

Názov prednášky:

Vybrané interpolačné metódy - triangulácia

Osnova prednášky:

- Definície a pojmy
- Triangulácia - princípy
- Delaunay-ova triangulácia
- Poisson-ova triangulácia

Odporúčaná literatúra

KAŇUK, J., 2015: Priestorové analýzy a modelovanie. Vysokoškolské učebné texty. Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach, 106 s.

NETELER, M., MITASOVA, H.: Open Source GIS: A GRASS GIS Approach. Second Edition. Boston: Kluwer Academic Publisher, 2004.

FECISKANIN, R. (2009): Optimalizácia nepravidelných trojuholníkových sietí pre modelovanie georeliéfu. Prírodovedecká fakulta, Masarykova univerzita v Brne. Dizertačná práca.132 s.

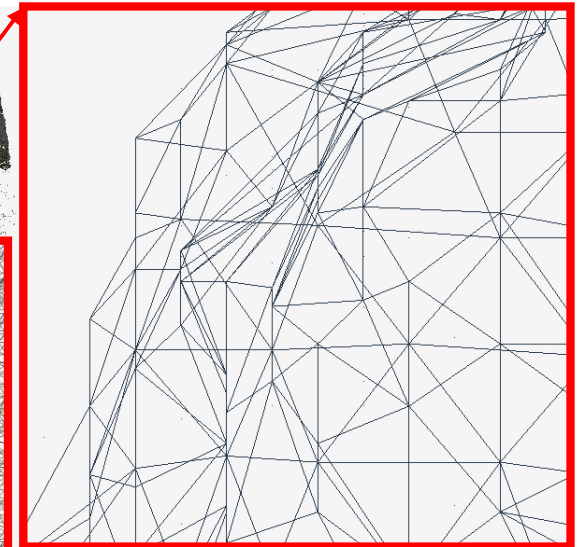
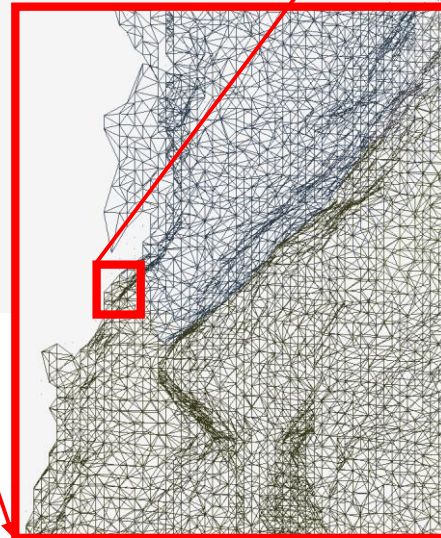
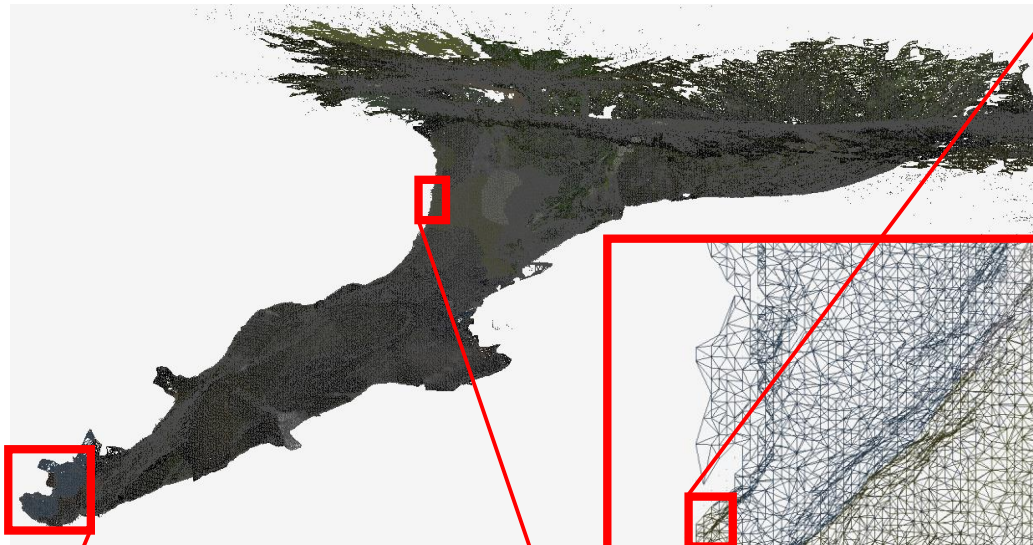
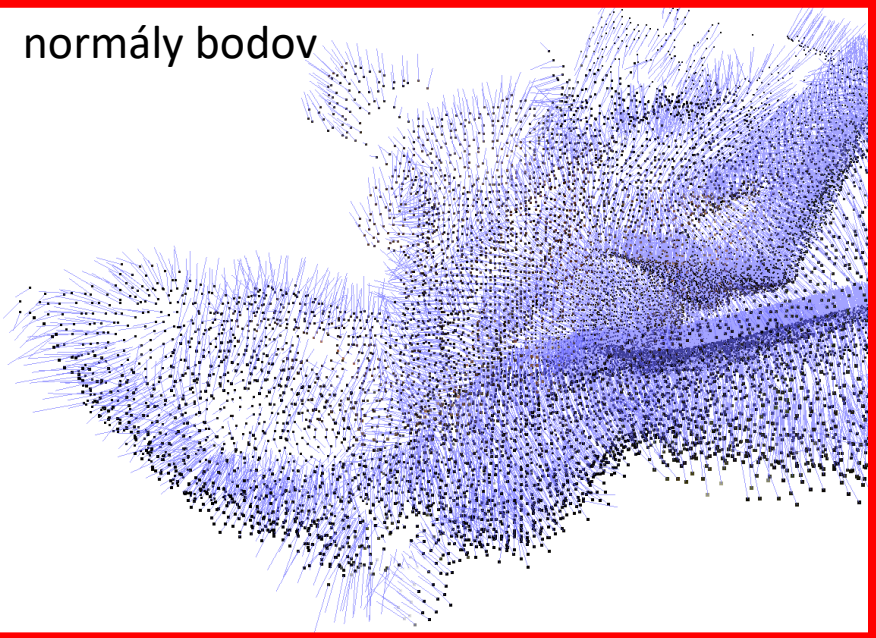
Úvod do triangulácie

- Nepravidelná trojuhelníková sieť (TIN) je chápaná ako množina nepravidelne rozmiestnených bodov, ktoré sú spojené stranami, pričom kontinuálne vyplňajú priestor medzi bodmi neprekrývajúcimi sa trojuhelníkmi.
- TIN sú niekedy označované aj ako meš (*mesh*, v preklade pletivo). Pojem meš má však širší význam, nakoľko za meš možno považovať aj iné tvary ako trojuhelníky, napr. štvoruholníky, päťuholníky a pod. ktoré tvoria sieť neprekrývajúcich sa elementov súvisle vyplňajúcich priestor medzi jednotlivými bodmi pozdĺž ich spojnic.

Mesh - Základná charakteristika

- **sieť polygónov** alebo **mesh** je definovaná ako súbor vrcholových bodov trojuholníkov alebo n-uholníkov, ich okrajov a stien, ktoré komplexným a flexibilným spôsobom vyjadrujú tvar polyedrického objektu
- nový spôsob reprezentácie krajiny prevzatý z počítačovej grafiky – **nové výzvy pre geoinformatiku**
- tvorba sietí polygónov je založená na adaptívnych metódach triangulácie, pri ktorých sa sledujú body v určitom okolí vyhľadávania
- základným predpokladom je tvorbu siete polygónov je určenie normál bodov

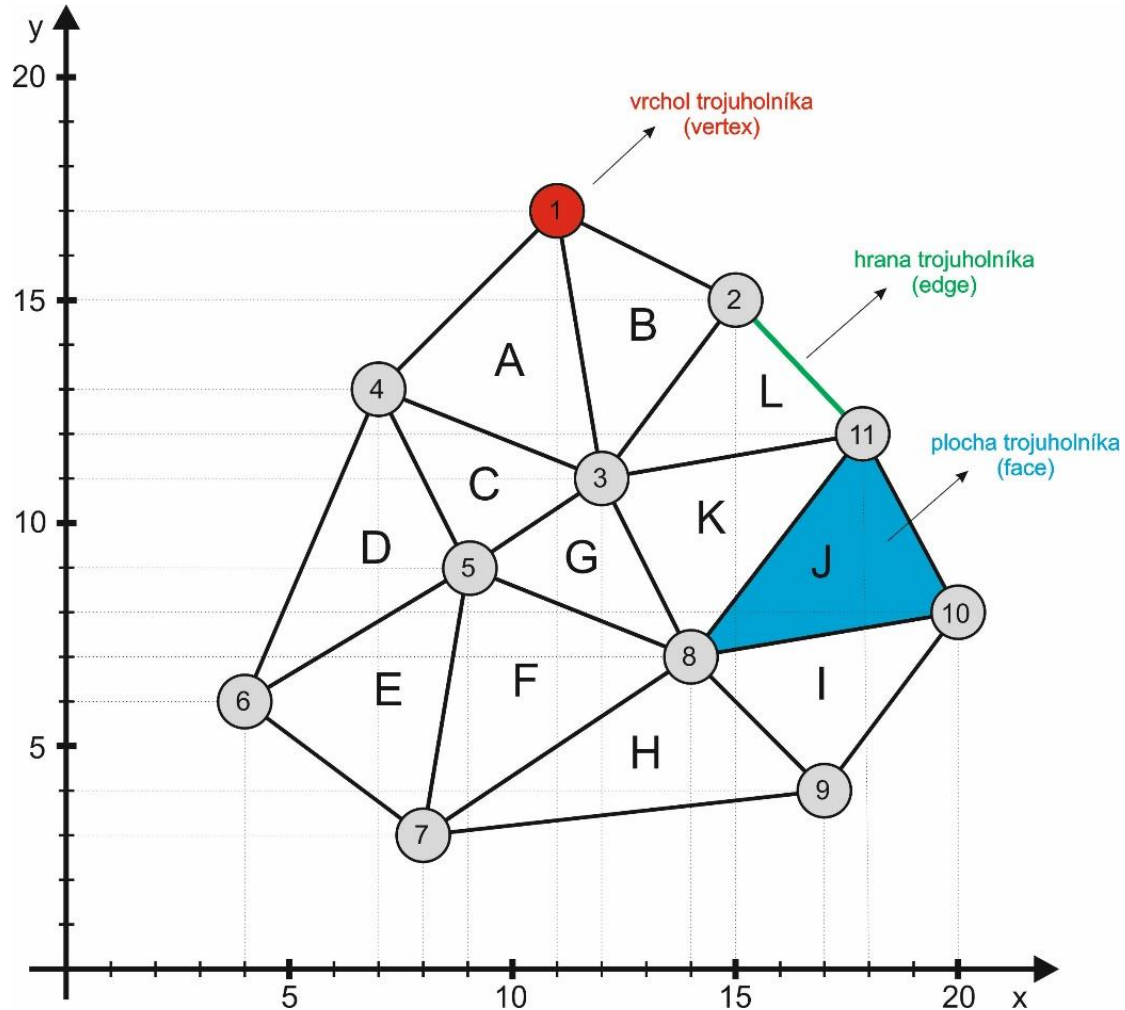
normály bodov



sieť polygónov

Topológia TIN

- TIN je tvorený vrcholmi, stranami a trojuholníkmi, pričom súčasťou zápisu ich dátovej štruktúry sú aj informácie o topologických vzťahoch medzi týmito prvkami. Z toho vyplýva, že TIN majú zložitejšiu dátovú štruktúru zápisu v porovnaní s rastrovým údajovým formátom



