OBZORY

3/2023 (52)

MATEMATIKY
FYZIKY a
INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2023 ročník 52

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 3/2023 Volume 52

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: Štefan Znám, Beloslav Riečan et Daniel Kluvanec

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2023(52)

O funkciách definovaných po častiach

Jozef Doboš

Abstract [On piecewise defined functions]: This article is devoted to piecewise defined functions. Students may encounter some such functions in school mathematics, or when preparing for study abroad.

Key words: piecewise defined functions, absolute value function, floor function, signum function, Dirichlet function

Súhrn: Tento článok je venovaný funkciám, ktoré sú definované po častiach. S niektorými takýmito funkciami sa môžu žiaci stretnúť v školskej matematike, prípadne pri príprave na štúdium v zahraničí.

Kľúčové slová: funkcie definované po častiach, absolútna hodnota, celá časť reálneho čísla, funkcia signum, Dirichletova funkcia

MESC: 97I20, 97I70.

Úvod

Sadzba vnútroštátneho poštovného závisí od hmotnosti listu. Od 1. 3. 2022 bola domáca poštová sadzba pre listy druhej triedy stanovená (v závislosti od hmotnosti v gramoch) takto:

Do hmotnosti	50 g	100 g	500 g	1000 g	2000 g
Predajná cena v €	0,75	1,00	1,30	2,00	2,90

Tieto sadzby môžeme spojiť do jednej funkcie nasledujúcim spôsobom:

$$P(x)=\begin{cases}0.75 & \text{ak } 0<x\le 50\\ 1.00 & \text{ak } 50<x\le 100\\ 1.30 & \text{ak } 100<x\le 500\\ 2.00 & \text{ak } 500<x\le 1000\\ 2.90 & \text{ak } 1000<x\le 2000\end{cases}$$

V programe Geogebra to urobíme takto:

```
P(x)=If(0<x<=50,0.75,50<x<=100,1,100<x<=500,1.3,500<x<=1000,2,
1000<x<=2000,2.9)
```

a v programe Wolfram Alpha takto:

```
P(x)=piecewise[{{0.75,0<x<=50},{1,50<x<=100},{1.3,100<x<=500},
{2,500<x<=1000},{2.9,1000<x<=2000}}]
```

Takéto funkcie sa nazývajú *funkcie definované po častiach*. Definičný obor takejto funkcie je rozdelený na dve alebo viac častí, pričom na rôznych častiach je funkcia definovaná pomocou rôznych pravidiel. S funkciami definovanými po častiach sa môžu stretnúť žiaci, ktorí sa pripravujú na štúdium v zahraničí, napr. v SAT testoch[1] (pozri napr. [5]). V tomto článku sa pozrieme na funkcie definované po častiach, s ktorými sa môžeme stretnúť v školskej matematike.

Funkcia absolútnej hodnoty

Väčšina učebníc uvádza ako príklad funkcie definovanej po častiach funkciu absolútnej hodnoty. Napríklad v učebnici [13] sa píše, že funkcia absolútnej hodnoty definovaná predpisom $f(x) = |x|$ môže byť zapísaná ako funkcia definovaná po častiach. Keď $x \geq 0$, potom $|x| = x$. Keď $x < 0$, potom $|x| = -x$.[2] S odvolaním sa na to, že reálne číslo je buď kladné, buď záporné, alebo nula, sa v učebnici [1] definuje absolútna hodnota takto:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{ak } x < 0, \\ 0, & \text{ak } x = 0, \\ x, & \text{ak } x > 0. \end{cases}$$

Tiež sa tam uvádza, že prípad $x = 0$ môžeme pripojiť nielen k prípadu $x > 0$, ale aj k prípadu $x < 0$, t. j.

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{if } x \leq 0, \\ x, & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

Poznamenajme, že definíciu absolútnej hodnoty môžeme (aj keď to nie je bežné) dokonca zapísať v tvare

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{if } x \leq 0, \\ x, & \text{if } x \geq 0. \end{cases}$$

Aj keď číslo $x = 0$ patrí do obidvoch častí definičného oboru, v obidvoch prípadoch dostávame rovnakú hodnotu $|0| = 0$. Preto je táto definícia korektná. Teda nie je pravda, že v prípade funkcie definovanej po častiach sa jednotlivé časti definičného oboru nesmú prekrývať, ako sa to tvrdí v [10]. Možno to iba odporúčať.

