

OBZORY

1/2026 (55)

MATEMATIKY
FYZIKY a
INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2026 ročník 55

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 1/2026 Volume 55

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: Štefan Zná m, Beloslav Riečan et Daniel Kluvanec

Editors in Chief: Jozef D o b o š (Mathematics and Computer Sciences)

International Editorial Board:

Anatolij D v u r e č e n s k i j (Slovakia)	Štefan L u b y (Slovakia)
Gábor G a l a m b o s (Hungary)	László N á n a i †2024 (Hungary)
Juraj H r o m k o v i č (Switzerland)	Adam P l o c k i †2024 (Poland)
Hans J o r d e n s (Netherland)	Zdeněk P ů l p á n (Czech republic)
Martin K a l i n a (Slovakia)	Ladislav Emanuel R o t h (USA)

Executive Editors: Štefan T k a č i k (Mathematics and Computer Sciences)
A b a T e l e k i (Physics)

Editorial Board:

Mathematics and Computer Sciences:

Katarína Bachratá	Zbyněk Kubáček	Peter Maličký	Iveta Scholtzová
Vojtech Bálint	Jozef Kuzma	Mariana Marčoková	Milan Turčáni
Jozef Fulier	Ladislav Kvasz	Milan Matejdes	Peter Vrabel
Tomáš Lengyelfalusy	Martin Papčo		

Physics:

Jozef Beňuška	Stanislav Holec	Viera Lapitková	Vladimír Šebeň
Ivo Čáp	Anna Jankovychová	Milan Noga	Boris Tomášik
Ivan Červeň	Zuzana Ješková	Endre Szabó	Bohumil Vybíral

Reviewers:

Mathematics and Computer Sciences:

Ružena Blašková	Jaroslava Mikulecká	Štefan Solčan
Radoslav Harman	Martin Papčo	Marián Trenkler
Mária Kmeťová	Iveta Scholtzová	Dušan Vallo

Physics:

Peter Demkanin	Peter Hanisko	Marián Kíreš	Arnold Pompoš
Jozef Hanč	Ján Klíma	Miroslava Ožvoldová	

O istých iracionálnych rovniciach s tret'ou odmocninou

Jozef Doboš

Abstract [On certain Cube Root Radical Equations]: The aim of this article is to show an elegant solution to certain cube root radical equations. Surprisingly, this process of solving can produce extraneous roots.

Key words: radical equations, cube root, checking a solution

Súhrn: Cieľom článku je ukázať elegantné riešenie istých iracionálnych rovníc s tret'ou odmocninou. Prekvapujúce je, že pri tomto postupe môžu vzniknúť falošné korene.

Kľúčové slová: iracionálne rovnice, tretia odmocnina, skúška správnosti

MESC: H30

Úvod

Iracionálne rovnice štandardne riešime tak, že najskôr osamostatníme odmocninu a potom takto upravenú rovnicu umocníme. Tento postup v prípade potreby opakujeme. Nakoniec dostaneme algebraickú rovnicu, ktorú vyriešime. V niektorých prípadoch možno efektívne použiť iný postup, ako ukazuje nasledujúca úloha, ktorá je uvedená v knihe [7] aj s návodom na riešenie.

130. Riešte rovnicu $\sqrt[3]{x + \sqrt{2}} - \sqrt[3]{x - \sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Ako odpoveď autori uvádzajú: $x = \pm\sqrt{2}$. Ešte pred tým, ako prezradíme návod a uvedieme riešenie, skúsme urobiť skúšku správnosti. A hneď je tu prvá otázka: je v školskej matematike definovaná tretia odmocnina zo záporného čísla? Pohľad do učebníc a príručiek ukazuje, že v priebehu rokov sa situácia u nás menila.

V učebnici [1] sa píše: „Treba výslovne zdôrazniť, že pre záporné číslo n -tú odmocninu nedefinujeme.“

Učebnica [2] uvádza túto definíciu: „Ak n je nepárne, tak rovnica $x^n = a$ má pre každé číslo a jediné riešenie. Toto riešenie označujeme $\sqrt[n]{a}$.“ Podobne je to v učebnici [3].

Josef Polák v knihe [6] hovorí o „rozšírené definíci n -té odmocniny pro liché n “, pritom v knihe [5] upozorňuje na možné riziká takejto definície: „Pak však již neplatí

některé ze vzorců pro počítání s odmocninami, např. vzorec $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n^p]{a^p}$, jak ukazuje tento jednoduchý příklad: $\sqrt[3]{-8} = -2$, ale $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$.