ID	súradnice vrcholov trojuholníka		
	x	y	z
1	11	17	350
2	15	15	352
3	12	11	355
4	7	13	352
5	9	9	358
6	4	6	356
7	8	3	360
8	14	7	358
9	17	4	361
10	20	8	357
11	17	12	355

Súradnice vrcholov trojuholníka

ID	vrcholy trojuholníka		
A	1	3	4
B	1	2	3
C	3	4	5
D	4	5	6
E	5	6	7
F	5	7	8
G	3	5	8
H	7	8	9
I	8	9	10
J	8	10	11
K	3	8	11
L	2	3	11

Zoznam vrcholov trojuholníkov

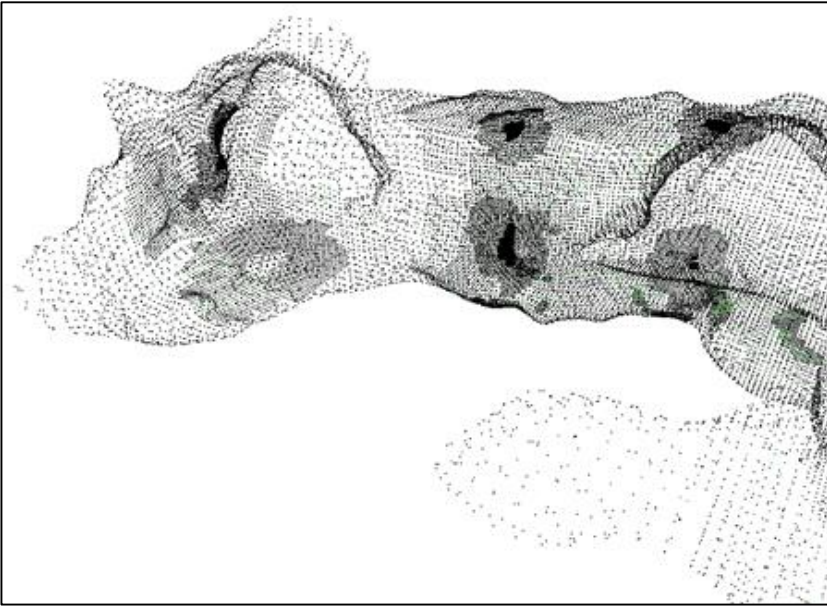
ID	susedné trojuholníky
A	B, C
B	A, L
C	A, D, G
D	C, E
E	D, F
F	E, G, H
G	C, F, K
H	F, I
I	H, J
J	I, K
K	G, J, L
L	B, K

Zoznam hrán pre trojuholníky

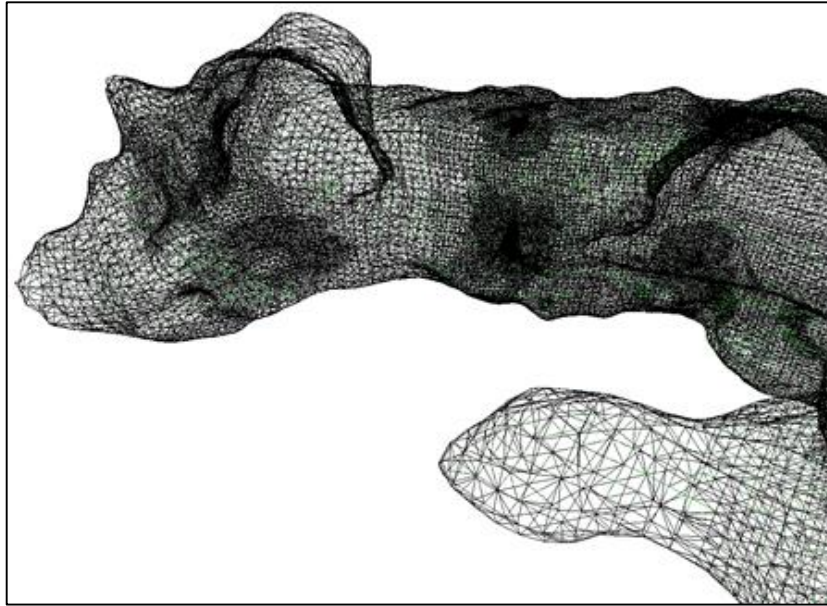
Úvod do triangulácie

- Dátovú štruktúru TIN môžu tvoriť aj ďalšie informácie.
- TIN je možné zapisovať v princípe dvoma spôsobmi.
 - „trojuholník za trojuholníkom“ - spočíva v uchovaní všetkých atribútov (napr. sklon a orientácia každého trojuholníka) v pamäti počítača, čím vzniká potreba vyšších nárokov na úložiskovú kapacitu.
 - „body a ich susedia“ - kladie menšie nároky na pamäť počítača, avšak niektoré atribúty musia byť vypočítané dodatočne.
- Dátové štruktúry pre trojuholníkové siete, ktoré hrajú významnú úlohu pri tvorbe algoritmov popisujú práce (O'Rourke 1998; Boissonnat et al. 2002; El-Sheimy et al. 2005)
- Pre efektívnu vizualizáciu a efektívny zápis dátovej štruktúry má veľký význam aj možnosť kompresie a dekompresie dát.
- TIN modely sa využívali hlavne v počítačovej grafike a sú objektom záujmu viacerých disciplín, najmä výpočtovej geometrie a počítačovej vizualizácie.
- V súčasnosti majú TIN modely veľké využitie aj v geoinformatike, čo súvisí hlavne s masívnym využívaním technológií založených na generovaní mračna bodov ako napr. laserové skenovanie, automatické spracovanie fotografických záznamov (napr. metóda Structure from Motion - SFM, Reflectance Transformation Imaging – RTI) a pod. Z mračna bodov sa následne generuje povrch skúmaných objektov v podobe mešu, ktorý reprezentuje rôzne objekty (napr. reliéf, budovy, vegetáciu, jaskyne)

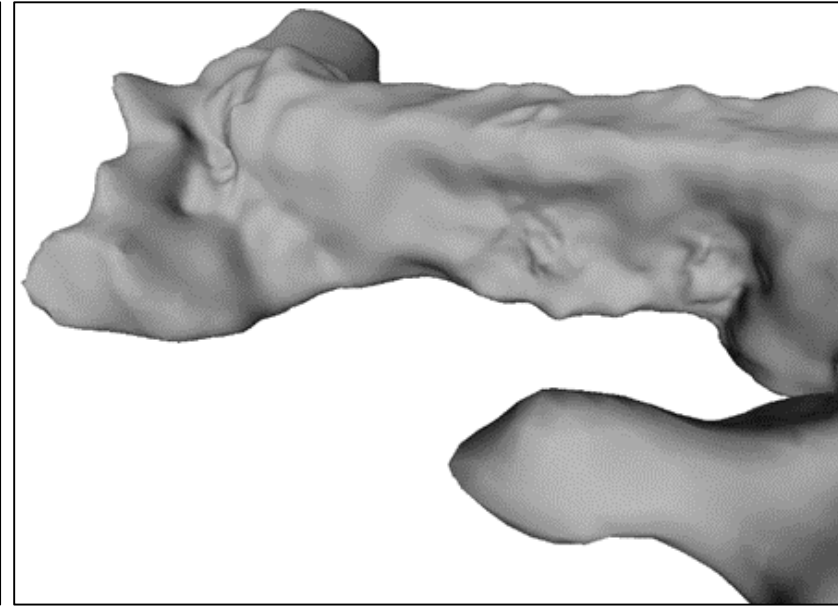
Triangulácia



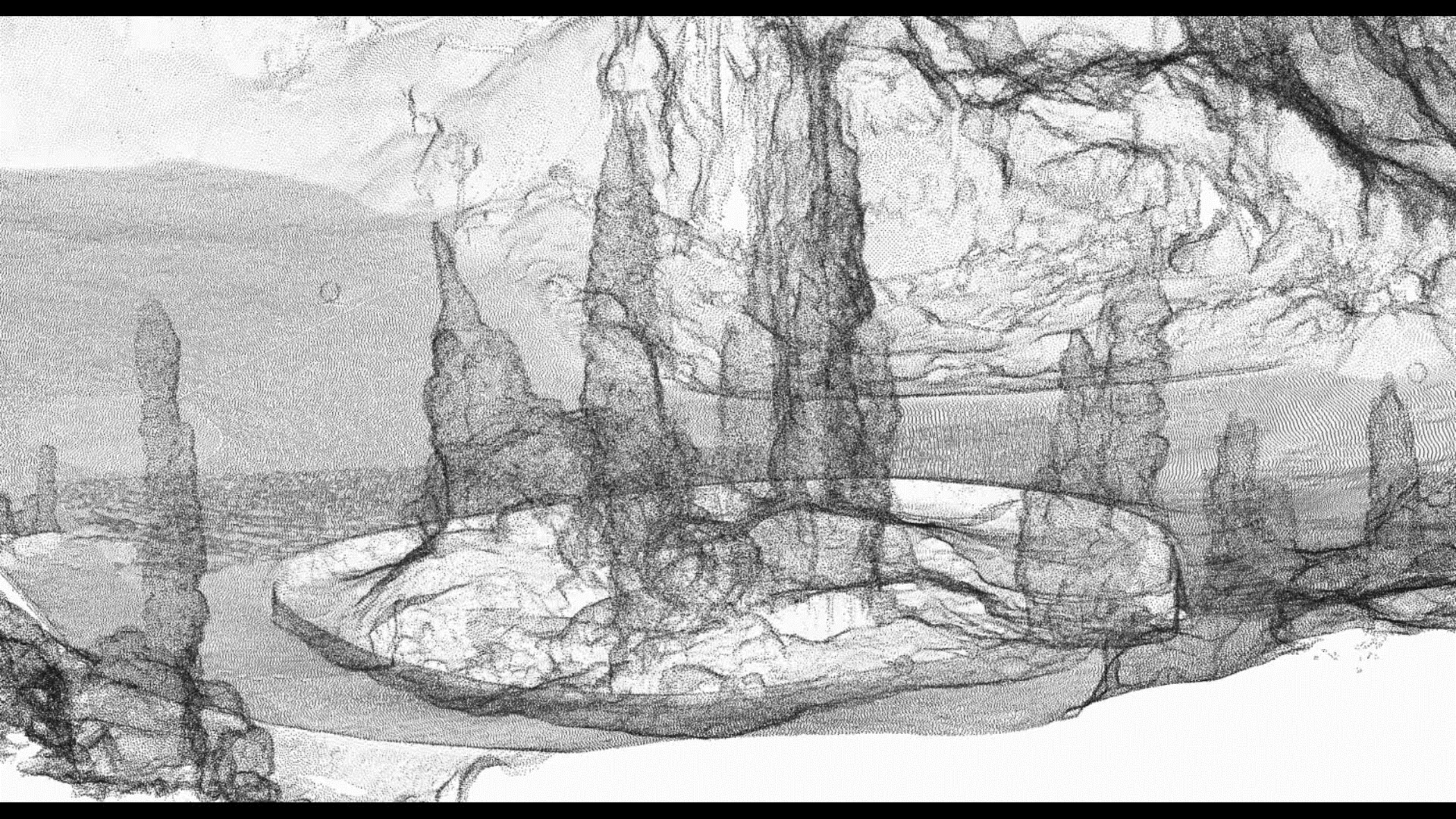
vstupné bodové pole získané z
pozemného laserového skenovania



