OBZORY

1/2026 (55)

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2026 ročník 55

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 1/2026 Volume 55

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: Štefan Znám, Beloslav Riečan et Daniel Kluvanec

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2026 (55)

VZDELÁVANIE V MATEMATIKE A INFORMATIKE

O istých iracionálnych rovniciach s treťou odmocninou

Jozef Doboš

Abstract [On certain Cube Root Radical Equations]: The aim of this article is to show an elegant solution to certain cube root radical equations. Surprisingly, this process of solving can produce extraneous roots.

Key words: radical equations, cube root, checking a solution

Súhrn: Cieľom článku je ukázať elegantné riešenie istých iracionálnych rovníc s treťou odmocninou. Prekvapujúce je, že pri tomto postupe môžu vzniknúť falošné korene.

Kľúčové slová: iracionálne rovnice, tretia odmocnina, skúška správnosti

MESC: H30

Úvod

Iracionálne rovnice štandardne riešime tak, že najskôr osamostatníme odmocninu a potom takto upravenú rovnicu umocníme. Tento postup v prípade potreby opakujeme. Nakoniec dostaneme algebraickú rovnicu, ktorú vyriešime. V niektorých prípadoch možno efektívne použiť iný postup, ako ukazuje nasledujúca úloha, ktorá je uvedená v knihe [7] aj s návodom na riešenie.

130. Riešte rovnicu $\sqrt[3]{x+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{x-\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Ako odpoveď autori uvádzajú: $x=\pm\sqrt{2}$. Ešte pred tým, ako prezradíme návod a uvedieme riešenie, skúsme urobiť skúšku správnosti. A hneď je tu prvá otázka: je v školskej matematike definovaná tretia odmocnina zo záporného čísla? Pohľad do učebníc a príručiek ukazuje, že v priebehu rokov sa situácia u nás menila.

V učebnici [1] sa píše: „Treba výslovne zdôrazniť, že pre záporné číslo n-tú odmocninu nedefinujeme.“

Učebnica [2] uvádza túto definíciu: „Ak n je nepárne, tak rovnica $x^n=a$ má pre každé číslo a jediné riešenie. Toto riešenie označujeme $\sqrt[n]{a}$.“ Podobne je to v učebnici [3].

Josef Polák v knihe [6] hovorí o „rozšířené definici n-té odmocniny pro liché n“, pritom v knihe [5] upozorňuje na možné riziká takejto definície: „Pak však již neplatí některé ze vzorců pro počítání s odmocninami, např. vzorec $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$, jak ukazuje tento jednoduchý příklad: $\sqrt[3]{-8} = -2$, ale $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$."

My sa pre účely tohto článku budeme pridržiavať vyššie uvedenej definície podľa učebnice [2]. To nám umožňuje prepísať rovnicu z úlohy 130 do vhodnejšieho tvaru

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}+x} + \sqrt[3]{\sqrt{2}-x} = \sqrt{2}. \tag{1}$$

Dostali sme rovnicu s koreňmi $x = \pm\sqrt{2}$, pričom pri skúške správnosti už nemusíme riešiť otázku o tretej odmocnine zo záporného čísla. Teraz prezradíme návod na riešenie podľa knihy [8]: „(Pokyn: Zmocniti třemi, vytknouti společný činitel, v závorce se objeví levá strana rovnice.)" Pomocou tohto návodu dostaneme nasledujúce elegantné riešenie rovnice (1).

Položme $u = \sqrt[3]{\sqrt{2}+x}$, $v = \sqrt[3]{\sqrt{2}-x}$. Potom

$$u + v = \sqrt{2}, \qquad \text{(pôvodná rovnica)}$$
$$u^3 + v^3 = 2\sqrt{2}. \qquad \text{(vyplýva z definície } u \text{ a } v\text{)}$$

Odtiaľ dostávame $(u+v)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2} = u^3 + v^3$, teda $(u+v)^3 = u^3 + v^3$. Ďalej postupujeme podľa vyššie uvedeného návodu:

$$\begin{aligned} (u+v)^3 &= u^3 + v^3, \\ u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 &= u^3 + v^3, \\ u^3 + v^3 + 3uv\underbrace{(u+v)}_{=\sqrt{2}} &= u^3 + v^3, \\ 3\sqrt{2}\cdot uv &= 0. \end{aligned}$$

To znamená, že $u = 0$ alebo $v = 0$, čiže $\sqrt[3]{\sqrt{2}+x} = 0$ alebo $\sqrt[3]{\sqrt{2}-x} = 0$.

Odpoveď: $x = \pm\sqrt{2}$.

