

OBSOBY

2/2025 (54)

MATEMATIKY
FYZIKY a
INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2025 ročník 54

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 2/2025 Volume 54

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: Štefan Znám, Beloslav Riečan et Daniel Kluvanec

Editors in Chief: Jozef D o b o š (Mathematics and Computer Sciences)

International Editorial Board:

Anatolij D v u r e č e n s k i j (Slovakia)	Štefan L u b y (Slovakia)
Gábor G a l a m b o s (Hungary)	László N á n a i †2024 (Hungary)
Juraj H r o m k o v i č (Switzerland)	Adam P l o c k i †2024 (Poland)
Hans J o r d e n s (Netherland)	Zdeněk P ů l p á n (Czech republic)
Martin K a l i n a (Slovakia)	Ladislav Emanuel R o t h (USA)

Executive Editors: Štefan T k a č i k (Mathematics and Computer Sciences)
Aba T e l e k i (Physics)

Editorial Board:

Mathematics and Computer Sciences:

Katarína Bachratá	Zbyněk Kubáček	Peter Maličký	Iveta Scholtzová
Vojtech Bálint	Jozef Kuzma	Mariana Marčoková	Milan Turčáni
Jozef Fulier	Ladislav Kvasz	Milan Matejdes	Peter Vrabel
Tomáš Lengyelfalusy	Martin Papčo		

Physics:

Jozef Beňuška	Stanislav Holec	Viera Lapitková	Vladimír Šebeň
Ivo Čáp	Anna Jankovychová	Milan Noga	Boris Tomášik
Ivan Červeň	Zuzana Ješková	Endre Szabó	Bohumil Vybíral

Reviewers:

Mathematics and Computer Sciences:

Ružena Blašková	Jaroslava Mikulecká	Štefan Solčan
Radoslav Harman	Martin Papčo	Marián Trenkler
Mária Kmeťová	Iveta Scholtzová	Dušan Vallo

Physics:

Peter Demkanin	Peter Hanisko	Marián Kíreš	Arnold Pompoš
Jozef Hanč	Ján Klíma	Miroslava Ožvoldová	

O lineárnych nerovniciach

Jozef Doboš

Abstract [On linear inequalities]: This paper is devoted to checking solutions to linear inequalities.

Key words: checking a solution, linear inequalities

Súhrn: Práca je venovaná skúške správnosti pri riešení lineárnych nerovníc.

Kľúčové slová: skúška správnosti, lineárne nerovnice

MESC: H30, I20.

Úvod

Lineárne nerovnice majú spravidla nekonečne veľa riešení. Preto nie je možné urobiť skúšku správnosti dosadením každého z nich, ako sa to robí pri rovniciach. Z tohto dôvodu naše učebnice odporúčajú robiť „overenie správnosti riešenia“ (pozri napr. [8], [12]). V pracovnom zošite pre 9. ročník to autori nazvali „častočné overenie správnosti riešenia lineárnej nerovnice“ (pozri [1]). V zahraničných učebniciach sa to niekedy nazýva „informal check“ (pozri napr. [13]). Napriek tomu, v materiáloch uverejnených na internete to ich autori stále nazývajú „skúška správnosti“, ako napr.

- www.youtube.com/watch?v=wFMH0reRy1Y
- <https://prezi.com/p/zag2aif9ugyp/linearne-nerovnice/>
- <https://dm-projekt.webnode.sk/matematika-9-rocnik/nerovnice/>

Ukážeme si, že takéto „overenie správnosti riešenia“ môže zlyhať. Naozaj,

$$3x - 8 < 5 \quad / + 8$$

$$3x < 12 \quad / : 3$$

$$x < 4$$

$$\text{Overenie: } x = 3$$

$$L = 3 \cdot 3 - 8 = 1$$

$$P = 5$$

$$L < P$$

Nerovnica je vyriešená nesprávne, ale overenie vyšlo. Tak načo je takéto „overenie správnosti riešenia“ dobré? Môžeme ho dokonca nazývať „skúška správnosti“?

V súvislosti s tým vznikajú dve otázky: Či je možné urobiť korektným spôsobom skúšku správnosti, prípadne či sa dá „overenie správnosti riešenia“ doplniť na korektnú skúšku správnosti.