Tvorba pomocou metódy Poisson



výsledný optimalizovaný
tieňovaný povrchu



Triangulácia – základné charakteristiky

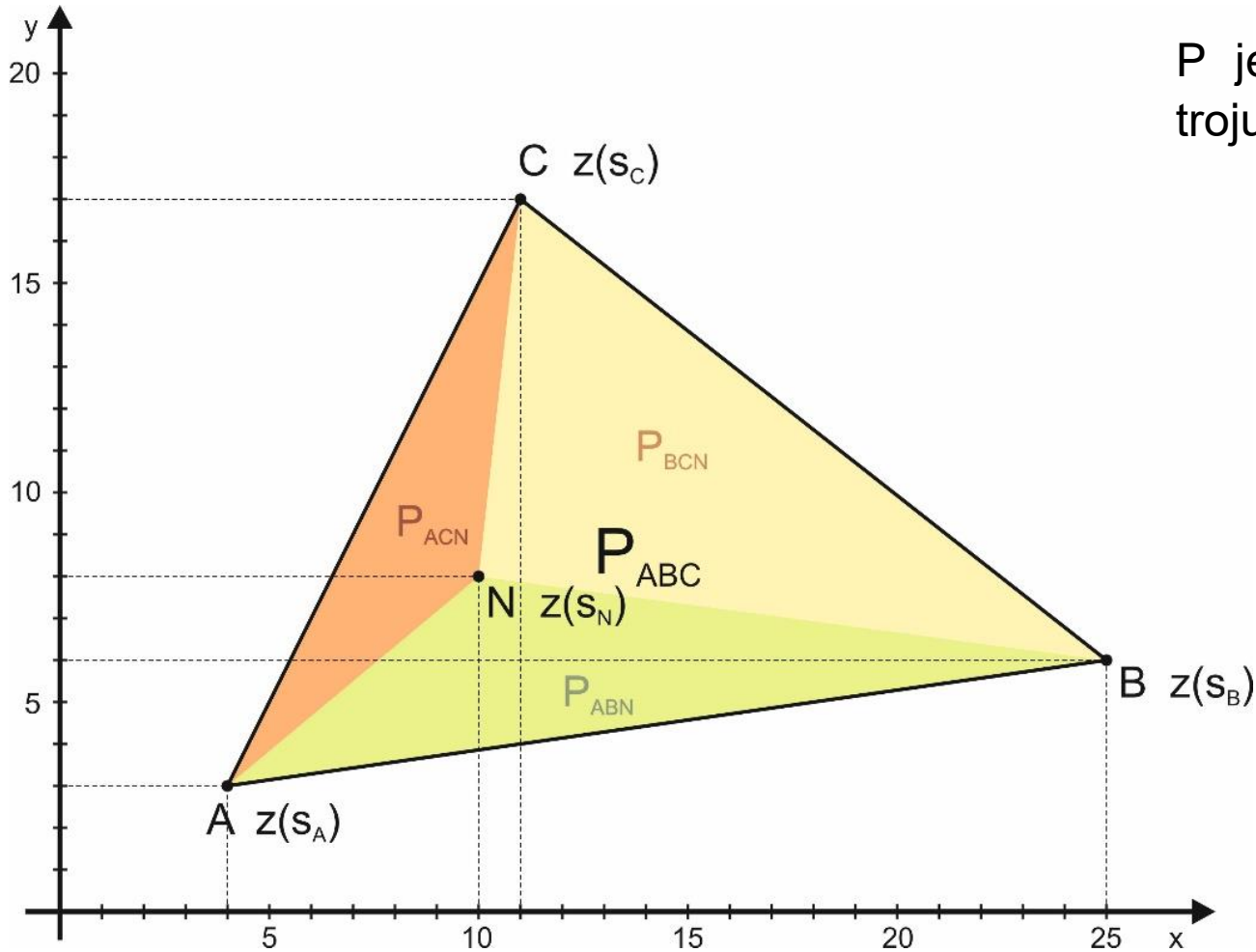
- Medzi hlavné výhody TIN patrí schopnosť vystihnúť povrch ľubovoľného objektu na rozličných úrovniach rozlíšenia.
- Triangulácia je veľmi často klasifikovaná aj ako metóda lineárnej interpolácie.
 - Základný princíp spočíva v tom, že zo vstupného bodového poľa (alebo jeho časti) je skonštruovaná sieť trojuholníkov.
 - Trojuholníky sú chápané ako rôzne naklonené rovinné elementy.
 - Odhad hodnoty v ľubovoľnom bode $z(s_N)$ zodpovedá hodnote určenej na základe polohy vrcholov trojuholníka $z(s_A)$, $z(s_B)$ a $z(C)$, pričom platí priama závislosť medzi vzdialenosťou bodu $z(s_N)$ od vrcholov $z(s_A)$, $z(s_B)$ a $z(C)$, a ich hodnotami vo vrcholoch trojuholníka.
 - Odhad hodnoty vo vybranom bode je teda definovaný ako vážený priemer hodnôt lokalizovaných v troch vrcholoch trojuholníka, do ktorého patrí sledovaný bod.
- Existuje viacero spôsobov pre určenie váh. Ide hlavne o metódy založené na určení:
 - a) plochy protíahlych trojuholníkov
 - b) vzťahom medzi súradnicami jednotlivých vrcholov trojuholníka a súradnicami určovaného bodu

Váhy všetkých ostatných hodnôt vstupného bodového poľa sú rovné 0.

Obe uvedené postupy dosahujú **rovnaké výsledky**.

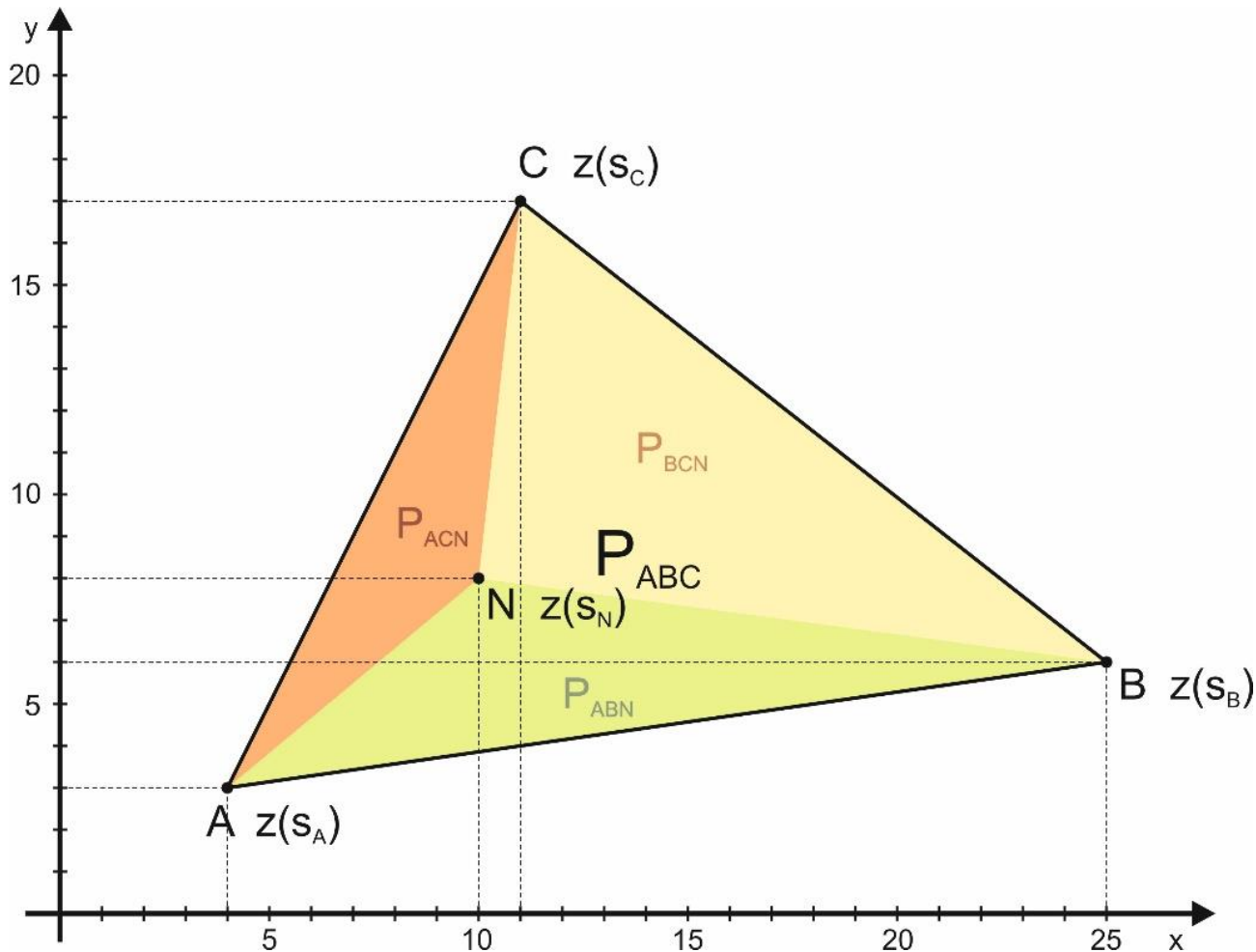
Určenie váh pomocou plochy protiľahlých trojuholníkov

$$z(s_N) = \frac{z(s_A)P_{BCN} + z(s_B)P_{ACN} + z(s_C)P_{ABN}}{P_{ABC}}$$



P je plocha trojuholníka a indexmi sú určené vrcholy trojuholníkov, pre s_a ;

Určenie váh pomocou založených na určení vzťahov medzi súradnicami jednotlivých vrcholov trojuholníka a súradnicami určovaného bodu



$$\lambda_A = \frac{(x_N - x_C)(y_B - y_C) - (y_N - y_C)(x_B - x_C)}{(x_A - x_C)(y_B - y_C) - (y_A - y_C)(x_B - x_C)}$$

$$\lambda_B = \frac{(x_N - x_A)(y_C - y_A) - (y_N - y_A)(x_C - x_A)}{(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)}$$

$$\lambda_C = \frac{(x_N - x_B)(y_A - y_B) - (y_N - y_B)(x_A - x_B)}{(x_C - x_B)(y_A - y_B) - (y_C - y_B)(x_A - x_B)}$$

Po vypočítaní váh λ_A , λ_B a λ_C sa hodnota v bode N určí na základe vzťahu:

$$z(s_N) = \sum_{i=A}^{A,B,C} \lambda_i z(s_i)$$

Triangulácia

- Tvorba TIN je v zásade postavená na dvoch principiálnych úlohách, ktoré sa týkajú:
 - a) optimalizácie rozloženia vrcholov trojuholníkov;
 - b) optimalizácie tvarov trojuholníkov
- Obe úlohy majú veľký vplyv na výsledok. Súvisia so snahou čo najlepšie vyjadriť povrch zobrazeného objektu.