Musíme robiť skúšku správnosti?

Pri rovnici (1) to bolo jednoduché, tam sme sa nad touto otázkou ani nezamysleli. Pretože umocnenie na tretiu je ekvivalentná úprava, zdalo by sa, že skúšku správnosti robiť nemusíme. Prekvapenie nás čaká pri nasledujúcej úlohe.

Úloha 1. Riešte rovnicu

$$\sqrt[3]{2x-3} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{x}. \tag{2}$$

Riešenie: Položme $u = \sqrt[3]{2x-3}$, $v = \sqrt[3]{x-2}$. Potom

$$u^3 + v^3 = 3x - 5, \qquad \text{(vyplýva z definície } u \text{ a } v\text{)}$$
$$u + v = \sqrt[3]{x}. \qquad \text{(pôvodná rovnica)}$$

Ďalej postupujeme podľa vyššie uvedeného návodu z knihy [8].

$$\begin{aligned}
(u+v)^3 &= \left(\sqrt[3]{x}\right)^3, \\
u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 &= x, \\
\underbrace{u^3 + v^3}_{3x-5} + 3uv\underbrace{(u+v)}_{\sqrt[3]{x}} &= x, \\
3x - 5 + 3\sqrt[3]{x} \cdot uv &= x, \\
3\sqrt[3]{x} \cdot uv &= 5 - 2x, \\
27x(uv)^3 &= (5-2x)^3, \\
27x(2x-3)(x-2) &= (5-2x)^3, \\
&\vdots \\
62x^3 - 249x^2 + 312x - 125 &= 0, \\
(x-1)^2(62x-125) &= 0.
\end{aligned}$$

Číslo $x = 1$ však nie je koreňom rovnice (2), ako sa môžeme ľahko presvedčiť skúškou správnosti. Ukážeme, že číslo $x = \frac{125}{62}$ je koreňom rovnice (2). Naozaj,

$$\sqrt[3]{2 \cdot \frac{125}{62} - 3} + \sqrt[3]{\frac{125}{62} - 2} = \sqrt[3]{\frac{64}{62}} + \sqrt[3]{\frac{1}{62}} = \frac{4}{\sqrt[3]{62}} + \frac{1}{\sqrt[3]{62}} = \frac{5}{\sqrt[3]{62}},$$
$$\sqrt[3]{\frac{125}{62}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{62}} = \frac{5}{\sqrt[3]{62}}.$$

Odpoveď: $x = \dfrac{125}{62}$.

Hoci umocnenie na tretiu je ekvivalentná úprava, daná rovnica má falošný koreň. Ako je to možné? Vysvetlenie nájdeme v učebnici [7].

Problematický krok môžeme zapísať takto:

$$\left.\begin{array}{r} u + v = w \\ \Updownarrow \\ u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = w^3 \end{array}\right\} \Rightarrow u^3 + v^3 + 3uvw = w^3.$$

Ako sme videli, túto implikáciu nemožno obrátiť.

Pretože

$$u^3 + v^3 + 3uvw - w^3 = \frac{1}{2}(u + v - w)\big((u - v)^2 + (v + w)^2 + (u + w)^2\big),$$

platí ekvivalencia:

$$u^3 + v^3 + 3uvw = w^3 \Leftrightarrow (u + v = w \quad \text{alebo} \quad u = v = -w). \tag{3}$$

V nasledujúcej úlohe si ukážeme, ako môžeme ekvivalenciou (3) nahradiť skúšku správnosti. Ak totiž platí $u^3 + v^3 + 3uvw = w^3$ a neplatí $u = v = -w$, potom musí platiť $u + v = w$.

Úloha 2. Riešte rovnicu

$$\sqrt[3]{x + 3} + \sqrt[3]{5 - x} = \sqrt[3]{4}. \tag{4}$$

Riešenie: Položme $u = \sqrt[3]{x + 3}$, $v = \sqrt[3]{5 - x}$, $w = \sqrt[3]{4}$. Rovnakým postupom ako pri riešení predchádzajúcich úloh sa dostaneme k rovnici $27x^2 - 54x + 421 = 0$, ktorá má korene $x_{1,2} = \frac{9 \pm 8\sqrt{21}}{9}$.

Rovnica $\sqrt[3]{x + 3} = \sqrt[3]{5 - x}$ má jediný reálny koreň $x = 1$, ten však nie je koreňom rovnice $\sqrt[3]{5 - x} = -\sqrt[3]{4}$. To znamená, že $u = v = -w$ neplatí pre žiadne reálne číslo x, teda ani pre čísla $x = \frac{9 \pm 8\sqrt{21}}{9}$. Teda všetky úpravy rovnice (3) boli ekvivalentné, čo v tomto prípade nahrádza skúšku správnosti.