My sa pre účely tohto článku budeme pridržovať vyššie uvedenej definície podľa učebnice [2]. To nám umožňuje prepísať rovnicu z úlohy 130 do vhodnejšieho tvaru

$$\sqrt[3]{\sqrt{2} + x} + \sqrt[3]{\sqrt{2} - x} = \sqrt{2}. \quad (1)$$

Dostali sme rovnicu s koreňmi $x = \pm\sqrt{2}$, pričom pri skúške správnosti už nemusíme riešiť otázku o tretej odmocnине zo záporného čísla. Teraz prezradíme návod na riešenie podľa knihy [8]: „(Pokyn: Zmocniťi třeimi, vytknouti společný činitel, v závorce se objeví levá strana rovnice.)“ Pomocou tohto návodu dostaneme nasledujúce elegantné riešenie rovnice (1).

Položme $u = \sqrt[3]{\sqrt{2} + x}$, $v = \sqrt[3]{\sqrt{2} - x}$. Potom

$$\begin{aligned} u + v &= \sqrt{2}, & (\text{pôvodná rovnica}) \\ u^3 + v^3 &= 2\sqrt{2}. & (\text{vyplýva z definície } u \text{ a } v) \end{aligned}$$

Odtiaľ dostávame $(u + v)^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} = u^3 + v^3$, teda $(u + v)^3 = u^3 + v^3$. Ďalej postupujeme podľa vyššie uvedeného návodu:

$$\begin{aligned} (u + v)^3 &= u^3 + v^3, \\ u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 &= u^3 + v^3, \\ u^3 + v^3 + 3uv \underbrace{(u + v)}_{=\sqrt{2}} &= u^3 + v^3, \\ 3\sqrt{2} \cdot uv &= 0. \end{aligned}$$

To znamená, že $u = 0$ alebo $v = 0$, čiže $\sqrt[3]{\sqrt{2} + x} = 0$ alebo $\sqrt[3]{\sqrt{2} - x} = 0$.

Odpoveď: $x = \pm\sqrt{2}$.

Musíme robiť skúšku správnosti?

Pri rovnici (1) to bolo jednoduché, tam sme sa nad touto otázkou ani nezamysleli. Pretože umocnenie na tretiu je ekvivalentná úprava, zdalo by sa, že skúšku správnosti robiť nemusíme. Prekvapenie nás čaká pri nasledujúcej úlohe.

Úloha 1. Riešte rovnicu

$$\sqrt[3]{2x - 3} + \sqrt[3]{x - 2} = \sqrt[3]{x}. \quad (2)$$

Riešenie: Položme $u = \sqrt[3]{2x-3}$, $v = \sqrt[3]{x-2}$. Potom

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= 3x - 5, & (\text{vyplýva z definície } u \text{ a } v) \\ u + v &= \sqrt[3]{x}. & (\text{pôvodná rovnica}) \end{aligned}$$

Ďalej postupujeme podľa vyššie uvedeného návodu z knihy [8].

$$\begin{aligned} (u + v)^3 &= (\sqrt[3]{x})^3, \\ u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 &= x, \\ \underbrace{u^3 + v^3}_{3x - 5} + 3uv \underbrace{(u + v)}_{\sqrt[3]{x}} &= x, \\ 3x - 5 + 3\sqrt[3]{x} \cdot uv &= x, \\ 3\sqrt[3]{x} \cdot uv &= 5 - 2x, \\ 27x(uv)^3 &= (5 - 2x)^3, \\ 27x(2x - 3)(x - 2) &= (5 - 2x)^3, \\ &\vdots \\ 62x^3 - 249x^2 + 312x - 125 &= 0, \\ (x - 1)^2(62x - 125) &= 0. \end{aligned}$$

Číslo $x = 1$ však nie je koreňom rovnice (2), ako sa môžeme ľahko presvedčiť skúškou správnosti. Ukážeme, že číslo $x = \frac{125}{62}$ je koreňom rovnice (2). Naozaj,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2 \cdot \frac{125}{62} - 3} + \sqrt[3]{\frac{125}{62} - 2} &= \sqrt[3]{\frac{64}{62}} + \sqrt[3]{\frac{1}{62}} = \frac{4}{\sqrt[3]{62}} + \frac{1}{\sqrt[3]{62}} = \frac{5}{\sqrt[3]{62}}, \\ \sqrt[3]{\frac{125}{62}} &= \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{62}} = \frac{5}{\sqrt[3]{62}}. \end{aligned}$$

Odpoveď: $x = \frac{125}{62}$.