História

- Týmto úlohám sa venuje veľká pozornosť najmä v počítačovej grafike, kde je v súčasnosti rozpracovaná široká paleta optimalizačných postupov založených na rozličných kritériách.
- V geografii (geoinformatike) v oblasti modelovania krajiny sa metóda TIN využívala v minulosti hlavne pre tvorbu digitálnych modelov terénu (georeliéfu).
- Modelovanie georeliéfu pomocou trojuholníkovej siete a odvodzovaniu morfometrických parametrov z nej sa podrobne venoval Krcho (1990).

Základný princíp:

- za optimálne miesta vrcholov trojuholníkov sa považujú tzv. singulárne body, resp. singularity, čiže miesta s výraznou zmenou priebehu povrchu, ktoré tvoria kostru tvaru georeliéfu (úpätie, sedlo, hrebeň a pod.).

V súčasnosti sú rozpracované viaceré metódy triangulácie. Vychádzajúc z práce Feciskanin (2009, 2010) je možné definovať a klasifikovať rôzne prístupy k vytvoreniu trojuholníkovej siete na:

- a) tvarovo-závislú trianguláciu;
- b) dátovo-závislú trianguláciu.

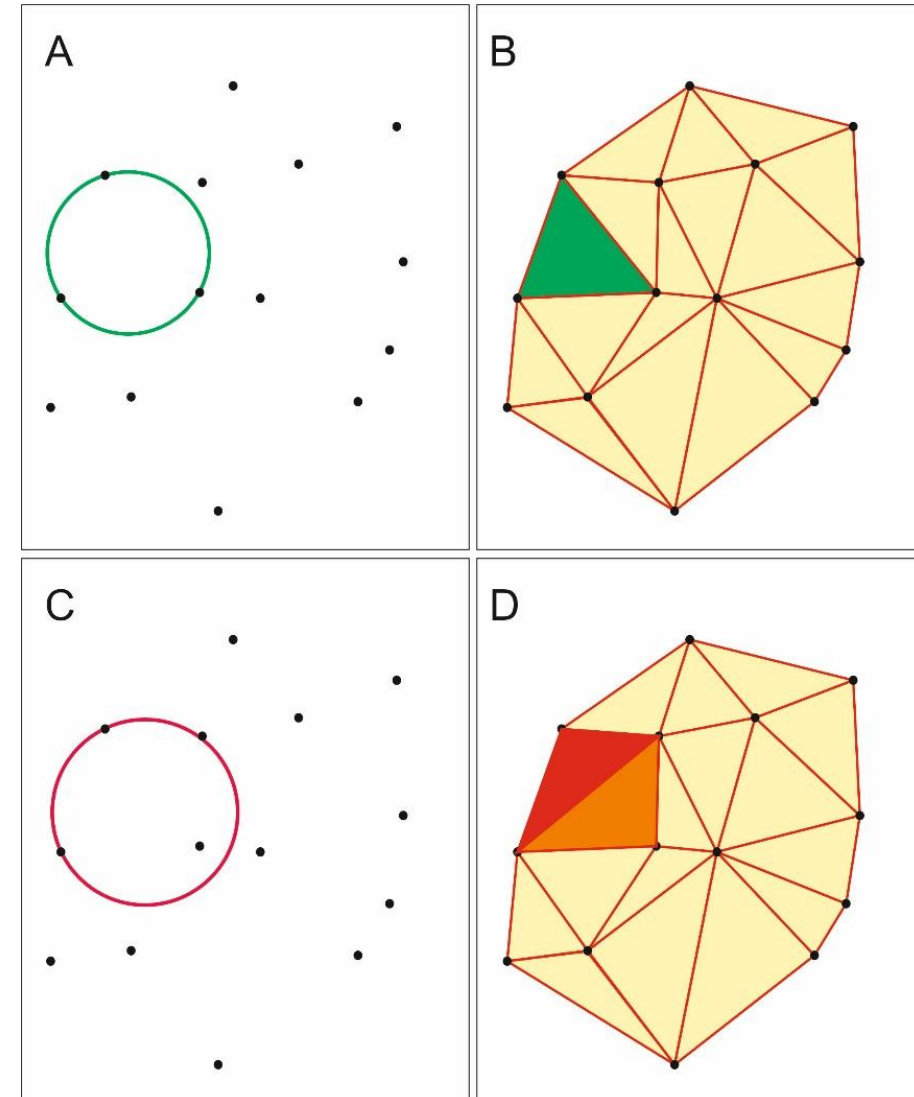
Tvarovo závislá triangulácia

- je spôsob tvorby trojuholníkov, pri ktorej je hlavné kritérium založené na zachovaní tvaru trojuholníka.
- Cieľom triangulácie založenej na tvarovo-závislých kritériách je zamedziť vzniku dlhých a úzkych trojuholníkov, ktoré sú považované za nie ideálne tvary reprezentujúce zobrazovaný povrch.
- Tvarovo-závislú trianguláciu je možné rozdeliť podľa kritérií tvorby trojuholníkov na postupy, ktoré vychádzajú z:
 - a) dĺžok strán trojuholníkov;**
 - b) veľkosti uhlov v trojuholníkoch.**
- V prípade kritérií, ktoré sú založené na dĺžke strán trojuholníkov je možné definovať nasledujúce subkritériá:
 - a) minimalizácia súčtu dĺžok strán trojuholníka;
 - b) maximalizácia minimálnej výšky trojuholníka;
 - c) minimalizácia maximálnej dĺžky strany trojuholníka;
 - d) minimalizácia pomeru najdlhšej strany a výšky na túto stranu.
- V prípade kritérií, ktoré vychádzajú z veľkosti uhlov v trojuholníku je možné definovať tieto subkritériá:
 - a) minimalizácia maximálneho uhla;
 - b) maximalizácia minimálneho uhla;
 - c) minimalizácia maximálnej excentricity (súčtu vzdialených vrcholov od stredu opísanej kružnice trojuholníka).

Delaunayova triangulácia

- takmer všetky dostupné softvérové riešenia využívajú pri tvorbe TIN Delaunayovu trianguláciu, ktorá je rozšírená o viac či menej pokročilú správu obmedzení pre tvorbu trojuholníkov
- tento typ triangulácie je charakteristický tým, že trojuholníky nepravidelnej trojuholníkovej siete sú budované na základe niekoľkých kritérií:
 - a) do kružnice opísanej tromi vrcholmi trojuholníka nespadá vrchol žiadneho ďalšieho trojuholníka,
 - b) maximalizuje minimálny uhol v trojuholníku,
 - c) trojuholníky sú jedinečné a neprekrývajú sa,
 - d) hranicu trojuholníkovej siete tvorí konvexný obal bodov vstupného bodového poľa,
 - e) ak žiadna štvorica bodov nie je kocirkulárna (neleží na kružnici), triangulácia je jednoznačná

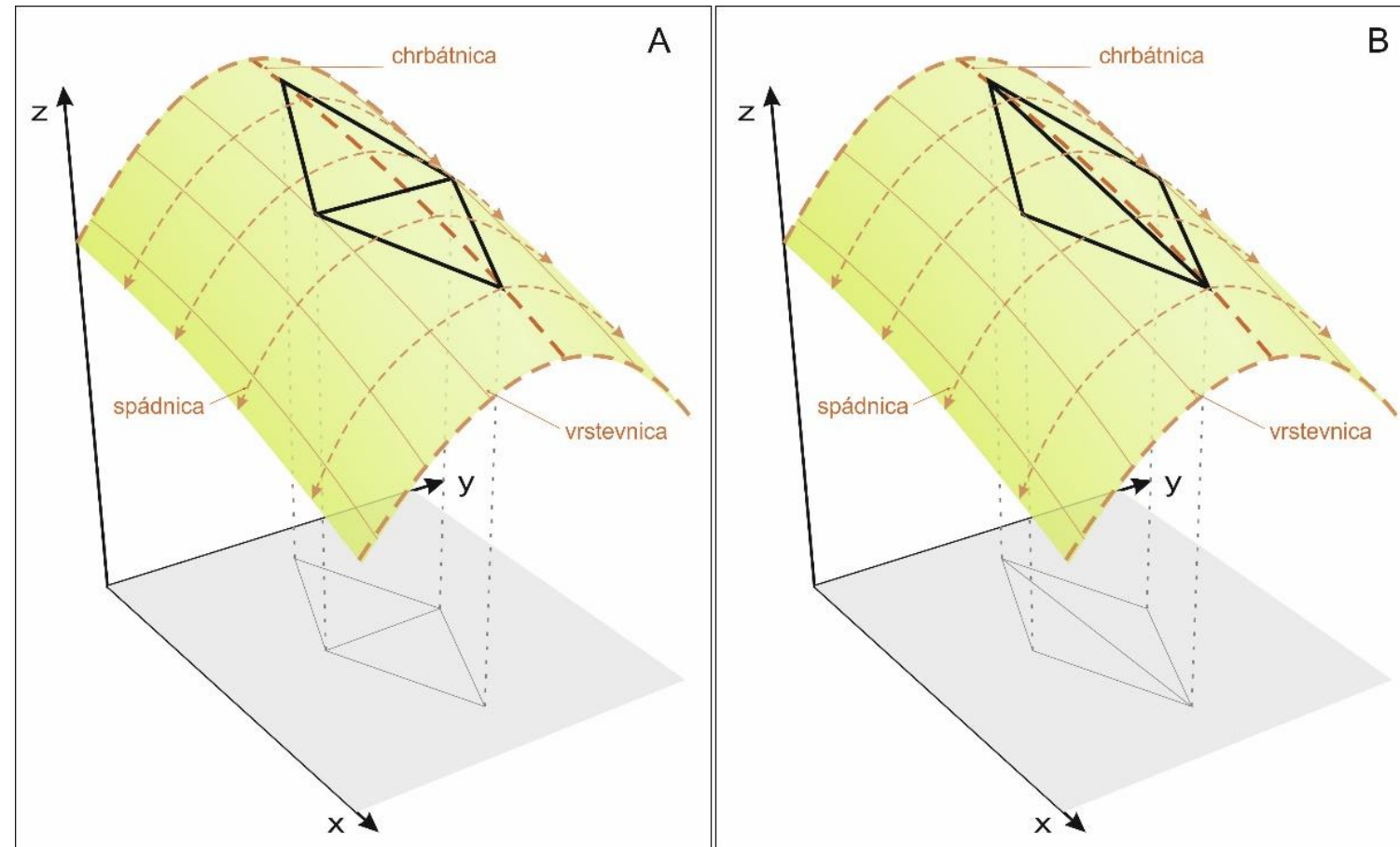
niektoré z kritérií sú akoby duplicitné, napr. kritérium maximalizácie minimálneho uhla trojuholníka možno považovať za ekvivalentné ku kritériu opísanej kružnice trojuholníka, do ktorej nepatrí iný bod z množiny vrcholových bodov.