Odpoveď: $x = \frac{9 \pm 8\sqrt{21}}{9}$.

Na ukážku si naznačíme skúšku správnosti pre koreň $x = \frac{9 + 8\sqrt{21}}{9}$. Najskôr vypočítame

$$x + 3 = \frac{9 + 8\sqrt{21}}{9} + 3 = \cdots = \frac{4}{9} \cdot (9 + 2\sqrt{21}\,),$$
$$5 - x = 5 - \frac{9 + 8\sqrt{21}}{9} = \cdots = \frac{4}{9} \cdot (9 - 2\sqrt{21}\,).$$

Pretože

$$(3 \pm \sqrt{21}\,)^3 = \cdots = 24\,(9 \pm 2\sqrt{21}\,),$$

máme

$$x + 3 = \frac{(3 + 2\sqrt{21}\,)^3}{2 \cdot 3^3}, \qquad 5 - x = \frac{(3 - 2\sqrt{21}\,)^3}{2 \cdot 3^3}.$$

Odtiaľ už ľahko vidno, že číslo $x = \frac{9+8\sqrt{21}}{9}$ je koreňom rovnice (4).

V knihe [4] je odsek 2.1.3 venovaný rovniciam tvaru

$$\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = \varphi(x).$$

Na ukážku si uvedieme nasledujúcu úlohu z knihy [4].

Úloha 3. Riešte rovnicu

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x^3 - x} - \sqrt[3]{x^3 - x + 1}. \tag{5}$$

Riešenie: Použijeme vzorec $(a-b)^3 = a^3 - b^3 + 3ab(b-a)$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x+1}(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\,) = {}&\\ = \sqrt[3]{x^3-x} \cdot \sqrt[3]{x^3-x+1}\,(\sqrt[3]{x^3-x+1} - \sqrt[3]{x^3-x}\,).&\end{aligned}$$

Potom použijeme (5), čo dáva

$$\begin{gathered}\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x+1}(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\,) = \sqrt[3]{x^3-x} \cdot \sqrt[3]{x^3-x+1}\,(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\,),\\ \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x^3-x} \cdot \sqrt[3]{x^3-x+1},\\ \vdots\\ x^6 - 2x^4 + x^3 - 2x = 0,\\ x(x+1)(x^2-2)(x^2-x+1) = 0.\end{gathered}$$

Odpoveď: $x = -\sqrt{2}$, $x = -1$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$.

Skúškou správnosti ľahko overíme, že všetky štyri čísla sú koreňmi rovnice (5).

Poznamenajme, že kniha [4] neobsahuje možnosti využitia ekvivalencie (3) pre skúšku správnosti, ani samotnú ekvivalenciu (3).

Literatúra – References

[1] Holubář, J., Hradecký, F., Hruša, K., Kasková, E., Kolibiar, M., Krňan, F.: *Algebra pre 9.–11. postupný ročník všeobecnovzdelávacích škôl*, SPN, Bratislava, 1954.

[2] Kubáček, Z.: *Matematika pre 2. ročník gymnázií a 6. ročník gymnázií s osemročným štúdiom*, druhá časť, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2010.

[3] Odvárko, O.: *Matematika pro gymnázia. Funkce*, Prometheus, Praha, 1993.

[4] Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И.: *Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения.* «Факториал», Москва, 1997.

[5] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky*, Prometheus, Praha, 2008.

[6] Polák, J.: *Didaktika matematiky. Jak učit matematiku zajímavě a užitečně*, Fraus, Plzeň, 2014.
[7] Пратусевич, М. Я., Столбов, К. М., Головин, А. Н.: *Алгебра и начала математического анализа, 11 класс*, Учебник для общеобразовательных учреждений, Профильный уровень, «Просвещение», Москва, 2010.
[8] Sommer, J., Hübner, V.: *Maturitní otázky z mathematiky, pomocná kniha pro vyšší třídy škol středních*, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1905.

Adresa autora:

Ústav matematiky, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta,
Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Ústav informatiky SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Jednota slovenských matematikov a fyzikov pobočka Nitra,
(kontaktná adresa: Schurmannova 27, 949 01 Nitra)
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
kontakt: Prof. Martin Kalina, KMDG SvF STU, Radlinského 11,
810 05 Bratislava (e-mail: martin.kalina@stuba.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
1/2026 ročník 55

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Aba Teleki
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková
Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 550 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: marec 2026

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences"
OMFI 1/2026 Volume 55
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

OBSAH

CONTENTS