Odpoveď na prvú otázku nájdeme v knihe [9]. Potrebujeme k tomu parametrické vyjadrenie riešení lineárnej nerovnice. Ukážeme si to na vyššie uvedenom príklade nerovnice $3x - 8 < 5$, kde sme ukázali (chybne), že jej riešeniami sú práve tie reálne čísla, pre ktoré platí $x < 4$. Grafickým znázornením týchto riešení na číselnej osi je polpriamka, ktorej parametrické vyjadrenie je $x = 4 - p$, kde p je ľubovoľné kladné reálne číslo (parameter). Teraz môžeme pristúpiť ku skúške správnosti:

$$\begin{aligned} 3x - 8 &< 5 \\ 3(4 - p) - 8 &< 5 \\ 12 - 3p - 8 &< 5 \\ 4 - 3p &< 5 \end{aligned} \tag{1}$$

Teda nerovnosť (1) by mala platiť práve vtedy, keď $p > 0$. To však zrejme neplatí, stačí dosadiť do (1) napríklad $p = -\frac{1}{6}$. Skúška správnosti ukázala, že nie každé reálne číslo $x < 4$ je riešením danej nerovnice.

Teraz sa pozrime čo sa stane, keď nerovnicu $3x - 8 < 5$ vyriešime správne:

$$\begin{aligned} 3x - 8 &< 5 \\ 3x &< 13 \\ x &< \frac{13}{3} \end{aligned}$$

Riešeniami nerovnice $3x - 8 < 5$ sú práve tie reálne čísla, pre ktoré platí $x < \frac{13}{3}$. Urobme skúšku správnosti. Grafickým znázornením týchto riešení na číselnej osi je polpriamka, ktorej parametrické vyjadrenie je $x = \frac{13}{3} - p$, kde p je ľubovoľné kladné reálne číslo (parameter). Teraz môžeme pristúpiť ku skúške správnosti:

$$\begin{aligned} 3x - 8 &< 5 \\ 3\left(\frac{13}{3} - p\right) - 8 &< 5 \\ 13 - 3p - 8 &< 5 \\ 5 - 3p &< 5 \end{aligned}$$

pričom použijeme nasledujúcu vlastnosť reálnych čísel:

$$a < b \quad \text{práve vtedy, keď} \quad b - a > 0 \tag{2}$$

aby sme mohli pokračovať v skúške správnosti:

$$\begin{aligned} 5 - (5 - 3p) &> 0 \\ 3p &> 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Zrejme nerovnosť (3) je splnená práve vtedy, keď $p > 0$. A presne to sme mali ukázať.

Poznamenajme, že takáto skúška správnosti nie je vôbec jednoduchá a možno aj preto je v súčasnosti takmer zabudnutá.

V zahraničných učebniciach sa používa skúška správnosti založená na metóde testovacích bodov (pozri napr. [2], [3], [7], [10], [11]). Ukážeme si jej použitie na príklade nerovnice $3x - 8 < 5$. Ako sme videli vyššie, jej riešeniami sú práve tie reálne čísla, pre ktoré platí $x < \frac{13}{3}$.

Pritom nerovnosť $x < \frac{13}{3}$ má dve zložky. Prvou je číslo $\frac{13}{3}$, čo je vlastne koreň rovnice $3x - 8 = 5$. Druhou zložkou je znak nerovnosti $<$. Preto táto skúška správnosti má dve časti. V prvej z nich dosadíme číslo $\frac{13}{3}$ do rovnice $3x - 8 = 5$, aby sme zistili, či je jej koreňom. V druhej časti dosadíme jedno konkrétne číslo vyhovujúce nerovnosti $x < \frac{13}{3}$ do nerovnice $3x - 8 < 5$ (presne tak isto, ako v „overení správnosti riešenia“), aby sme zistili, či je jej riešením. V tomto zmysle je táto metóda doplnením „overenia správnosti riešenia“, čím dávame kladnú odpoveď na druhú otázku. Môžeme postupovať podobne ako v učebnici [2]:

Krok 1. Overte hraničný bod.

Dosadte $\frac{13}{3}$ namiesto x do rovnice $3x - 8 = 5$.

Hraničný bod by mal byť jej koreňom.

$$\begin{array}{r|l} 3x - 8 = 5 & \\ 3 \cdot \frac{13}{3} - 8 & 5 \\ 5 & 5 \checkmark \end{array}$$

Krok 2. Overte znak nerovnosti.

Dosadte číslo menšie ako $\frac{13}{3}$ namiesto x do pôvodnej

nerovnice. Číslo, ktoré ste vybrali, by malo byť

riešením tejto nerovnice.

$$\begin{array}{r|l} 3x - 8 < 5 & \\ 3 \cdot 3 - 8 & < 5 \\ 1 & < 5 \checkmark \end{array}$$

Ak je nerovnica vyriešená nesprávne, potom skúška správnosti založená na metóde testovacích bodov zlyhá aspoň v jednom kroku. Napríklad, v ukážke uvedenej na začiatku článku zlyhá v prvom kroku (overte to).

Túto metódu odporúčame používať namiesto „overenia správnosti riešenia“, pretože je jednoduchá, žiakmi zvládnuteľná, pričom je korektná.

