

Názov prednášky:

Priestorová interpolácie, vybrané interpolačné metódy

Osnova prednášky:

Úvod do priestorovej interpolácie

- Lineárna interpolácia,
- Thiessenove polygóny,
- Metóda najbližšieho suseda

Odporúčaná literatúra

KAŇUK, J., 2015: Priestorové analýzy a modelovanie. Vysokoškolské učebné texty. Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach, 106 s.

LLOYD, CD., 2010: Spatial Data Analysis: An Introduction For GIS Users. Oxford University Press, Oxford, s.206

Úvod do priestorovej interpolácie

Interpolácia je metóda, ktorou sa snažíme vypočítať údaje na miestach, pre ktoré nie sú známe údaje a nachádzajú sa medzi (lat. inter – medzi) dvoma ohraničujúcimi bodmi (polus – póly)

- ide o matematické metódy, na základe ktorých vypočítavame hodnoty modelovaného javu v bode, ktorý leží v priestore medzi vstupnými bodmi so známou hodnotou a cez ktoré (alebo v blízkosti ktorých) funkcia prechádza.

Opakom interpolácie je **extrapolácia** pomocou ktorej modelujeme hodnoty sledovaného javu v miestach, ktoré sa nachádzajú mimo zadaných dát (nie sú medzi známymi bodmi, ale sa nachádzajú mimo rozsahu územia)

- je vo všeobecnosti menej presný postup

Úvod do priestorovej interpolácie - príklad

Úvod do priestorovej interpolácie

Interpolácia je metóda, ktorou sa snažíme vypočítať údaje na miestach, pre ktoré nie sú známe údaje a nachádzajú sa medzi (lat. inter – medzi) dvoma ohraničujúcimi bodmi (polus – póly)

- ide o matematické metódy, na základe ktorých vypočítavame hodnoty modelovaného javu v bode, ktorý leží v priestore medzi vstupnými bodmi so známou hodnotou a cez ktoré (alebo v blízkosti ktorých) funkcia prechádza.

Opakom interpolácie je **extrapolácia** pomocou ktorej modelujeme hodnoty sledovaného javu v miestach, ktoré sa nachádzajú mimo zadaných dát (nie sú medzi známymi bodmi, ale sa nachádzajú mimo rozsahu územia)

- je vo všeobecnosti menej presný postup

- existuje veľké množstvo interpolačných metód a využívajú sa vo viacerých vedných odboroch pre rôzne aplikácie
- pri práci s priestorovými údajmi sa používajú postupy, ktoré sú založené na polohovo lokalizovaných dátach
- výsledné modely sú závislé od použitých vstupných geoat a interpolačných funkcií
- pre interpolačné metódy založené na empirických údajoch sa v odbornej literatúre používa aj termín odhad (**estimation**) alebo predikcia (**prediction**)
- jednou z najdôležitejších podmienok pre použitie metódy priestorovej interpolácie je priestorová závislosť. To znamená, že analyzovaný jav musí byť spojitý, alebo aspoň čiastočne spojitý – **autokorelovaný**.

Úvod do priestorovej interpolácie

Všeobecná formulácia problému priestorovej interpolácie

Daných je N hodnôt študovaného javu $z_j, j = 1, 2, \dots, N$ počet meraní v bodoch $r_j = (x_j^{[1]}, x_j^{[2]}, \dots, x_j^{[n]}), j = 1, 2, \dots, N$ v rámci určitého regiónu n – dimenzionálneho priestoru, pre ktoré je možné nájsť d – rôznych funkcií $F(r)$, ktoré prechádzajú cez zadané body, čo znamená splnenie podmienky:

$$F(r_j) = z_j, j = 1, 2, \dots, N$$

- existuje nekonečný počet funkcií, ktoré spĺňajú túto požiadavku,
- musia byť navrhnuté ďalšie podmienky
- výber interpolačnej funkcie je závislý prevažne od javu, ktorý chceme modelovať
- rôzne interpolačné metódy sú definované na základe rôznych podmienok, ako napríklad lokálnosť funkcie alebo jej hladkosť a pod. (Mitáš a Mitášová, 1999).

Klasifikácia interpolačných metód

Deterministické a stochastické metódy

Deterministické metódy sú založené na výpočte z hodnôt, ktoré boli získané meraním. Pri definovaní hodnôt vstupného bodového poľa nie je využitá teória pravdepodobnosti. Vypočítaný výsledok bude aj pri opakovaných výpočtoch rovnaký.

Stochastické metódy sú založené na náhodnosti a teórii pravdepodobnosti. Výsledok je skôr chápaný ako „jedna z možností“, preto pri opakovaní výpočtu môže byť dosiahnutý aj iný výsledok. Stochastické metódy vychádzajú z geoštatistických modelov, ktoré sú založené na priestorovej korelácii hodnôt.

Globálne a lokálne metódy

Globálny prístup - do výpočtu vstupujú hodnoty z celého dátového súboru. Pre dátový súbor sa používa jedna funkcia a zmena hodnoty v jednom bode vstupného bodového poľa má vplyv na výsledok.

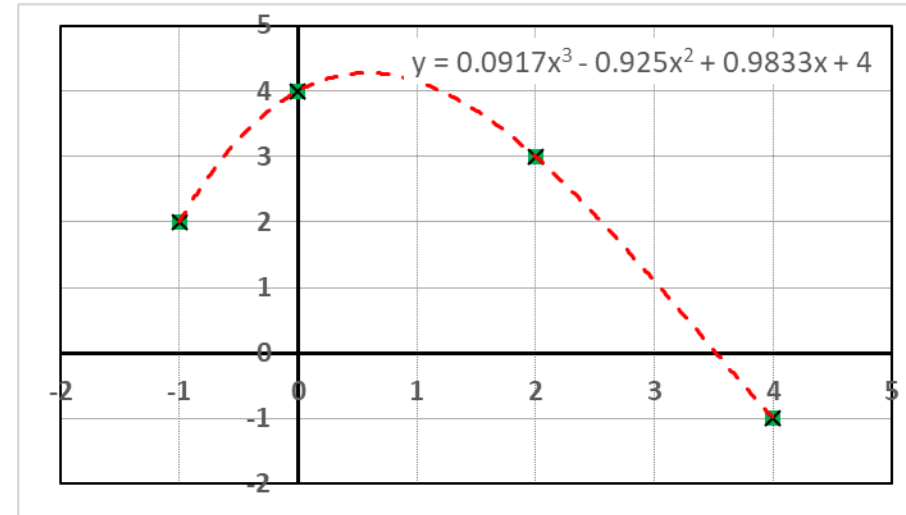
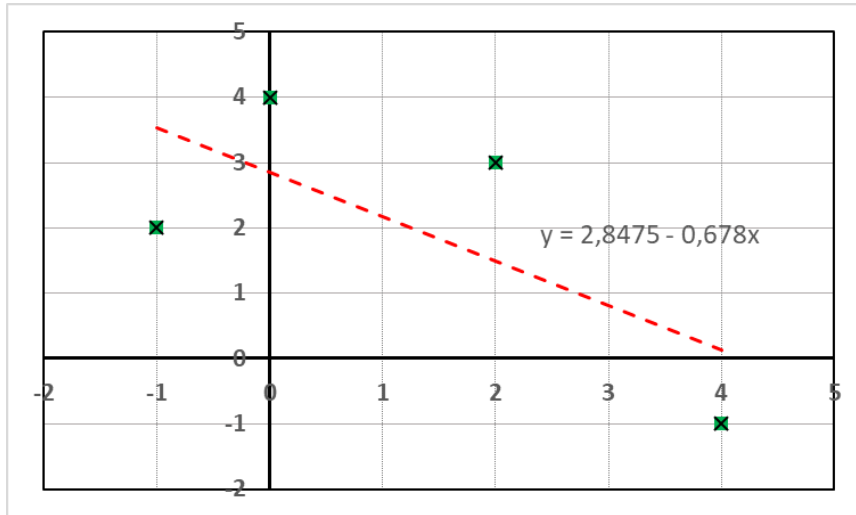
Lokálny prístup - hodnota sa vypočíta iba z časti dátového súboru (napr. pomocou pohybujúceho sa okna). Výpočet sa opakuje toľko krát, kým pohybujúce sa okno neobsiahne celý dátový súbor. Zmena jednej hodnoty vstupného bodového poľa ovplyvní iba výsledok výpočtu v miestach, kde sa daná hodnota nachádza.