Dátovo-závislá triangulácia

- typ tvorby trojuholníkovej siete, ktoré sa snažia prispôbovať trojuholníky modelovanej ploche.
- primárnym kritériom pre tvorbu trojuholníkov v tomto prípade predstavuje váha strán trojuholníka.
- priradenie váhy stranám na základe zvolenej funkcie je rozhodujúca pre určenie tvaru a vlastností výslednej trojuholníkovej siete. Najčastejšie sú vstupnými hodnotami pre váhovú funkciu odvodené hodnoty vzťahujúce sa k dvom trojuholníkom, prípadne ich vrcholom, ktorým patrí oceňovaná hrana.
- Medzi subkritéria pre definovanie váhovej funkcie, ktoré určujú vzájomnú polohu trojuholníkov patria:

- uhol medzi normálami trojuholníkov;
- skok v derivácii normál cez spoločnú stranu;
- vzdialenosť vrcholu od roviny susedného trojuholníka;
- vzdialenosť vrcholu v smere osi z od roviny susedného trojuholníka.

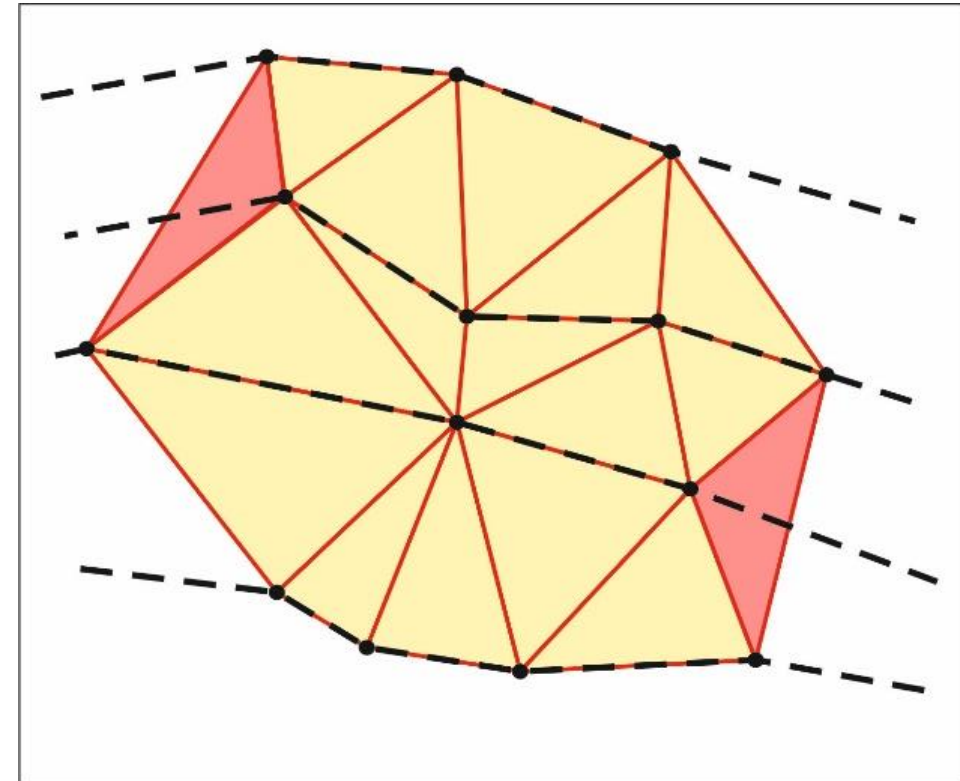


Tvorba TIN

- do procesu triangulácie je pre dosiahnutie vernejšieho modelu možné vnášať isté obmedzenia, resp. isté pravidlá triangulácie, pričom rozoznávame:

- a) pravidlá pre tvorbu geometrie trojuholníkov;
- b) pravidlá korigujúce priebeh trojuholníkovej siete vkladáním tzv. povinných spojnic.

V prípade modelovania reliéfu sa veľmi často využíva aj pravidlo, že ak sa pre tvorbu TIN využívajú napr. vrstevnice (presnejšie ich lomové body – tzv. *vertex*), je možné stanoviť podmienku, že trojuholník nesmie prechádzať naprieč vrstevnicou. Existujú aj ďalšie analogické kritériá, ktoré sa týkajú napr. planárnych (rovných) plôch (plocha s konštantných sklonom, napr. ihrisko, jazerá, strechy a pod.).



Tvorba TIN

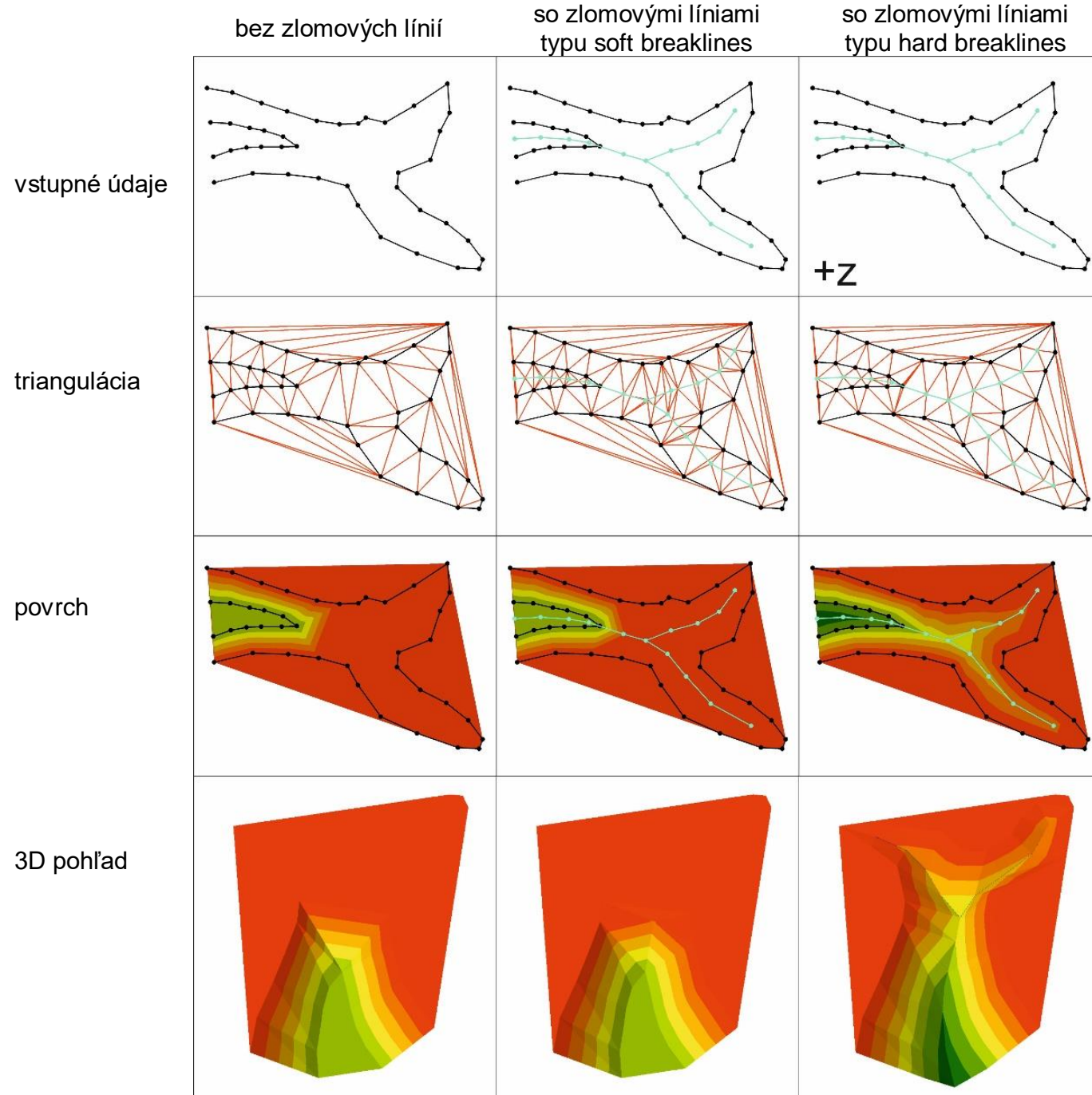
- Pravidlá korigujúce priebeh trojuholníkovej siete pomocou vkladania povinných vrcholov trojuholníka sú založené na vkladaní doplnkových údajov.
- Týmto spôsobom je možné dosiahnuť vernejšie vykresľovanie povrchov skúmaných objektov, nakoľko sa odstraňujú neprirodzené tvary vzniknuté matematickou podstatou triangulácie. Ide o typy údajov, ktoré môžu mať bodový, líniový a plošný charakter.
- Proces tvorby trojuholníkovej siete vkladáním tzv. povinných spojnic môžeme ovplyvniť cez:
 - a) pridanie ďalších vstupných bodov, resp. vrcholových bodov trojuholníka (tzv. *mass points*);
 - b) pridanie zlomových línií (tzv. *breaklines*).

Tvorba TIN

Zlomové línie (tzv. *breaklines*) - miesta významnej a náhlej zmeny priebehu povrchu.

Vo väčšine GIS softvéroch sa rozlišujú dva základné typy zlomových línií (*break lines*):

