZSSR a bývalý východný blok (Východná a Stredná Európa)
GRS 1980	1980				
WGS 84	1984	6 378 137	6 356 752,3	1/298,25	celý svet

WGS 84 - bol odvodený z družicových meraní

- má globálny charakter a jeho stred je totožný s hmotnostným stredom Zeme.
- jeho povrch sa primýka k povrchu geoidu s odchýlkou 60 m.
- je platformou pre najpresnejšiu geometrickú reprezentáciu tvaru zemského telesa a presné určovanie polohy pomocou globálnych navigačných satelitných systémov (GNSS).

Rotačná guľa

- Nakoľko má zemský elipsoid malé sploštenie, v určitých prípadoch sa môže nahradiť *referenčnou guľou*.
- Pri náhrade referenčných elipsoidov referenčnou guľou dochádza k podstatnému zjednodušeniu výpočtov, preto sa využívajú pre niektoré typy úloh, ako aj časti územia.

Referenčnú guľu ako referenčnú plochu používame hlavne v niekoľkých prípadoch:

1. ak ide o územie, ktorého tvar má polomer približne 200 km. Spravidla ide o územia, kde sa neprejavuje dĺžkové a plošné skreslenie,
2. v prípade kartografických úloh, ktoré nekladú vysoké nároky na presnosť (napríklad mapy malých mierok 1:1 000 000). V prípade takýchto úloh je možné referenčnú guľu určiť na základe viacerých kritérií,

Rotačná guľa

Kritériá pre odvodenie polomeru referenčnej gule:

- objem gule je rovnaký ako objem elipsoidu;

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi a^2 b \quad R = \sqrt[3]{a^2 b}$$

- povrch gule je rovnaký ako povrch elipsoidu;

$$4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi(2a^2 + b^2) \quad R = \sqrt{\frac{2a^2 + b^2}{3}}$$

- polomer gule je aritmetickým priemerom veľkosti polosí;

$$R = \frac{a + b + c}{3}$$

- rovnaké dĺžky poludníkového kvadrantu $R = \frac{2Q}{\pi} \quad \frac{1}{2}\pi R = Q$

Q - dĺžka poludníkového kvadrantu

Rotačná guľa

Kritériá pre odvodenie polomeru referenčnej gule:

- Stredný polomer krivosti

$$R_m = \sqrt{M \cdot N} = \frac{a \cdot \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \cdot \sin \varphi}$$

Pri Besselovom elipsoide sa použilo tzv. dvojité zobrazenie.

Najskôr došlo k zobrazeniu bodov z referenčného elipsoidu na referenčnú guľu a až následne pomocou geometrických vzťahov do roviny.

- Ak by sa použili zemepisné súradnice tiež na guľi došlo by k veľkým skresleniam (hlavne dĺžkových).

Rotačná guľa

podmienka	Besselov el.	Krasovského el.
rovnaký objem	6 370 283 m	6 371 110 m
rovnaký povrch	6 370 290	6 371 116
arit.priem.poloos	6 370 291	6 371 118
rovnaký kvadrant	6 366 743	6 367 558

Referenčná rovina

Referenčná rovina sa používa na zobrazenie územia s malým plošným rozsahom (max. do 700 km²), kde zakrivenie Zeme je zanedbateľné.