Klasifikácia interpolačných metód

Exaktné a aproximujúce metódy

Exaktné interpolačné metódy sú také pri ktorých interpolačná funkcia prechádza všetkými bodmi vstupného bodového poľa. Spravidla ide o body, v ktorých hodnota bola určená meraním.

Ak priebeh interpolačnej funkcie neprechádza bodmi vstupného bodového poľa, ale nachádza sa mimo nich v ich blízkosti, ide o aproximujúce metódy.



Metódy váženého priemeru a metódy iných funkcií (označované ako štatistické a matematické metódy)

- funkcie založené na váženom priemere hodnôt vstupného bodového poľa (napr. Thiessenove polygóny, IDW, kriging, metóda prirodzeného suseda a pod.)
- metódy využívajúce iné matematické funkcie (napr. spline, metóda trendového povrchu, metóda najbližšieho suseda a pod.).

Lineárna kombinácia

- metódy lineárnej interpolácie je možné vnímať ako funkcie založené na váženom priemere hodnôt v rámci vstupného bodového poľa
- všeobecné vyjadrenie pre lineárnu interpoláciu je:

$$\hat{z}(s_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z(s_i)$$

$\hat{z}(s_0)$ je hodnota odhadovaná v bode s_0 umiestnenom v n -rozmernom priestore. V dvojrozmernom priestore preto platí vzťah $s = f(x, y)$;

$z(s_i)$ predstavuje n dostupných hodnôt v pozíciách s_i , čiže ide o meranú hodnotu v bode s_i (kde $i = 1, 2, \dots, n$);

n je počet meraní, resp. počet hodnôt údajov zo vstupného bodového poľa;

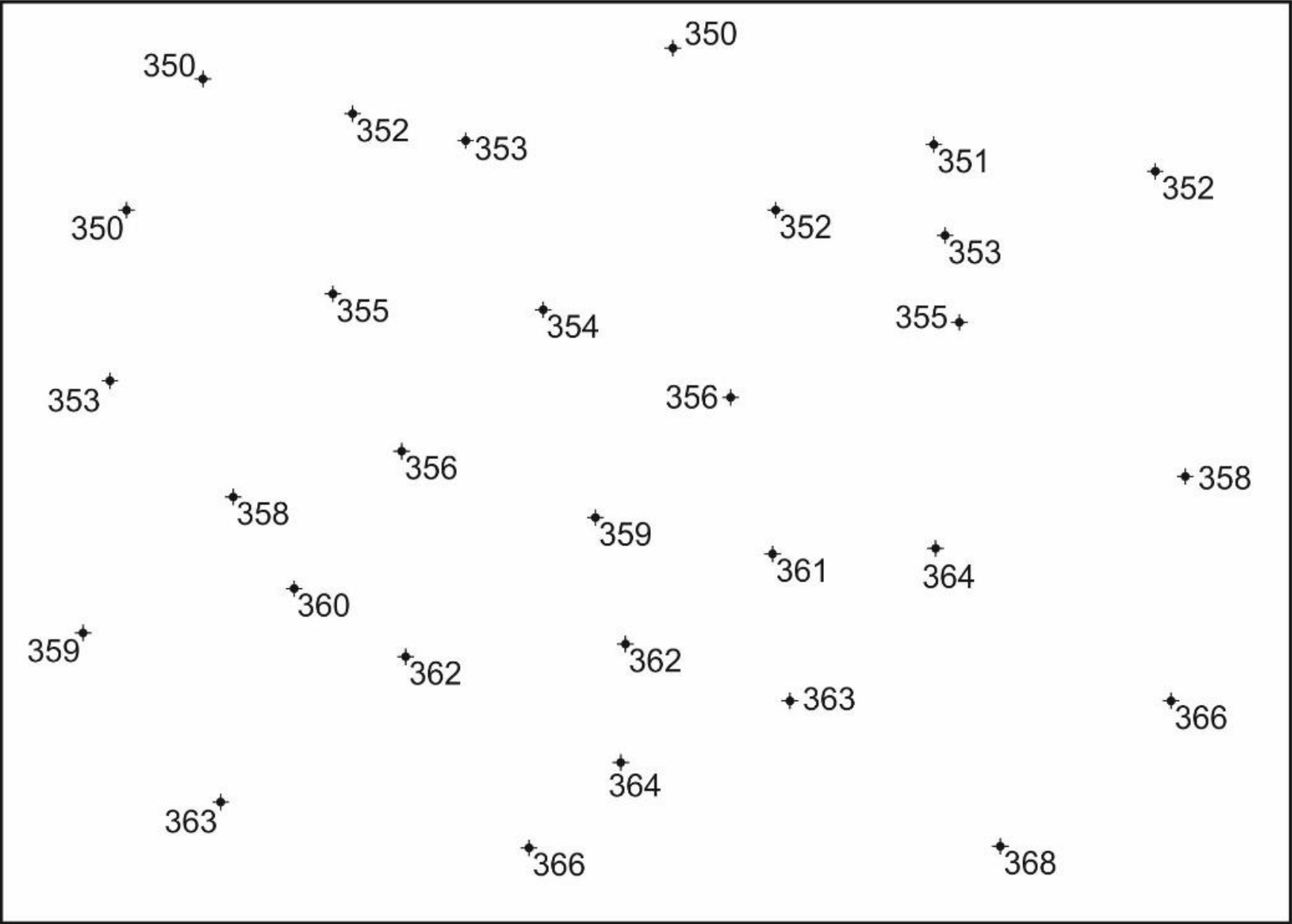
λ_i je váha meranej hodnoty v bode s_i , pričom predpokladáme, že suma váh je rovná 1, čiže platí vzťah