---

[1] SAT (Scholastic Aptitute Test) je štandardizovaný test vytvorený organizáciou College Board využívaný na overenie študijných predpokladov pri prijímaní uchádzačov na vysoké školy v USA.

[2] Pritom je vhodné žiakom pripomenúť, že $-x = (-1) \cdot x$. Teda napr. $|-3| = (-1) \cdot (-3) = 3$.

Pri pohľade do viacerých učebníc odhalíme jemné rozdiely týkajúce sa funkcií definovaných po častiach. Napríklad v učebnici [3] sa píše, že po častiach definované funkcie sú najlepšie opísané alebo najprirodzenejšie opísané rôznymi vzorcami pre rôzne intervaly nezávislej premennej. Pritom táto učebnica pracuje s funkciou absolútnej hodnoty, ale nezaraďuje ju medzi funkcie definované po častiach.

Na druhej strane, v učebnici [24] na strane 57 sa píše, že funkcie definované po častiach nemožno vyjadriť jednou algebraickou rovnicou.[3] Avšak na strane 114 je ako príklad funkcie definovanej po častiach uvedená funkcia absolútnej hodnoty. Stačí si však uvedomiť, že pre každé reálne číslo x platí $|x| = \sqrt{x^2}$. Preto $f(x) = \sqrt{x^2}$ je vyjadrenie funkcie absolútnej hodnoty jednou rovnicou.

Ako vidíme na úvodnom príklade so sadzbou poštovného, niektoré funkcie môžu byť definované len po častiach. Avšak pri zložitejších funkciách môže byť náročné zistiť, či ich možno vyjadriť jedným predpisom. Nasledujúcu ukážku sme prevzali z článku [12]. Funkciu

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < -\pi, \\ \cos x, & x \in (-\pi, 0), \\ e^x, & x \geq 0, \end{cases}$$

možno vyjadriť jedným predpisom takto

$$f(x) = e^{(|x|+x)/2} - 1 + \\ + \frac{1}{4(x+\pi)}\big(2(|x+\pi| + x + \pi)\cos\frac{|x+\pi| - |x| - \pi}{2} + (|x+\pi| - x)^2 - \pi^2\big).$$

Článok [12] vznikol ako reakcia na to, že v knihe [4] je funkcia absolútnej hodnoty nesprávne zaradená medzi neelementárne funkcie. Môžeme to vidieť aj v knihe [19] a v učebnici [13]. Pretože $|x| = \sqrt{x^2}$, funkcia absolútnej hodnoty je zrejme elementárnou funkciou. Problematike elementárnych funkcií sa venuje nedávno uverejnený článok [15].

Funkcia celá časť

Ďalšou funkciou definovanou po častiach, ktorá sa často vyskytuje v učebniciach, je funkcia *celá časť*. Zaviedol je C. F. Gauss v roku 1808 (pozri [8]) spolu s označením $[x]$, ktoré niektorí autori používajú dodnes (pozri napr. [17]). Postupne sa však čoraz viac uprednostňuje názov *dolná celá časť* s označením $\lfloor x \rfloor$, často spoločne

[3] The rules for such functions cannot be expressed as a single algebraic equation.

s funkciou *horná celá časť* s označením $\lceil x \rceil$ (pozri [19]), ktoré zaviedol v roku 1962 K. Iverson (pozri [9]). V zahraničných učebniciach (pozri napr. [13]) sa obvykle celá časť reálneho čísla x označuje $[\![x]\!]$. Niektorí autori označujú celú časť $\mathrm{int}(x)$ (pozri napr. [25]), prípadne $\mathrm{Int}(x)$ (pozri napr. [22]). Dokonca v niektorých učebniciach sa dolná celá časť označuje $[x]$ a horná celá časť $\lceil x \rceil$ (pozri napr. [14] alebo [21]). Pripomeňme si definície:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}, \quad \lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}.$$

Na precvičovanie tohto pojmu sú vhodné rovnice s celou časťou – napr. v knihe [2] je takýmto rovniciam venovaná jedna kapitola. Pomocou dolnej celej časti môžeme definovať priame periodické rozšírenie funkcie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ predpisom[4]

$$\tilde{f}(x) = f\big(x - \big\lfloor \tfrac{x-a}{b-a} \big\rfloor \cdot (b - a)\big)$$

a pomocou hornej celej časti môžeme definovať priame periodické rozšírenie funkcie $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ predpisom