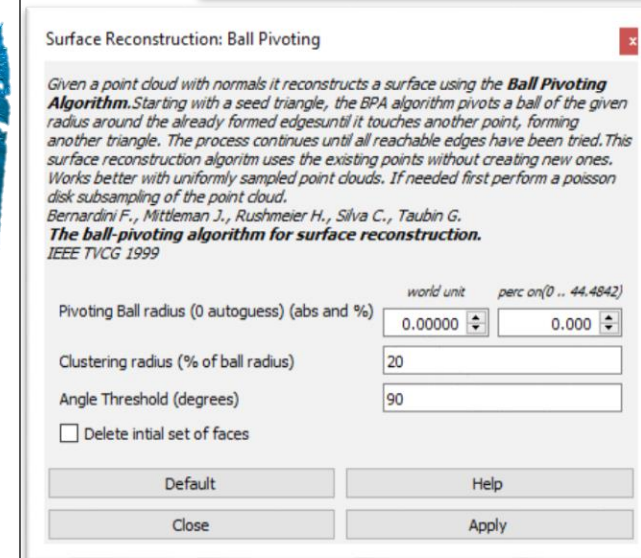
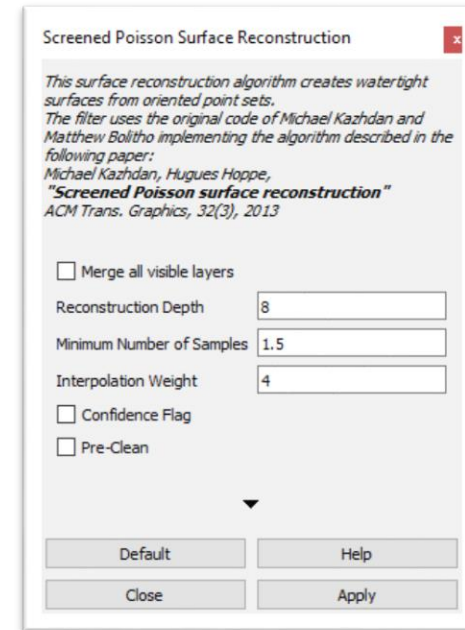
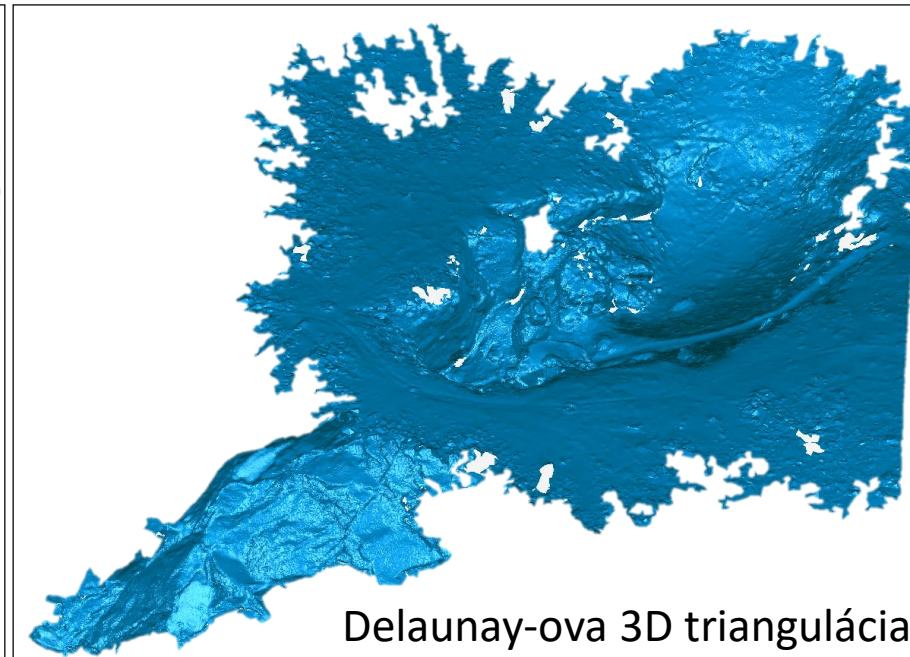
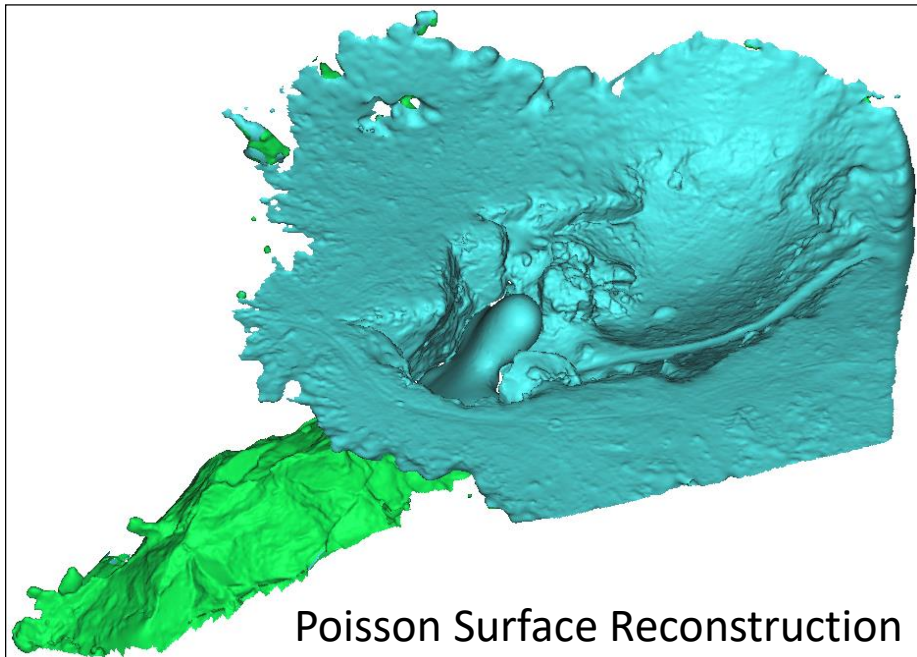
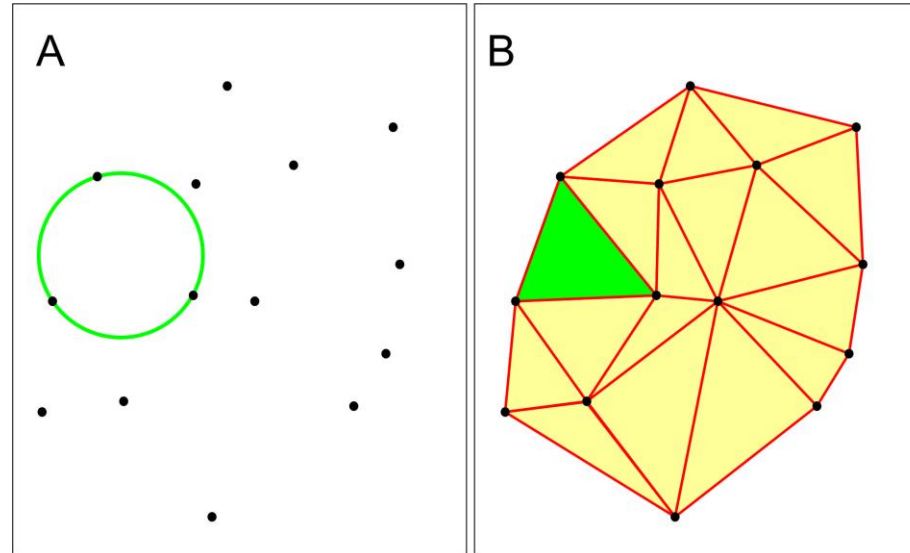
- Soft breaklines** – „mäkké hrany“, používajú sa v prípadoch, keď nedochádza k prerušeniu hladkosti modelovaného povrchu, avšak sa na povrchu nachádza určitá zmena priebehu povrchu. Pre vykreslenie priebehu povrchu sa z línií typu „soft breaklines“ využijú iba lomové body (vertex), ktoré sú doplnené ako vrcholy trojuholníkov.
- Hard breaklines** – „výrazné hrany“, sa používajú v prípadoch výraznej zmeny priebehu povrchu, kde dochádza k diskontinuitám hladkosti povrchu. V takom prípade je potrebné, aby vložené prvky obsahovali hodnoty Z.



Mesh – vybrané metódy tvorby

Tvorba sietí polygónov (výber z metód):

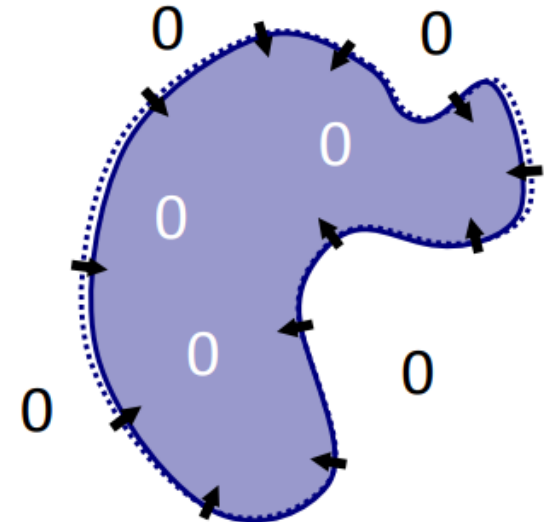
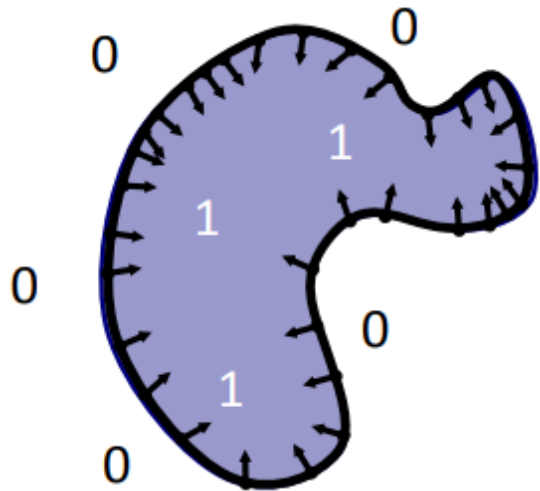
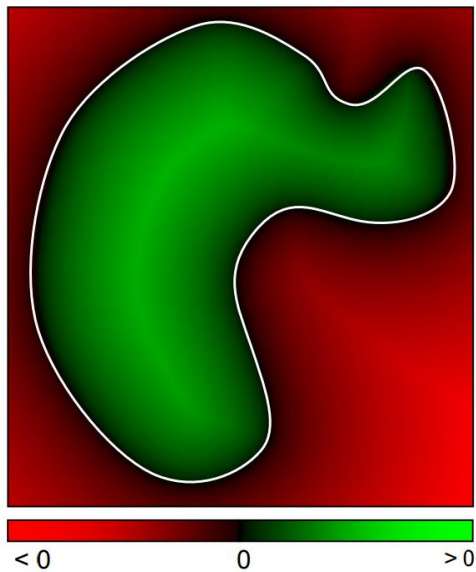
- Delaunay-ova 2D triangulácia
- Delaunay-ova 3D triangulácia
- Poisson Surface Reconstruction
- Surface Reconstruction Ball Pivoting
- Surface Reconstruction VCG