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

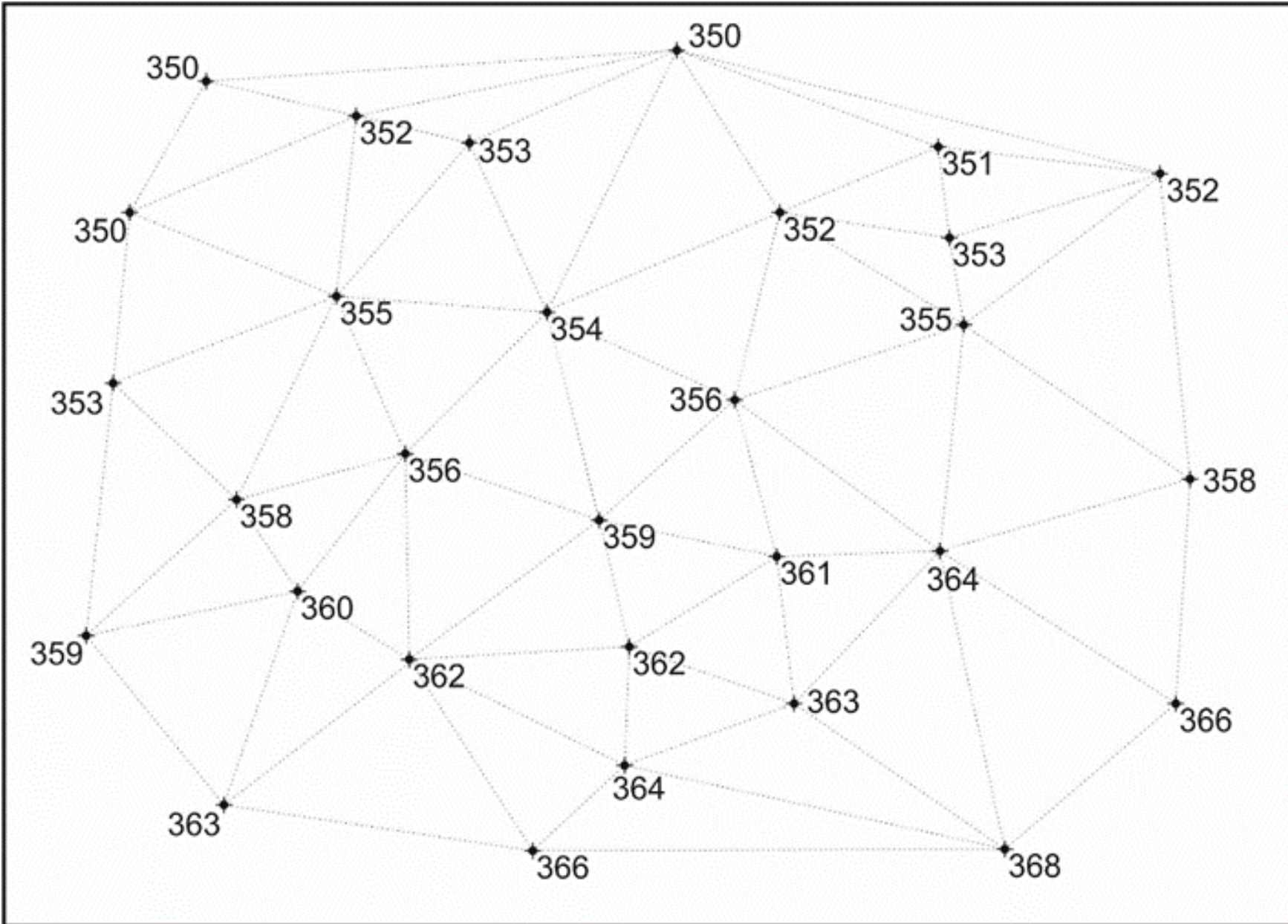
Lineárna kombinácia - príklad

Vstupné bodové pole meraní

- Bodové pole nadmorských výšok vyjadrené v metroch nad morom



Lineárna kombinácia - príklad

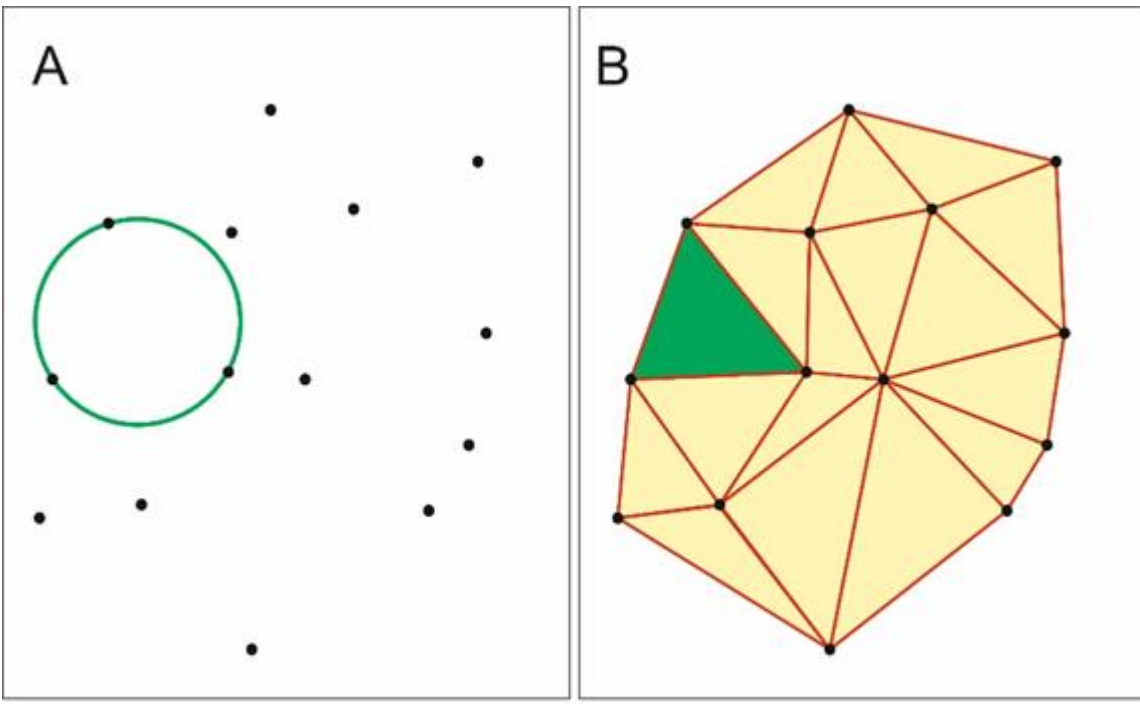


Vstupné bodové pole meraní

- Bodové pole nadmorských výšok vyjadrené v metroch nad morom

Krok 1

- body spojíme cez spojnice so susednými bodmi, pričom vzniká sieť trojuholníkov
- trojuholníky konštruujeme tak, aby sa čo najviac podobali na rovnostranné trojuholníky