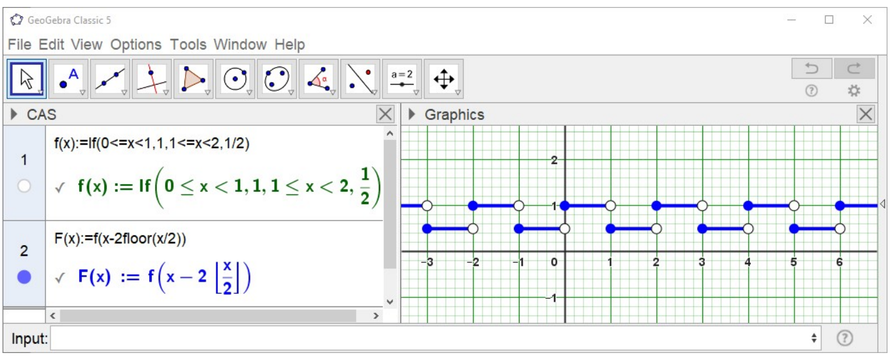
$$\tilde{f}(x) = f\big(x - \big\lceil \tfrac{x-b}{b-a} \big\rceil \cdot (b - a)\big).$$

Napríklad funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pre ktorú platí

$$f(x + 1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

musí byť periodická. Konkrétny príklad takejto funkcie (pozri obr. 1) môžeme zostrojiť ako priame periodické predĺženie funkcie definovanej po častiach predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{ak } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$



Obrázok 1. Priame periodické predĺženie

[4] Intervaly označujeme podľa normy STN EN ISO 80000-2. Teda napr. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.

Funkcia signum

Ako sme uviedli vyššie, reálne číslo je buď kladné, buď záporné, alebo nula. To nás privádza k ďalšej neelementárnej funkcii. *Funkcia signum* je definovaná predpisom (pozri napr. [18] alebo [19])

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{pre } x > 0, \\ 0, & \text{pre } x = 0, \\ -1, & \text{pre } x < 0. \end{cases}$$

Funkciu signum zaviedol L. Kronecker v roku 1878 (pozri [11]). Všimnime si, že platí $|x| = x \operatorname{sgn}(x)$. Odtiaľ pre $x \neq 0$ dostávame $\operatorname{sgn}(x) = |x|/x$. Tento vzťah môžeme prepísať do tvaru $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$.

Pomocou doteraz uvedených funkcií definovaných po častiach môžeme funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá je riešením funkcionálnej rovnice

$$f(f(x)) = -x, \quad x \in \mathbb{R},$$

zapísať napríklad takto

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) - (-1)^{\lceil |x| \rceil} \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Graf tejto funkcie si môžeme vykresliť v programe GeoGebra takto:
`f(x)=sgn(x)-(-1)^(ceil(abs(x)))x`

Dirichletova funkcia

V knihe [18] je ešte uvedená *Dirichletova funkcia*, ktorá je definovaná predpisom

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \text{ racionálne}, \\ 0 & \text{pre } x \text{ iracionálne}. \end{cases}$$

Zaviedol ju L. Dirichlet v roku 1829 (pozri [6]). Ide o funkciu, ktorá je nespojitá v každom bode. Na rozdiel od predchádzajúcich funkcií definovaných po častiach, Dirichletovu funkciu nepozná ani GeoGebra ani Wolfram Alpha. Pritom ide o pomerne jednoduchý príklad funkcie, ktorá nie je Riemannovsky integrovateľná. Wolfram Alpha však pozná istú modifikáciu Dirichletovej funkcie, ktorú zaviedol J. Thomae v roku 1875 (pozri [26]) a ktorá sa v našej a ruskej literatúre zvykne nazývať *Riemannova funkcia*. Pôvod tohto názvu sa nám však nepodarilo zistiť. Wolfram Alpha túto funkciu pozná ako *Thomae function*. Môžete si to vyskúšať, napr. takto:

```
ThomaeFunction[x] where x=sqrt(2)
ThomaeFunction[x] where x=10/6
ThomaeFunction[x] where x=-5/3
```