Pozrime sa teraz bližšie na metódu testovacích bodov, čo je vlastne metóda riešenia (nielen lineárnych) nerovnic (pozri napr. [4], [6]). Najskôr uvidieme stručný popis tejto metódy:

Lineárnu nerovnicu s jednou neznámou najskôr zmeníme na lineárnu rovnicu (jednoducho zámenou znaku nerovnosti za znak rovnosti), ktorú vyriešime. Koreň tejto lineárnej rovnice nazývame „hraničný bod“. Na číselnej osi znázorňujeme hraničný bod plným krúžkom, ak je riešením danej lineárnej nerovnice, prázdny krúžkom, ak nie je jej riešením. Hraničný bod rozdeľuje číselnú os na dve oblasti. Jednu z týchto oblastí tvoria všetky reálne čísla menšie ako hraničný bod a druhú tvoria všetky reálne čísla väčšie ako hraničný bod.

Potom vyberieme číslo z jednej z týchto oblastí, ktoré nazývame „testovací bod“, a zistíme, či toto číslo je riešením danej lineárnej nerovnice. Ak je jej riešením, potom každé číslo z tejto oblasti je riešením danej lineárnej nerovnice a žiadne číslo z tej druhej oblasti nie je riešením danej lineárnej nerovnice. Ak testovací bod nie je riešením danej lineárnej nerovnice, potom je to naopak: žiadne číslo z tejto oblasti nie je riešením danej lineárnej nerovnice a každé číslo z tej druhej oblasti je riešením danej lineárnej nerovnice.

Teraz sa pozrieme na metódu testovacích bodov podrobnejšie. Nech a , b , c sú reálne čísla, pričom $a \neq 0$. Budeme uvažovať nasledujúce lineárne nerovnice a s nimi súvisiacu lineárnu rovnicu:

lineárna nerovnica	lineárna rovnica	lineárna nerovnica	
$ax + b < c$	$ax + b = c$	$ax + b > c$	(4)

Pre každé dve reálne čísla r , s platí práve jeden zo vzťahov

$$r < s, \quad r = s, \quad r > s. \quad (\text{trichotómia})$$

Preto každé reálne číslo x je riešením práve jednej z úloh (4).

Nech číslo x_1 je riešením lineárnej nerovnice $ax + b < c$, t. j. $ax_1 + b < c$.

Nech číslo x_2 je riešením lineárnej nerovnice $ax + b > c$, t. j. $ax_2 + b > c$.

Ukážeme, že platí:

$$\text{Koreň lineárnej rovnice } ax + b = c \text{ leží medzi číslami } x_1 \text{ a } x_2. \quad (5)$$

K tomu stačí ukázať, že pre koreň $x = \frac{c-b}{a}$ lineárnej rovnice $ax + b = c$ platí

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad \text{kde} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0. \quad (6)$$

Naozaj, v prípade $x_1 < x_2$ máme

$$x_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1 < \underbrace{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}_{=x} < \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2 = x_2, \quad \text{čo dáva} \quad x_1 < x < x_2.$$

Podobne, v prípade $x_2 < x_1$ máme

$$x_2 = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2 < \underbrace{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}_{=x} < \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1 = x_1, \quad \text{čo dáva} \quad x_2 < x < x_1.$$

Zostáva nám už iba overiť, že pre koreň lineárnej rovnice $ax + b = c$ platí (6).

Čísla α_1, α_2 nájdeme riešením sústavy rovníc:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 &= \frac{c - b}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

kde číslo $x = \frac{c - b}{a}$ je koreňom lineárnej rovnice $ax + b = c$. Riešením sústavy (7) dostávame:

$$\alpha_1 = \frac{c - (ax_1 + b)}{a(x_2 - x_1)}, \quad \alpha_2 = \frac{(ax_2 + b) - c}{a(x_2 - x_1)}.$$

Zostáva nám overiť, že platí $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$.

Pretože $ax_1 + b < c < ax_2 + b$, máme

$$a(x_2 - x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) > 0.$$

Tým sme ukázali, že $a(x_2 - x_1) > 0$.

Pretože $ax_1 + b < c$, máme $c - (ax_1 + b) > 0$. Teda

$$\alpha_1 = \frac{c - (ax_1 + b)}{a(x_2 - x_1)} > 0.$$

Pretože $ax_2 + b > c$, máme $(ax_2 + b) - c > 0$. Teda

$$\alpha_2 = \frac{(ax_2 + b) - c}{a(x_2 - x_1)} > 0.$$

Tým je vlastnosť (6) dokázaná.

Pri metóde testovacích bodov sa nestretneme s násobením/delením nerovnice. Nemusíme dávať pozor, či treba znak nerovnosti otočiť alebo nie. Nemusíme robiť žiadne úpravy nerovnice.

Pritom metóda testovacích bodov sa používa aj pri riešení nelineárnych nerovnic (pozri napr. [5]).