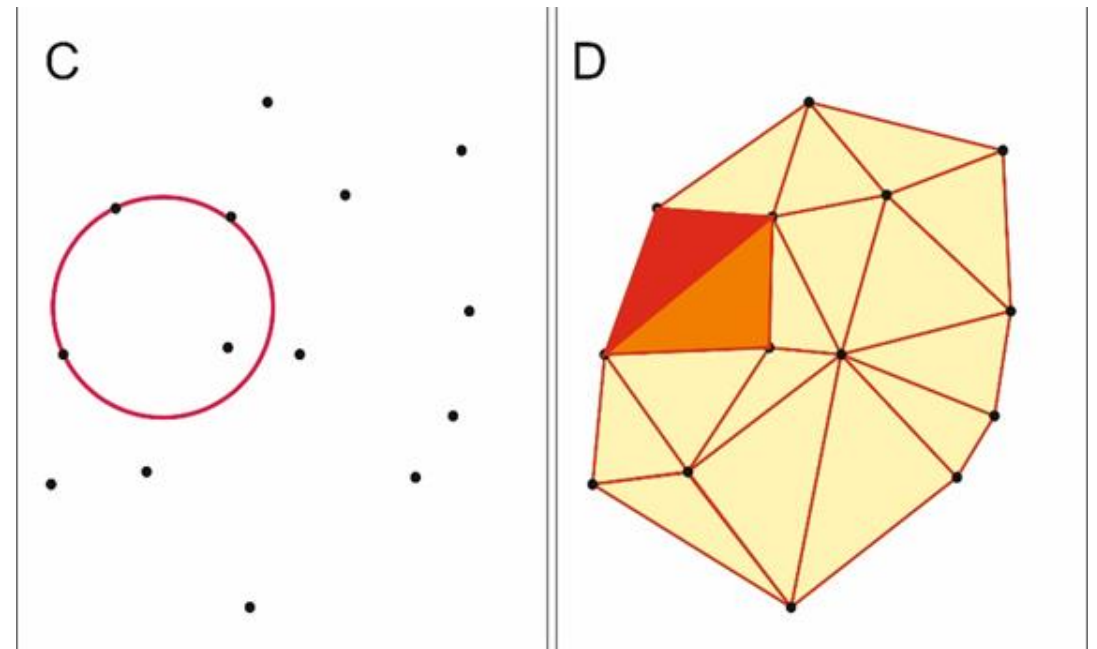


- A) vstupné bodové pole (čierne body), zelená kružnica znázorňuje kritérium, ktoré hovorí o tom, že do kružnice opísanej tromi vrcholmi trojuholníka nespadá vrchol žiadneho ďalšieho trojuholníka.
- B) je znázornená výstupná štruktúra TIN skonštruovaná metódou Delaunayovej triangulácie, zelenou farbou je znázornený testovací trojuholník z bodov selektovaných podľa (A).

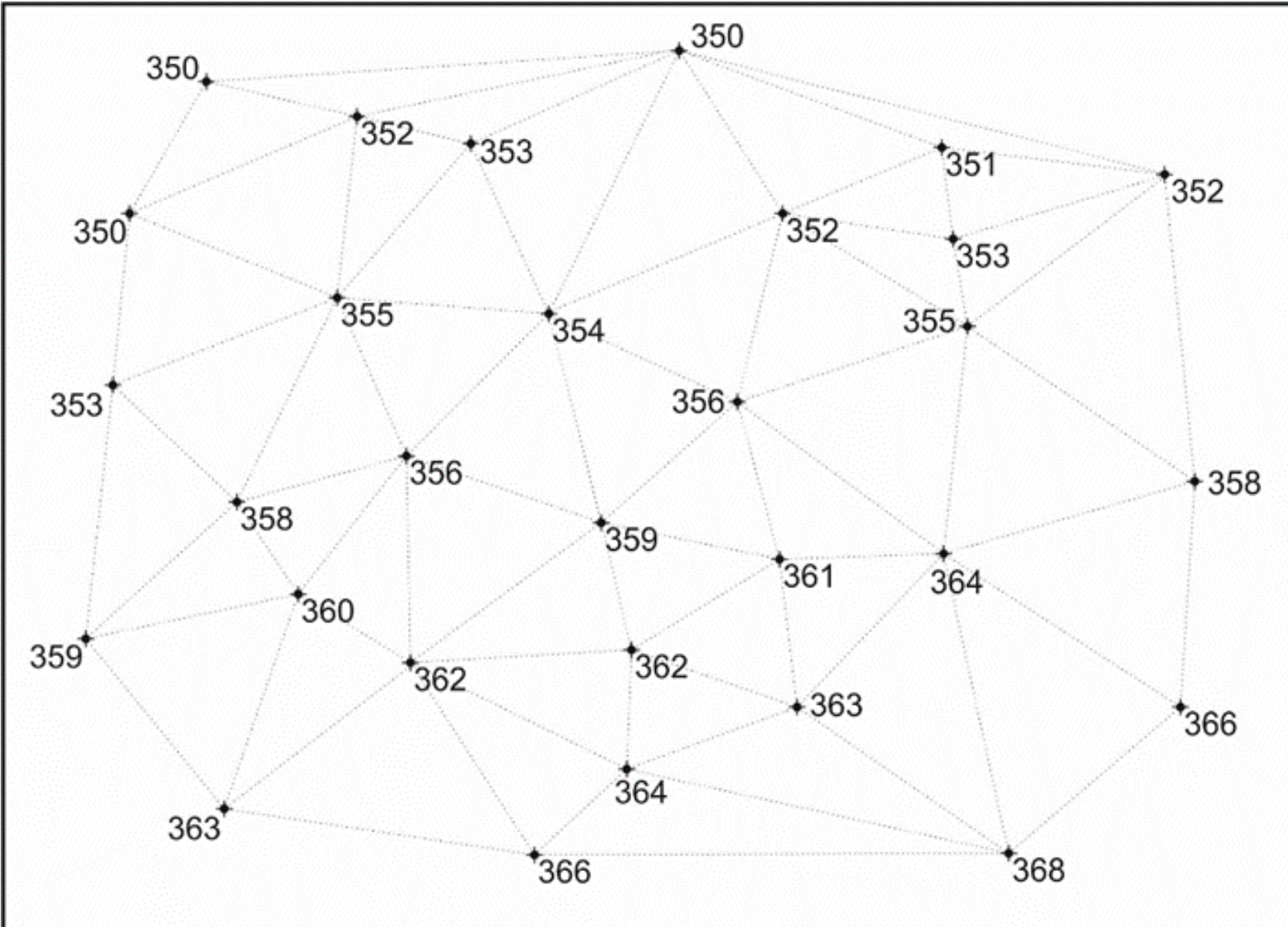
Trojuholník na (D) znázornený s červenou (a oranžovou) farbou nespĺňa podmienku, nakoľko (C) do kružnice opísanej tromi vrcholmi trojuholníka spadá vrchol iného trojuholníka.