Poisson Surface Reconstruction

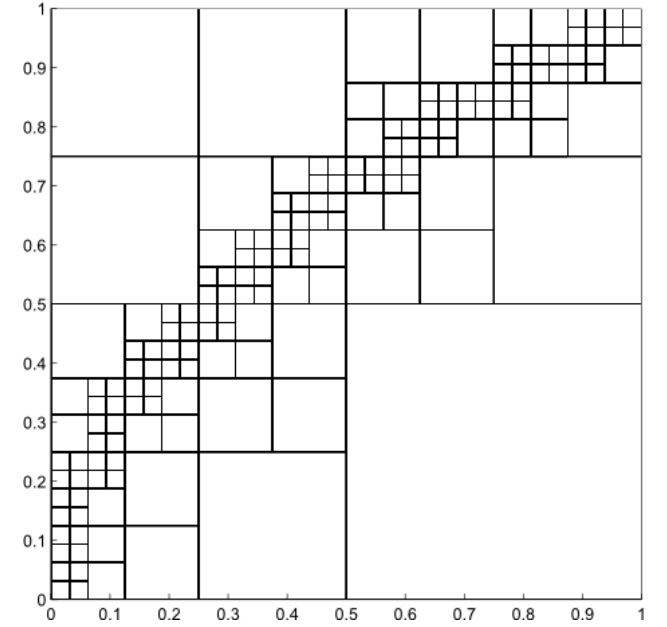
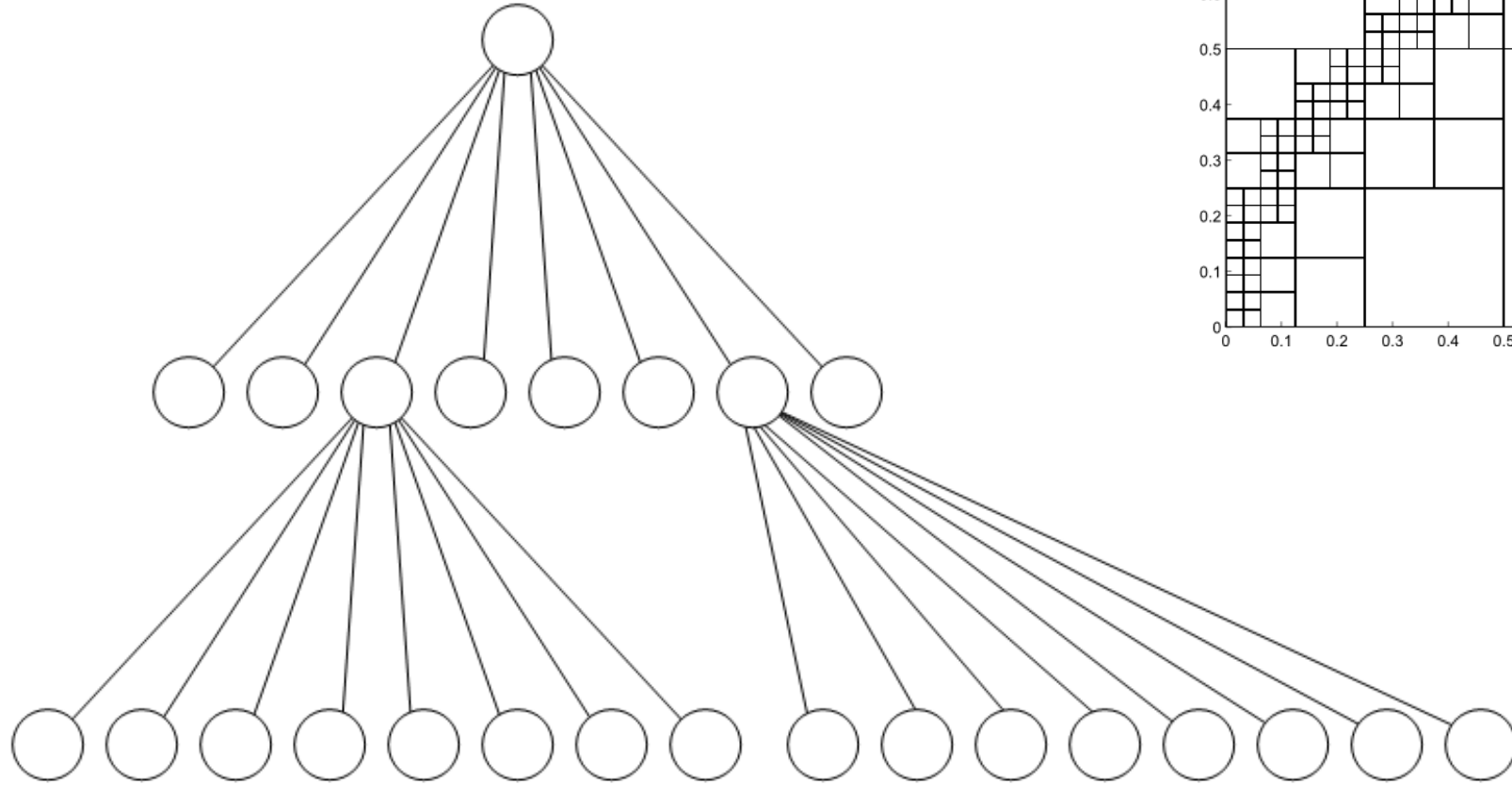
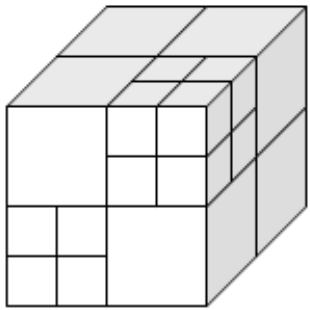
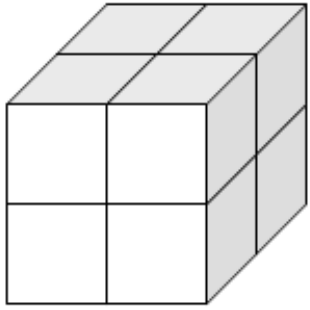
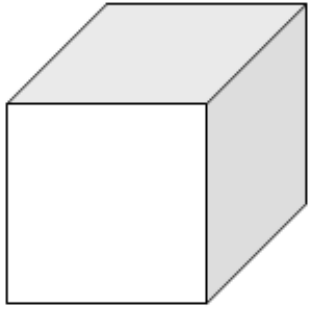
- Algoritmus navrhnutý pre mračno bodov
- Mračno bodov má určité „diery“ -> problém pri tvorbe povrchov trojrozmerných objektov
- nie je vhodná pre reliéf (aj keď je možné modelovať reliéf)
- Algoritmus založený na implicitnej funkcii
 1. Definovať funkciu s hodnotou menšou ako 0 vo vnútri modelu a väčšou ako 0 mimo modelu
 2. Extrahovať hodnoty 0
 3. Určiť čo je dnu a čo je von – vypočítať normály (riešenie v parciálnych deriváciách)
 4. Riešenie rovnice „Poisson“