Literatúra – References

- [1] Bélik, M. a kol.: Hravá matematika. Pracovný zošit pre 9. ročník ZŠ a kvartu GOŠ, TAKTIK, Košice, 2013.
- [2] Burger, E. B., et al.: Integrated Math 1, Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, 2013.
- [3] Carter, J. A. et al.: Integrated Math 1, McGraw-Hill Companies, Inc., 2012.
- [4] Dietiker, L. et al.: Core Connections Algebra Parent Guide with Extra Practice, CPM Educational Program, 2016.
- [5] Doboš, J.: Príbeh o skúške správnosti, Obzory matematiky, fyziky a informatiky, 4/2013 (42), 9–14.
- [6] Glencoe McGraw-Hill Staff: Impact Mathematics, Algebra and More, Course 3, Glencoe/McGraw-Hill, 2005.
- [7] Charles, R. I., et al.: Algebra 1 Common Core, Pearson Education, Inc, 2015.
- [8] Kolbaská, V.: Matematika pre 9. ročník základnej školy a 4. ročník gymnázia s osemročným štúdiom, 1. časť, SPN, Bratislava, 2012.
- [9] Križalkovič, K., Cuninka, A., Šedivý, O.: Riešené úlohy na nerovnice, Alfa, Bratislava, 1972.
- [10] Lial, M. L., Hornsby, J., McGinnis, T.: Algebra for College Students, 9th edition, Pearson Education, Inc., 2020.
- [11] McAskill, B., Watt, W., Zarski, Ch., Balzarini, E.: MathLinks 9, McGraw–Hill Ryerson, 2011.
- [12] Šedivý, O., Čeretková, S., Malperová, M., Bálint, L.: Matematika pre 8. ročník základných škôl, 2. časť, SPN, Bratislava, 2001.
- [13] Tussy, A. S., Gustafson, R. D.: Elementary and Intermediate Algebra, Fifth Edition, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2013.

Adresa autora:

Ústav matematiky, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta,
Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: jozef.dobos@upjs.sk

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Ústav informatiky SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť

Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť

Jednota slovenských matematikov a fyzikov pobočka Nitra,
(kontaktná adresa: Schurmannova 27, 949 01 Nitra)
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje

JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
kontakt: Prof. Martin Kalina, KMDG SvF STU, Radlinského 11,
810 05 Bratislava (e-mail: martin.kalina@stuba.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
2/2025 ročník 54

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Aba Teleki

Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki

Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková

Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík

Zástupca vydavateľa: Martin Kalina

Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou

Náklad: 550 kusov

Periodicita vydávania: štvrťročník

IČO vydavateľa: 00 178 705

Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava

Dátum vydania periodickej tlače: jún 2025

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené

Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava

č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal “Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences”
 OMFI 2/2025 Volume 54
 is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
[\(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/\)](http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

OBSAH

Zdeněk P ů l p á n : Dávají nám dotazníky dostatek informací?	1
Jozef D o b o š : O lineárných nerovniciach.....	16
Zadania úloh domáceho kola 75. ročníka Matematickej olympiády kategórií A, B, C	22
Katalin S ó s , Tamás B a r t y i k , László N á n a i : Fyzikálne procesy v prírode – Voda 4. Fyzika riek	26
Jozef B e ň u š k a : Bublíny.....	36
Fyzika zamrzania mydlových bublín je zaujímavejšia, než by ste si mysleli Príspevok redakcie (AT)	65
INFORMÁCIE	
18 Druhý ročník stretnutia	
Užitočná výmena skúseností učiteľov vysokých škôl, alebo (UVS)^2 (Mária Slavičková).....	68
JUBILEUM:	
Prof. RNDr. Milan Medveď, DrSc. osemdesiatnik (Michal Fečkan, Michal Pospíšil, Zbyněk Kubáček).....	70

CONTENTS

Zdeněk P ů l p á n : Do Questionnaires Give Us Enough Information?	1
Jozef D o b o š : On Linear Inequalities.....	16
Problem Sets for the Home Round of the 75 th Mathematical Olympiad, Categories A, B, C	22
Katalin S ó s , Tamás B a r t y i k , László N á n a i : Physical Processes in Nature – The Water 4. Physics of Rivers	26
Jozef B e ň u š k a : Bubbles.....	36
The Physics of Freezing Soap Bubbles Is More Fascinating Than You Might Think Editorial article by (AT)	65
INFORMATION	
Second Annual Meeting: A Useful Exchange of University Teachers' Experience, or (UVS)^2 (Mária Slavičková)	68
ANNIVERSARIES:	
Prof. RNDr. Milan Medveď, DrSc. Octogenarian (Michal Fečkan, Michal Pospíšil, Zbyněk Kubáček).....	70