Delaunayova triangulácia je charakteristický tým, že trojuholníky sú budované v nepravidelnej trojuholníkovej sieti na základe niekoľkých kritérií:

- do kružnice opísanej tromi vrcholmi trojuholníka nespadá vrchol žiadneho ďalšieho trojuholníka,
- maximalizuje minimálny uhol v trojuholníku,
- trojuholníky sú jedinečné a neprekrývajú sa,
- hranicu trojuholníkovej siete tvorí konvexný obal bodov vstupného bodového poľa,
- ak žiadna štvorica bodov nie je kocirkulárna (neleží na kružnici), triangulácia je jednoznačná



Lineárna kombinácia - príklad



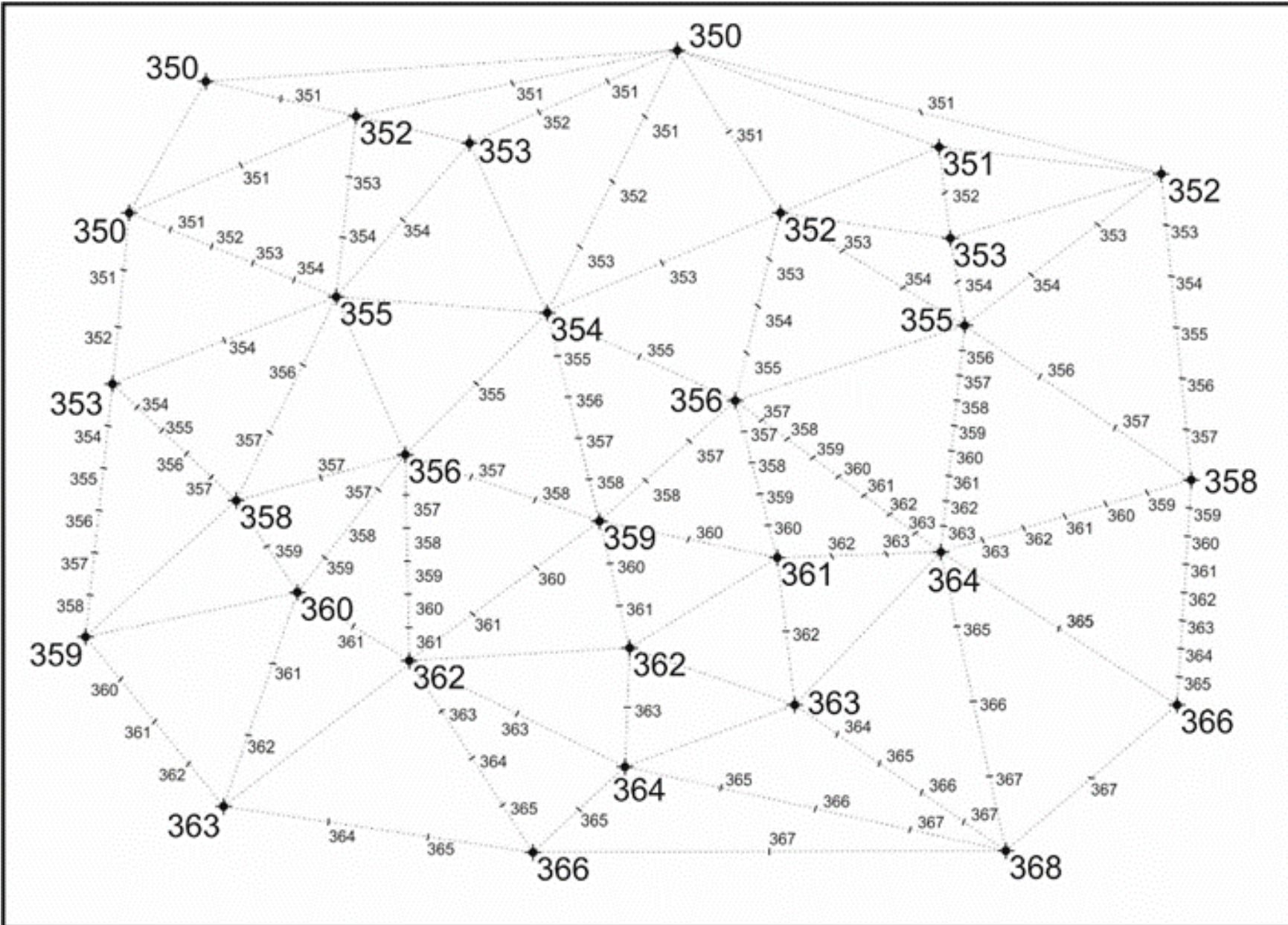
Vstupné bodové pole meraní

- Bodové pole nadmorských výšok vyjadrené v metroch nad morom

Krok 1

- body spojíme cez spojnice so susednými bodmi, pričom vzniká sieť trojuholníkov
- trojuholníky konštruujeme tak, aby sa čo najviac podobali na rovnostranné trojuholníky