$$f(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j B_j(\|x - c_j\|)$$



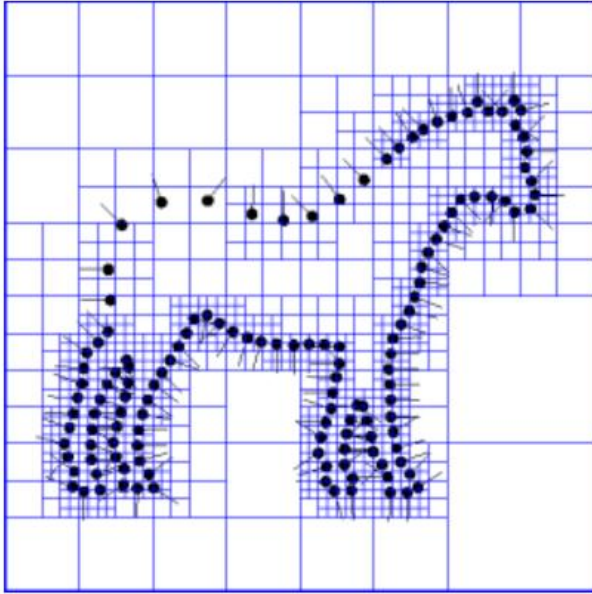
Poisson Surface Reconstruction

- Pri implementácii tohto postupu sa využíva tzv. „octree prístup“

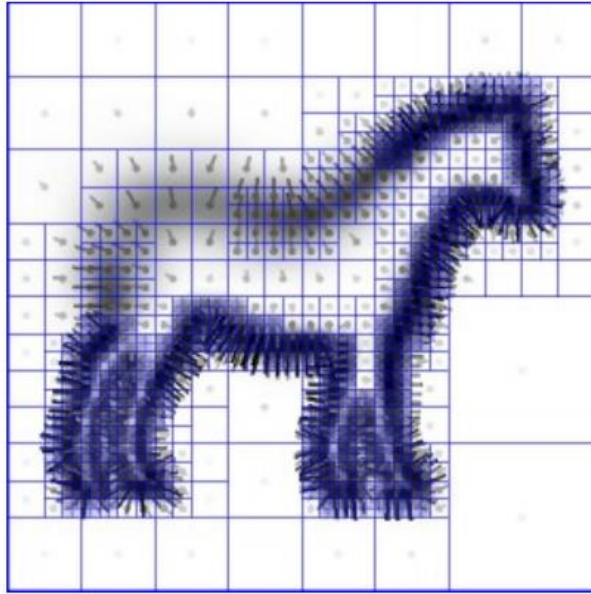


Poisson Surface Reconstruction

Nastavenie „octree“ parametru



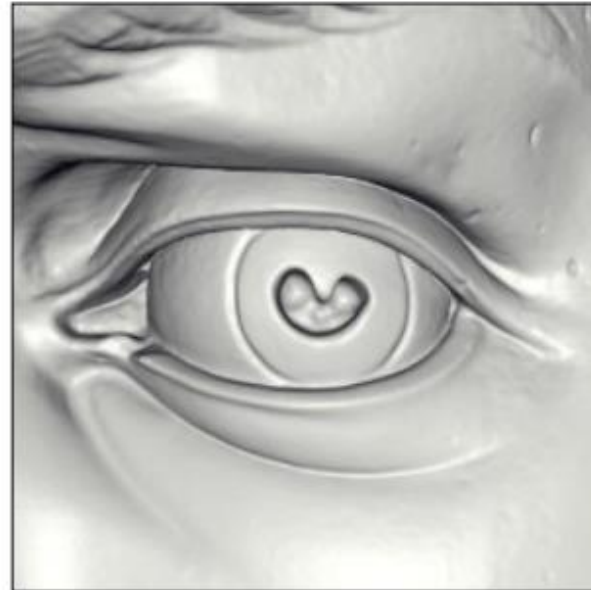
Výpočet normál



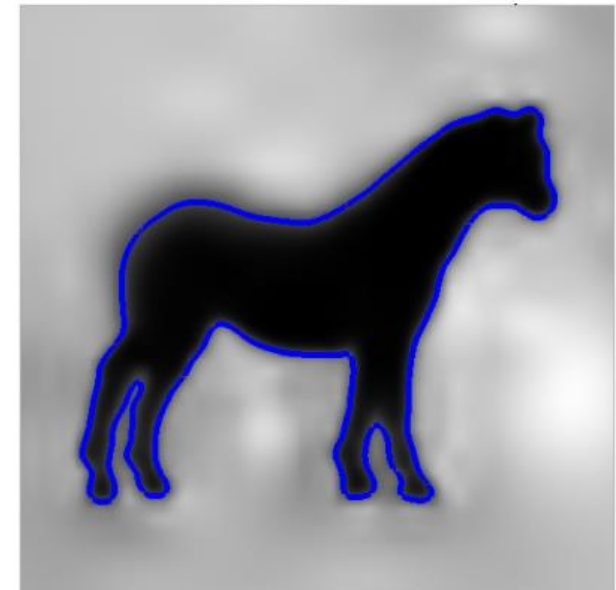
Výpočet odchýlok



Riešenie „Poisson“ rovnice

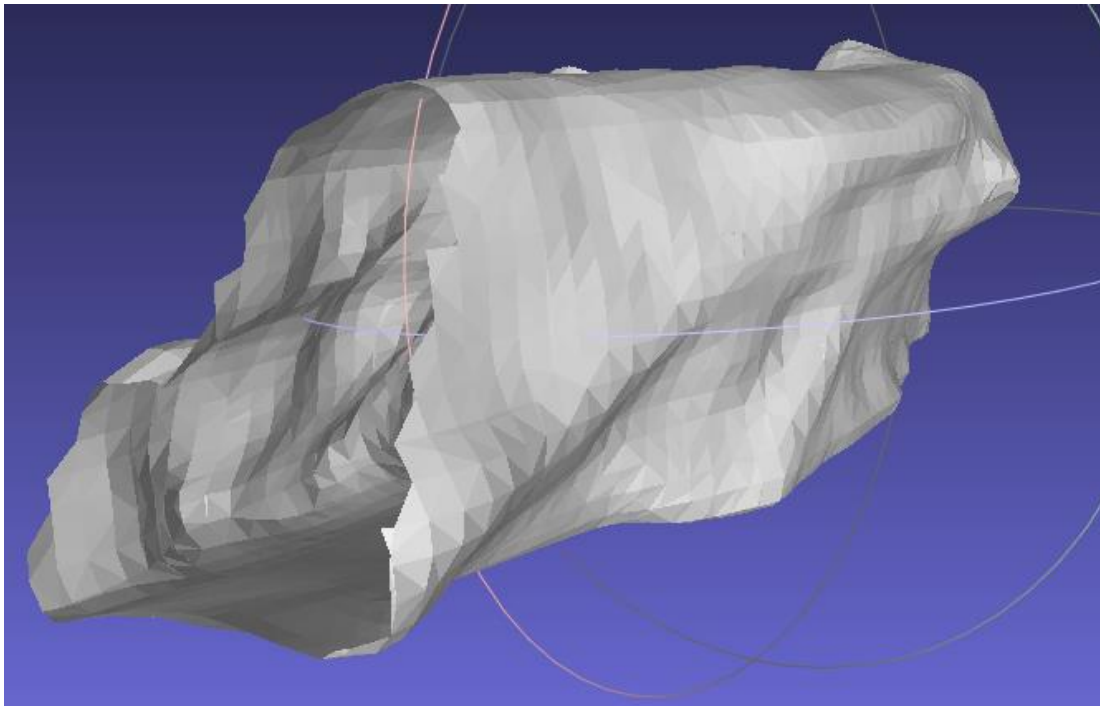


Odvodenie povrchu



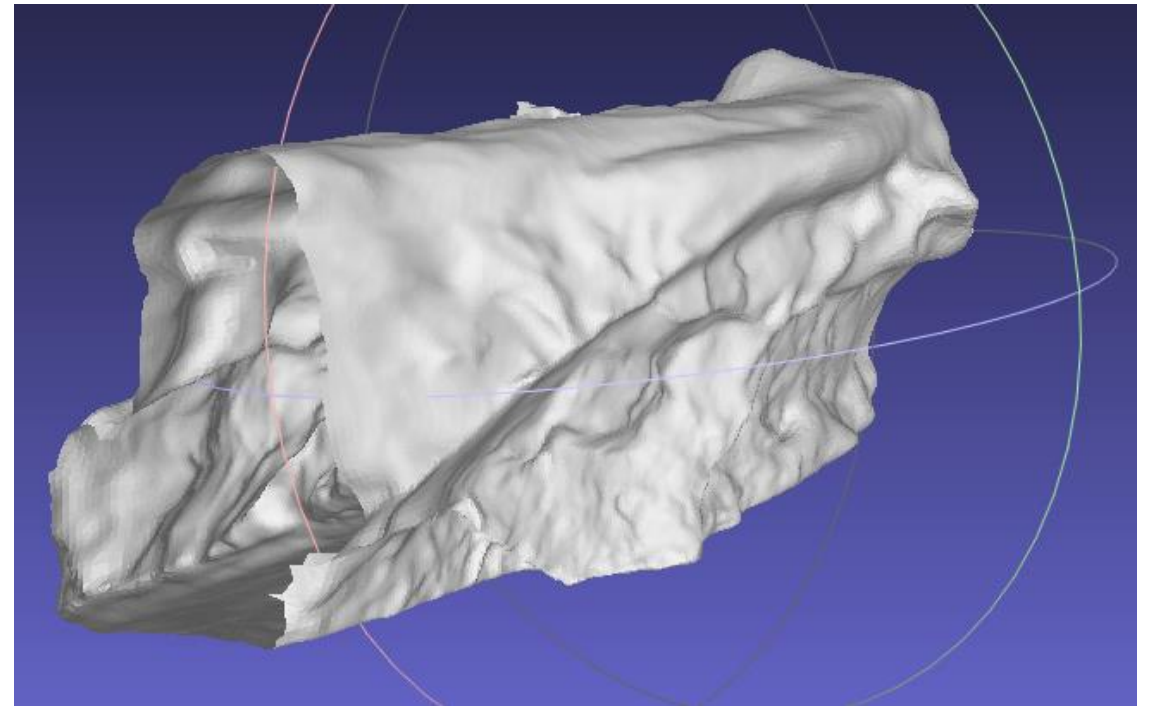
Poisson Surface Reconstruction

- Aplikácia pre geovedné disciplíny – modelovanie jaskýň



Octree depth = 6

Počet bodov (vertices) = 4 310

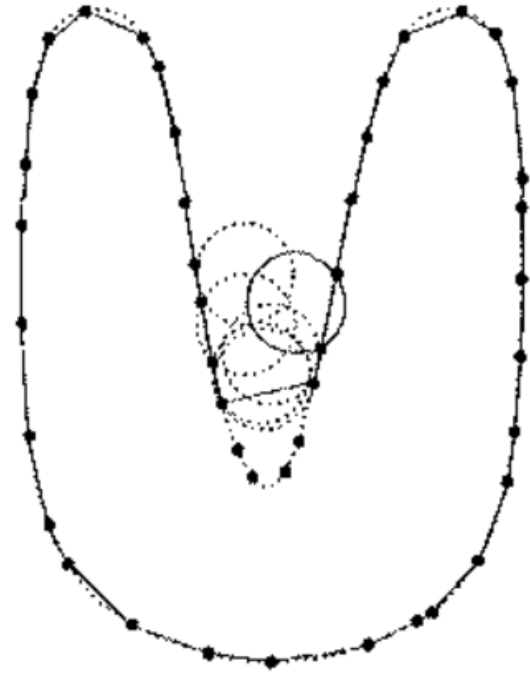
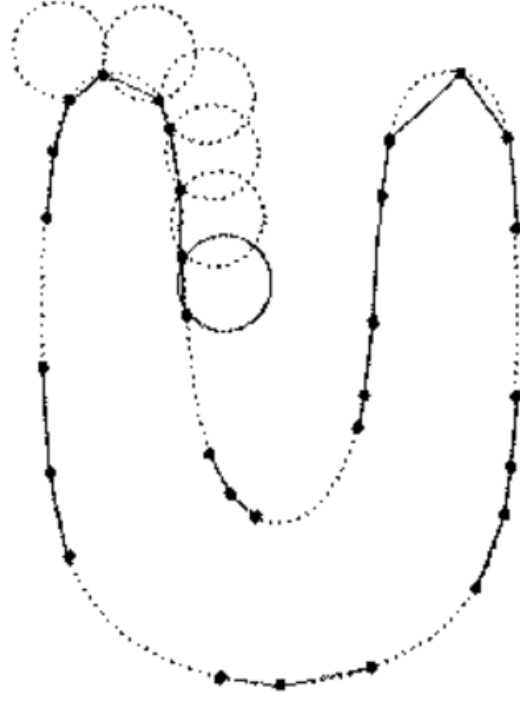
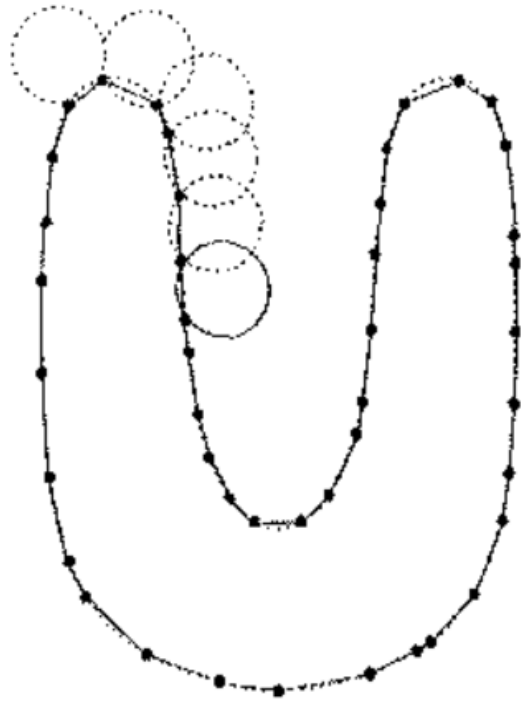


Octree depth = 9

Počet bodov (vertices) = 140 631

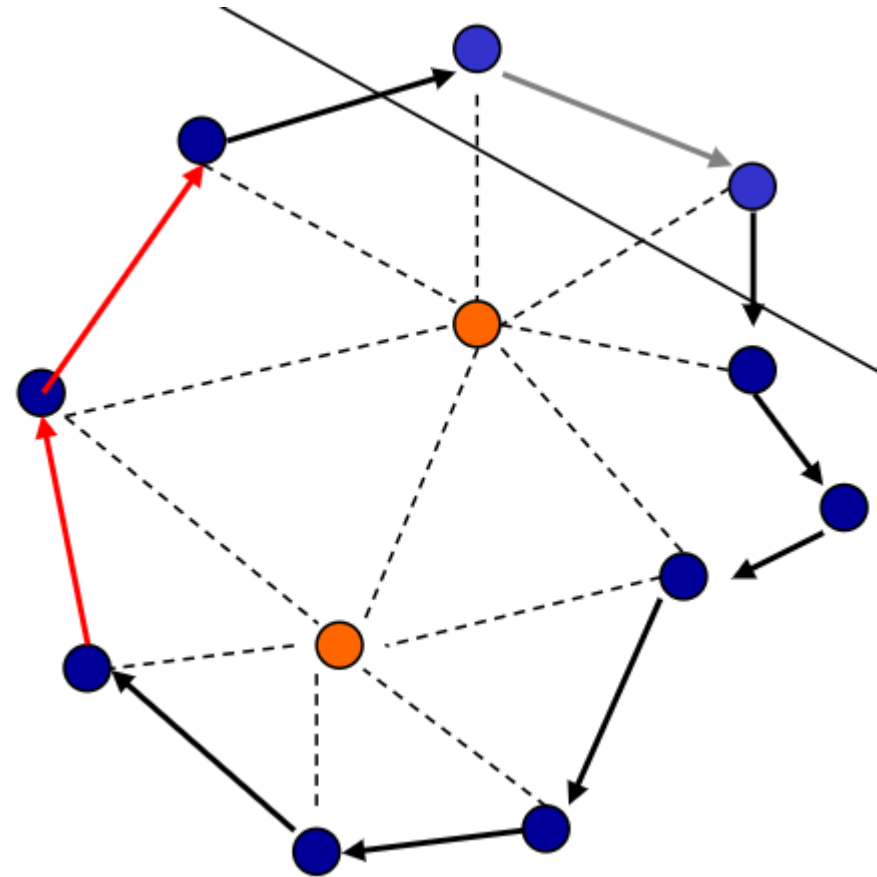
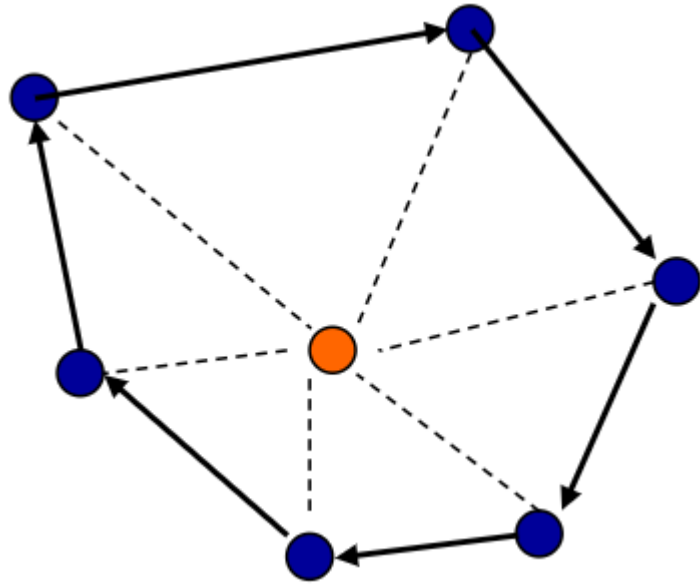
Ball Pivoting

- Vyhľadávacie okolie



Ball Pivoting

- Aplikácia pre geovedné disciplíny – modelovanie jaskýň



Ball Pivoting

- Aplikácia pre geovedné disciplíny – modelovanie jaskýň