Hoci umocnenie na tretiu je ekvivalentná úprava, daná rovnica má falošný koreň. Ako je to možné? Vysvetlenie nájdeme v učebnici [7].

Problematický krok môžeme zapísať takto:

$$\left. \begin{array}{l} u + v = w \\ \Updownarrow \\ u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = w^3 \end{array} \right\} \Rightarrow u^3 + v^3 + 3uvw = w^3.$$

Ako sme videli, túto implikáciu nemožno obrátiť.

Pretože

$$u^3 + v^3 + 3uvw - w^3 = \frac{1}{2}(u + v - w)((u - v)^2 + (v + w)^2 + (u + w)^2),$$

platí ekvivalencia:

$$u^3 + v^3 + 3uvw = w^3 \Leftrightarrow (u + v = w \quad \text{alebo} \quad u = v = -w). \quad (3)$$

V nasledujúcej úlohe si ukážeme, ako môžeme ekvivalenciou (3) nahradiť skúšku správnosti. Ak totiž platí $u^3 + v^3 + 3uvw = w^3$ a neplatí $u = v = -w$, potom musí platiť $u + v = w$.

Úloha 2. Riešte rovnicu

$$\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{5-x} = \sqrt[3]{4}. \quad (4)$$

Riešenie: Položme $u = \sqrt[3]{x+3}$, $v = \sqrt[3]{5-x}$, $w = \sqrt[3]{4}$. Rovnakým postupom ako pri riešení predchádzajúcich úloh sa dostaneme k rovnici $27x^2 - 54x + 421 = 0$, ktorá má korene $x_{1,2} = \frac{9 \pm 8\sqrt{21}}{9}$.

Rovnica $\sqrt[3]{x+3} = \sqrt[3]{5-x}$ má jediný reálny koreň $x = 1$, ten však nie je koreňom rovnice $\sqrt[3]{5-x} = -\sqrt[3]{4}$. To znamená, že $u = v = -w$ neplatí pre žiadne reálne číslo x , teda ani pre čísla $x = \frac{9 \pm 8\sqrt{21}}{9}$. Teda všetky úpravy rovnice (3) boli ekvivalentné, čo v tomto prípade nahrádza skúšku správnosti.

Odpoveď: $x = \frac{9 \pm 8\sqrt{21}}{9}$.

Na ukážku si naznačíme skúšku správnosti pre koreň $x = \frac{9+8\sqrt{21}}{9}$. Najskôr vypočítame

$$x + 3 = \frac{9 + 8\sqrt{21}}{9} + 3 = \dots = \frac{4}{9} \cdot (9 + 2\sqrt{21}),$$

$$5 - x = 5 - \frac{9 + 8\sqrt{21}}{9} = \dots = \frac{4}{9} \cdot (9 - 2\sqrt{21}).$$

Pretože

$$(3 \pm \sqrt{21})^3 = \dots = 24(9 \pm 2\sqrt{21}),$$

máme

$$x + 3 = \frac{(3 + 2\sqrt{21})^3}{2 \cdot 3^3}, \quad 5 - x = \frac{(3 - 2\sqrt{21})^3}{2 \cdot 3^3}.$$

Odtiaľ už ľahko vidno, že číslo $x = \frac{9+8\sqrt{21}}{9}$ je koreňom rovnice (4).

V knihe [4] je odsek 2.1.3 venovaný rovniciam tvaru

$$\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = \varphi(x).$$

Na ukážku si uvedieme nasledujúcu úlohu z knihy [4].

Úloha 3. Riešte rovnicu

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x^3-x} - \sqrt[3]{x^3-x+1}. \quad (5)$$

Riešenie: Použijeme vzorec $(a-b)^3 = a^3 - b^3 + 3ab(b-a)$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x+1} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) &= \\ &= \sqrt[3]{x^3-x} \cdot \sqrt[3]{x^3-x+1} (\sqrt[3]{x^3-x+1} - \sqrt[3]{x^3-x}). \end{aligned}$$

Potom použijeme (5), čo dáva

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x+1} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) &= \sqrt[3]{x^3-x} \cdot \sqrt[3]{x^3-x+1} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}), \\ \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x+1} &= \sqrt[3]{x^3-x} \cdot \sqrt[3]{x^3-x+1}, \\ &\vdots \\ x^6 - 2x^4 + x^3 - 2x &= 0, \\ x(x+1)(x^2-2)(x^2-x+1) &= 0. \end{aligned}$$

Odpoveď: $x = -\sqrt{2}$, $x = -1$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$.