Lineárna kombinácia - príklad



Vstupné bodové pole meraní

- Bodové pole nadmorských výšok vyjadrené v metroch nad morom

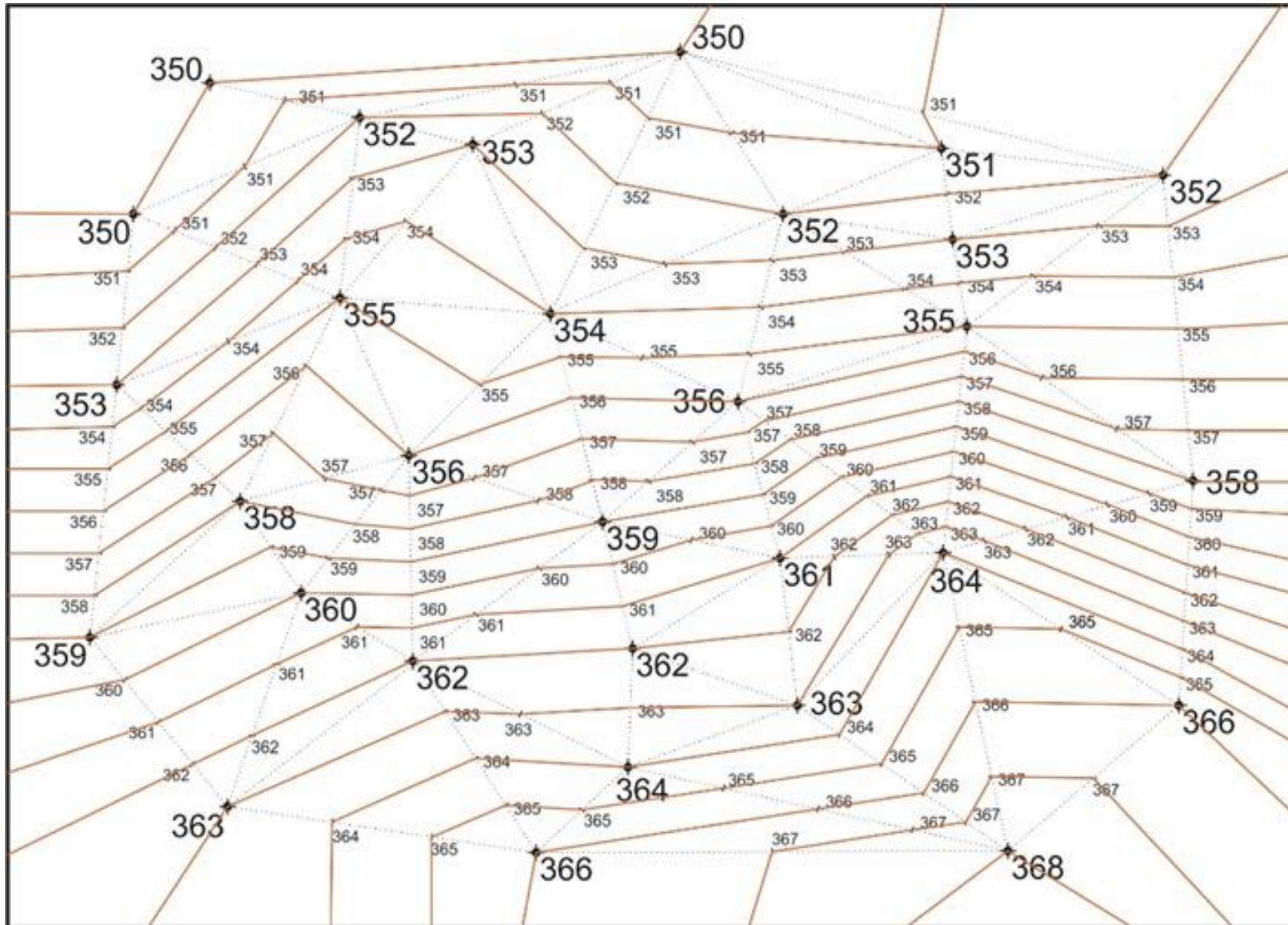
Krok 1

- body spojíme cez spojnice so susednými bodmi, pričom vzniká sieť trojuholníkov
- trojuholníky konštruujeme tak, aby sa čo najviac podobali na rovnostranné trojuholníky

Krok 2

- pri odhade vychádzame z predpokladu tzv. lineárnej závislosti, t.j., že hodnoty výšky sa menia priamo úmerne v závislosti od vzdialenosti k bodom vstupného bodového poľa

Lineárna kombinácia - príklad



Vstupné bodové pole meraní

- Bodové pole nadmorských výšok vyjadrené v metroch nad morom

Krok 1

- body spojíme cez spojnice so susednými bodmi, pričom vzniká sieť trojuholníkov
- trojuholníky konštruujeme tak, aby sa čo najviac podobali na rovnostranné trojuholníky

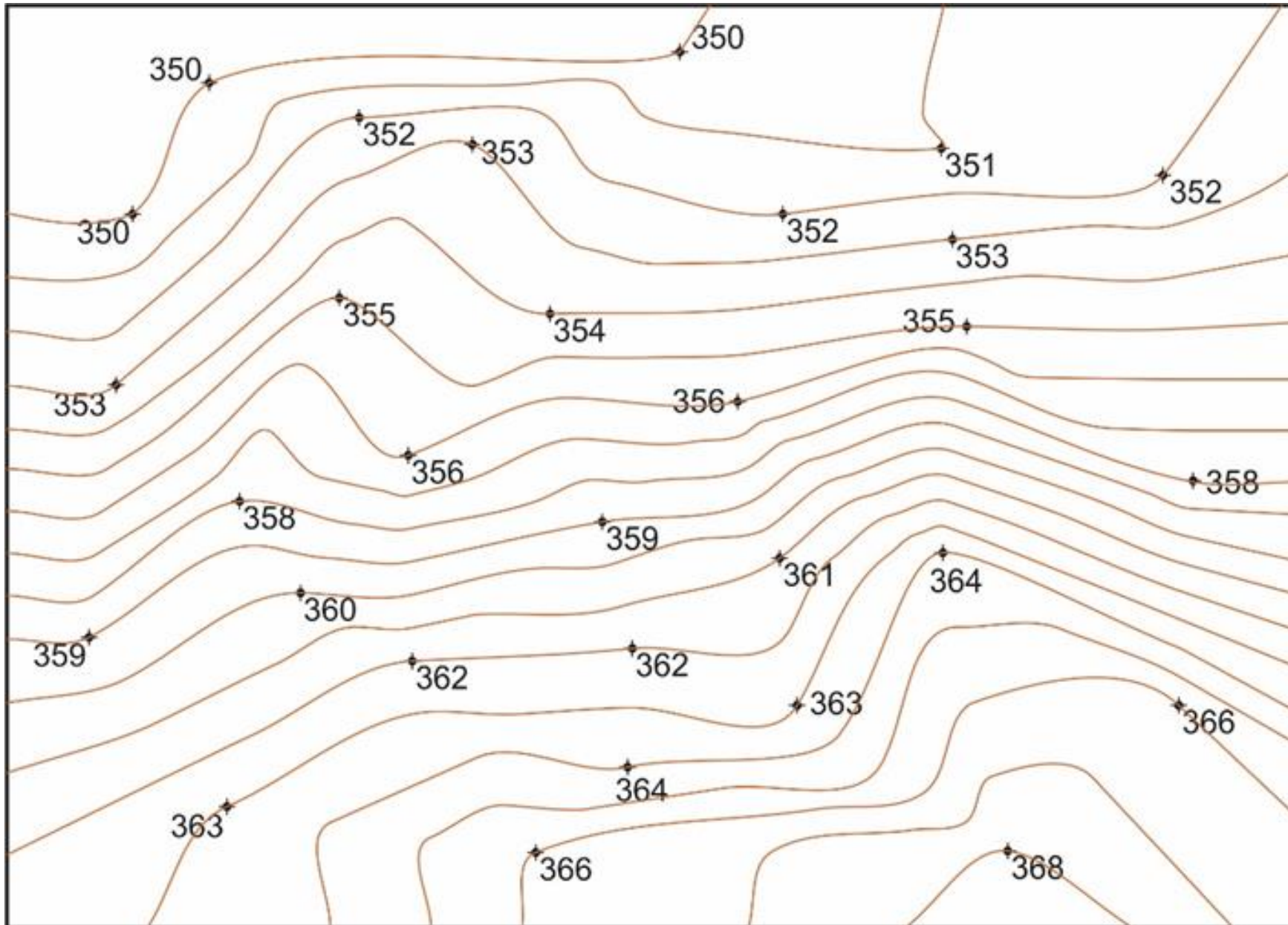
Krok 2

- pri odhade vychádzame z predpokladu tzv. lineárnej závislosti, t.j., že hodnoty výšky sa menia priamo úmerne v závislosti od vzdialenosti k bodom vstupného bodového poľa

Krok 3

- vytvoríme izolínie, t.j. že spájame miesta s rovnakou hodnotou

Lineárna kombinácia - príklad



Vstupné bodové pole meraní

- Bodové pole nadmorských výšok vyjadrené v metroch nad morom

Krok 1

- body spojíme cez spojnice so susednými bodmi, pričom vzniká sieť trojuholníkov
- trojuholníky konštruujeme tak, aby sa čo najviac podobali na rovnostranné trojuholníky

Krok 2

- pri odhade vychádzame z predpokladu tzv. lineárnej závislosti, t.j., že hodnoty výšky sa menia priamo úmerne v závislosti od vzdialenosti k bodom vstupného bodového poľa

Krok 3

- vytvoríme izolínie, t.j. že spájame miesta s rovnakou hodnotou

Krok 4

- vyhladenie izolínií

Thiessenove polygóny

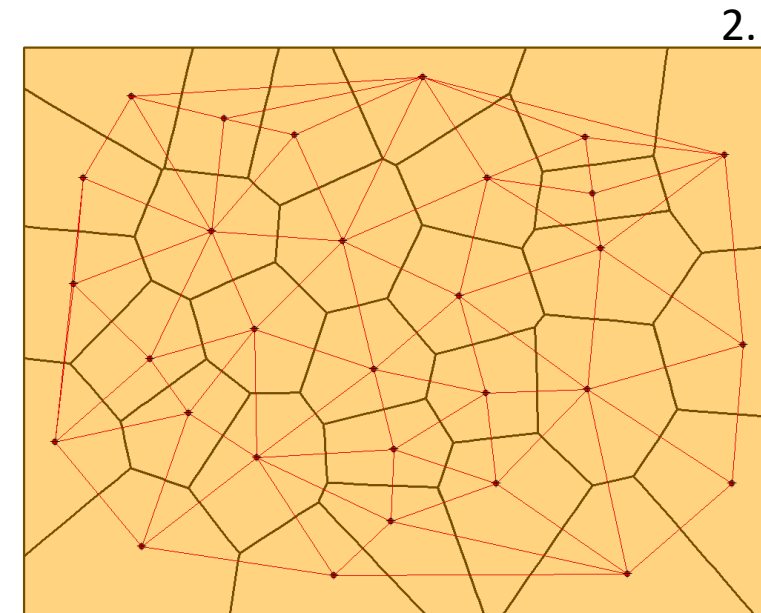
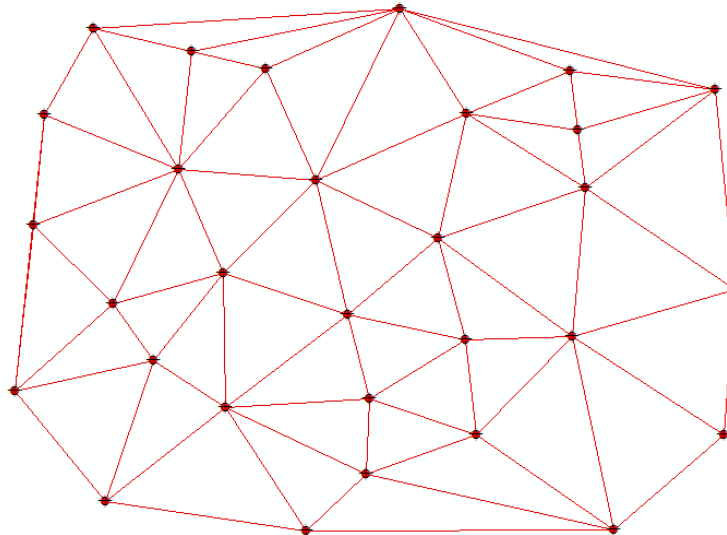
- Thiessenove polygóny sú vytvorené z množiny vstupného bodového poľa procesom nazývaným ako Voronoiho, alebo Dirichletova teselácia
- základný princíp - priestor interpolácie sa rozdelí na oblasti so sférou vplyvu vstupného bodu, ktorý zároveň leží v strede týchto oblastí
- takto vzniknuté polygóny definujú „individuálne plochy vplyvu“ okolo každého vstupného bodu
- atribút daného bodu sa teda vzťahuje na celý priestor „plochy vplyvu“.
- táto metóda je vhodná na transformáciu kvalitatívnych bodových dát, pri ktorých nie je potrebné uvažovať o spojitosti dát

Postup tvorby Thiessenových polygónov:

1. Určenie spojnic medzi susediacimi bodmi vstupného bodového poľa (Delaunayova triangulácia)

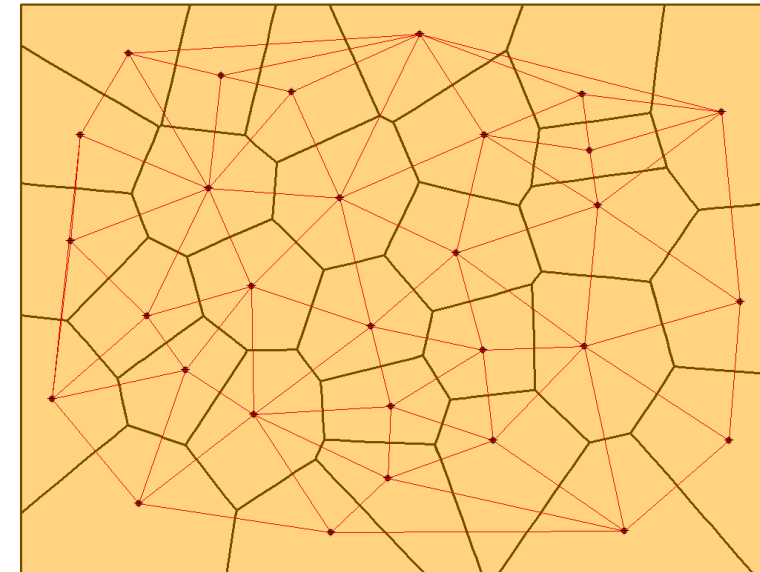
2. Tvorba „plôch vplyvu“

- je ohraničená líniami, t.j. kolmice na spojnice medzi susediacimi bodmi. Ide o tzv. bisektory
- všetky body ohraničené líniami majú bližšiu vzdialenosť k zdrojovému bodu ako k inému.



Thiessenove polygóny - zopár poznámok

- je základom pre interpolačné metódy:
 - TIN,
 - metóda najbližšieho suseda,
 - prirodzeného suseda a ďalšie.
- Aplikácie aj v oblasti humánnej geografie, napr. pri definovaní optimálnych hraníc pomocou teórie centrálnych miest, optimálne rozloženie uzlových bodov služieb a pod.
- použitie tejto metódy nie je vhodné pre spojité javy, pretože výsledkom tejto metódy je priestorová štruktúra údajov, ktorá má výrazný diskretný charakter, každý odhad je založený iba na jednej hodnote.
- problematické pre výpočet sú okraje bodového poľa, kde je viditeľný tzv. okrajový efekt.
 - „plochy vplyvu“ majú teoreticky nekonečnú plochu
 - taktiež spojnice medzi dvoma susediacimi bodmi na okraji nemôžu byť použité pre tvorbu „plôch vplyvu“, nakoľko stred ich spojnic nie je hranicou, pre ktorú platí, že všetky body ohraničené líniami majú bližšiu vzdialenosť k zdrojovému bodu ako k inému



Metóda najbližšieho suseda

V AJ je pomenovaná ako Nearest Neighbour

základný princíp – výsledné hodnoty sú určované na základe hodnôt najbližšieho miesta, pre ktorý máme zaznamenaný údaj

- je navrhnutá pre grid, pričom jednotlivým bunkám (resp. ich uzlovým bodom, ktoré sú nositeľmi hodnoty celej bunky) je priradovaná hodnota ich najbližšieho bodu so známou hodnotou (teda najbližšieho známeho „suseda“).
- podobný postup ako v prípade definovania Thiessenových polygónov, avšak výsledkom je nie sú polygóny, ale grid.
- tento postup je možné považovať za lineárnu kombináciu pre neznáme body, pričom najbližšiemu známemu bodu je priradzovaná váha λ_i rovná 1 a ostatných bodom vstupného bodového poľa je priradená váha λ_i 0.