Skúškou správnosti ľahko overíme, že všetky štyri čísla sú koreňmi rovnice (5).

Poznamenajme, že kniha [4] neobsahuje možnosti využitia ekvivalencie (3) pre skúšku správnosti, ani samotnú ekvivalenciu (3).

Literatúra – References

- [1] Holubář, J., Hradecký, F., Hruša, K., Kasková, E., Kolibiar, M., Krňan, F.: *Algebra pre 9.–11. postupný ročník všeobecnovzdelávacích škôl*, SPN, Bratislava, 1954.
- [2] Kubáček, Z.: *Matematika pre 2. ročník gymnázií a 6. ročník gymnázií s osemročným štúdiom*, druhá časť, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2010.
- [3] Odvárko, O.: *Matematika pro gymnázia. Funkce*, Prometheus, Praha, 1993.
- [4] Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И.: *Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения*. «Факториал», Москва, 1997.
- [5] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky*, Prometheus, Praha, 2008.

- [6] Polák, J.: *Didaktika matematiky. Jak učit matematiku zajímavě a užitečně*, Fraus, Plzeň, 2014.
- [7] Пратусевич, М. Я., Столбов, К. М., Головин, А. Н.: *Алгебра и начала математического анализа, 11 класс*, Учебник для общеобразовательных учреждений, Профильный уровень, «Просвещение», Москва, 2010.
- [8] Sommer, J., Hübner, V.: *Maturitní otázky z matematiky, pomocná kniha pro vyšší třídy škol středních*, nákladem Jednoty českých matematiků, Praha, 1905.

Adresa autora:

Ústav matematiky, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta,
Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: jozef .dobos@upjs . sk

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Ústav informatiky SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť

Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť

Jednota slovenských matematikov a fyzikov pobočka Nitra,
(kontaktná adresa: Schurmannova 27, 949 01 Nitra)
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje

JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
kontakt: Prof. Martin Kalina, KMDG SvF STU, Radlinského 11,
810 05 Bratislava (e-mail: martin.kalina@stuba.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY **1/2026 ročník 55**

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Aba Teleki

Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki

Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková

Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík

Zástupca vydavateľa: Martin Kalina

Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou

Náklad: 550 kusov

Periodicita vydávania: štvrťročník

IČO vydavateľa: 00 178 705

Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava

Dátum vydania periodickej tlače: marec 2026

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené

Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava

č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

OBSAH

Jozef D o b o š : O istých iracionálnych rovniciach s treťou odmocninou.	1
Mária S l a v í č k o v á : Dva pohľady na argumentáciu	7
Július R e b o : O kvadratických kvaterniónoch	17
Jozef B e ň u š k a : Vodič s prúdom a magnet	28
Jozef B e ň u š k a : Bádateľské experimenty s magnetmi	42
INFORMÁCIE	
55. konferencia slovenských matematikov Konferencia Jasná	
(Božena Doročiaková, Zuzana Sedliačková).....	52
SPOMÍNANIE	
Po profesorovi Jendroľovi nezostalo ticho (Mírko Horňák, Tomáš Madaras).....	58
Stanislav Jendroľ: Školská matematika a jej kultúrne hodnoty	
(Štefan Tkačík).....	65
Zomrel Dr.h.c. prof. RNDr. Ing. Lubomír Kubáček, DrSc. (Anatolij Dvurečenskij).....	68

CONTENTS

Jozef D o b o š : On certain Cube Root Radical Equations	1
Mária S l a v í č k o v á : Two Conceptualizations of Argumentation	7
Július R e b o : On Quadratic Quaternions	17
Jozef B e ň u š k a : Current-Carrying Conductor and Magnetic Field	28
Jozef B e ň u š k a : Inquiry-Based Experiments with Magnets	42
INFORMATION	
55th Conference of Slovak Mathematicians – Jasná Conference	
(Božena Doročiaková, Zuzana Sedliačková).....	52
IN MEMORIAN	
After Professor Jendroľ, Silence Did Not Remain (Mírko Horňák, Tomáš Madaras).....	58
Stanislav Jendroľ: School Mathematics and Its Cultural Significance.....	
(Štefan Tkačík).....	65
Professor Lubomír Kubáček, DrSc., Has Passed Away (Anatolij Dvurečenskij).....	68