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & \text{ak } d_{i,0} = \min \\ 0 & \text{ak } d_{i,0} \neq \min \end{cases}$$

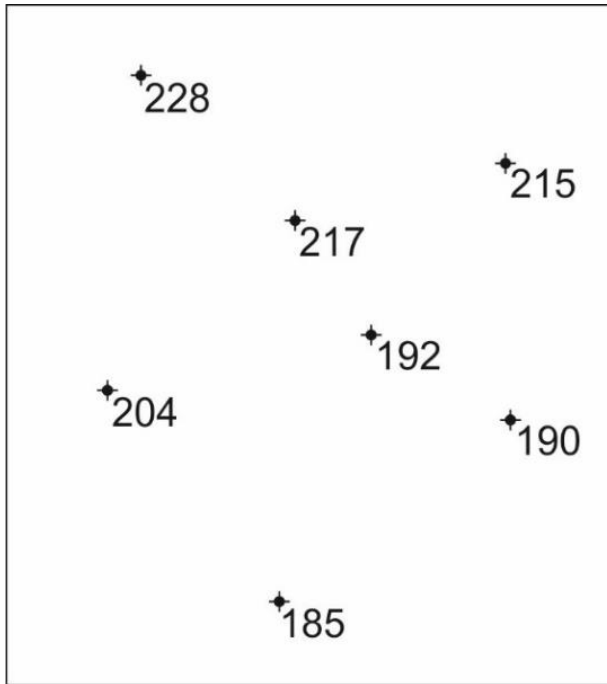
$d_{i,0}$ - je vzdialenosť medzi známym s_i a určovaným s_0 bodom.

Výsledný odhad je možné vyjadriť nasledovne: $z(s_0) = z(s_i) \lambda_i \min$

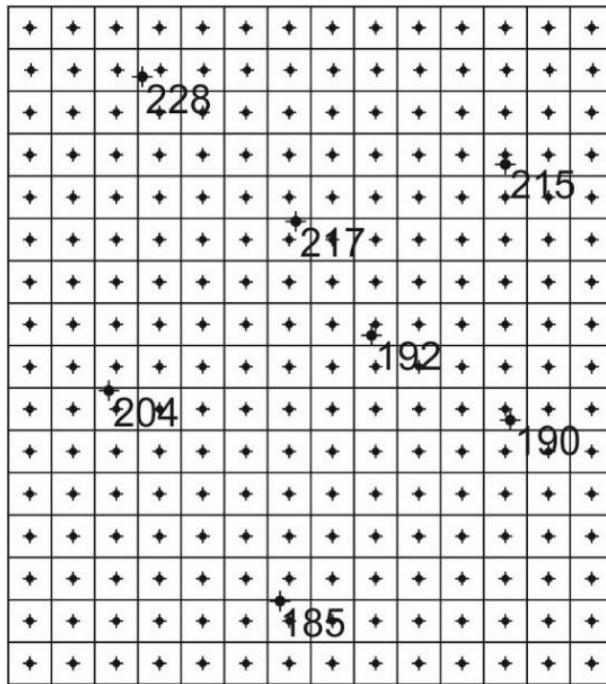
$z(s_0)$ – je hodnota v určovanom bode

$z(s_i)$ – je hodnota v bode s_i vstupného bodového poľa, pričom $i = 1, 2, 3, \dots, n$

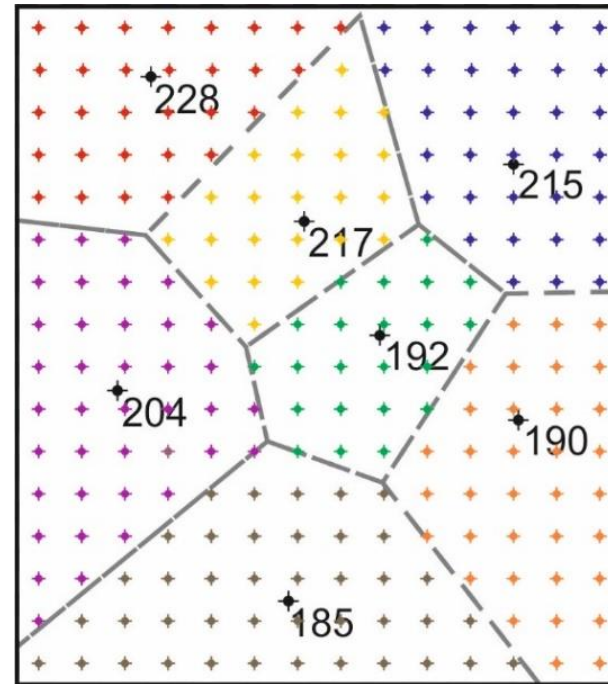
Metóda najbližšieho suseda - príklad



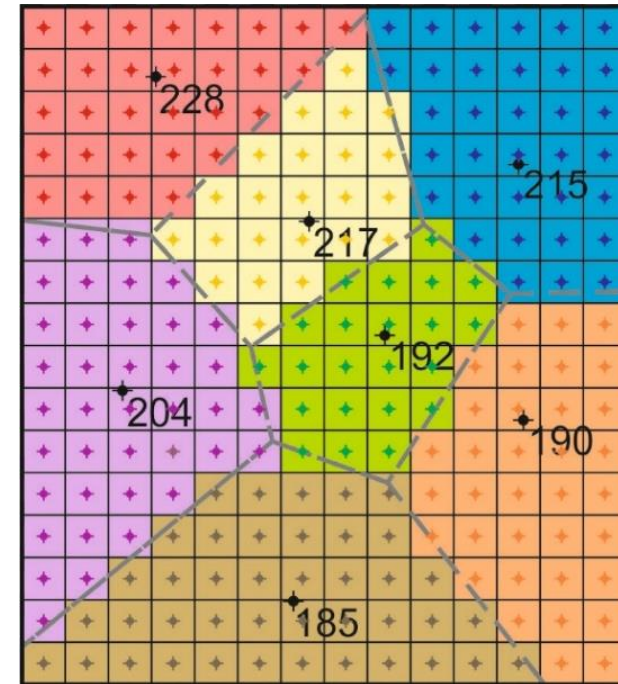
Vstupné bodové pole



Vstupné bodové pole hodnôt s definovanou mriežkou. Hodnoty výsledného gridu sú určované pre uzlové body (v našom prípade pre stred buniek).



Určenie hodnoty uzlových bodov na základe vzťahu $z(s_0) = z(s_i) \lambda_i \min$. Sivou prerušovanou čiarou sú znázornené Thiesenove polygóny



Výsledná štruktúra gridu určená na základe metódy najbližšieho suseda