Dirichletovu funkciu môžeme potom vyjadriť pomocou Riemannovej funkcie:

```
sgn[ThomaeFunction[x]] where x=sqrt(2)
sgn[ThomaeFunction[x]] where x=10/6
sgn[ThomaeFunction[x]] where x=-5/3
```

Riemannova funkcia je definovaná predpisom (pozri napr. [23])

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{ak } x = \dfrac{p}{q}, \text{ kde zlomok } \dfrac{p}{q} \text{ je v základnom tvare,} \\ 0, & \text{ak } x \text{ je iracionálne.} \end{cases}$$

Napríklad $R(\sqrt{2}) = 0$, $R(10/6) = 1/3$, $R(-5/3) = 1/3$. Môžete si to porovnať s výpočtami v programe Wolfram Alpha, ako je uvedené vyššie.

Riemannova funkcia je nespojitá v racionálnych číslach a spojitá v iracionálnych číslach. Vyjadrenie $\chi(x) = \mathrm{sgn}(R(x))$ sa v učebniciach uvádza na ilustráciu toho, že kompozícia dvoch Riemannovsky integrovateľných funkcií nemusí byť Riemannovsky integrovateľnou funkciou.

Úlohy

Na záver uvedieme na precvičenie niekoľko úloh zo zahraničnej literatúry.

Úloha 1. (Pozri [20]) Nech

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{ak } x \leq -3, \\ 2x^2 - 1 & \text{ak } -3 < x \leq 2, \\ -x/2 & \text{ak } x > 2. \end{cases}$$

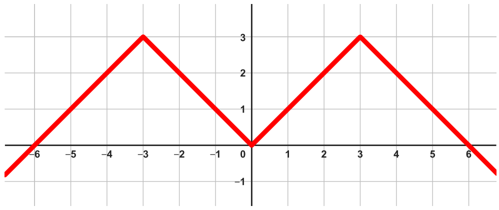
Pre ktoré hodnoty x je $f(x) = x$?

Úloha 2. (Pozri [16]) Nakreslite graf funkcie

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{4-x^2} & \text{pre } -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 - 4 & \text{pre } x > 0 \end{cases}$$

Nájdite všetky hodnoty k, pre ktoré rovnica $f(x) = k$ má (a) 0 (b) 1 (c) 2 korene.

Úloha 3. (Pozri [16]) Hamburgery McMaths majú modernizovať svoje logo, ako je uvedené na obr. 2. Vyjadrite túto funkciu ako funkciu definovanú po častiach, pomocou (a) 4 (b) 3 (c) 2 častí (t. j. pravidiel, ktoré definujú funkciu).



Obrázok 2. Návrh loga pre McMaths

Úloha 4. (Pozri [7]) Nech $f(x) = \begin{cases} 3 - x & x < 1 \\ ax^2 + bx & x \geq 1 \end{cases}$, kde a, b sú konštanty.

a) Ak funkcia f je spojitá pre všetky x, aký je vzťah medzi a, b?

b) Nájdite také hodnoty a, b, pre ktoré je funkcia f spojitá a diferencovateľná.

Literatúra – References

[1] Arnold, D., Intermediate Algebra, LibreTexts, 2007. `https://math.libretexts.org/Bookshelves/Algebra/Intermediate_Algebra_(Arnold)`

[2] Calda, E., Rovnice ve škole neřešené, Prometheus, Praha, 1995.

[3] Crauder, B., Evans, B., Noell, A., Functions and Change: A Modeling Approach to College Algebra and Trigonometry, Houghton Mifflin Company, 2008.

[4] Данко, П. Е., Попов, А. Г., Кожевникова, Т. Я., Высшая математика в упражнениях и задачах, Учеб. пособие для втузов, Москва, Высшая школа, 1986.

[5] Diehl, J., McGraw-Hill's SAT Subject Test: Math Level 2, McGraw-Hill Companies, 2009.

[6] Dirichlet, J. P. G. L.: Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, Journal für die reine und angewandte Mathematik. 4, 1829, 157–169.

[7] Garner, C., The AP Calculus Problem Book, Rockdale Magnet School for Science and Technology, 2008.

[8] Gauß, C. F., Theorematis arithmetici demonstratio nova, Comment. Soc. Regiae Sci. Göttingen 16 (1808), 1–8.

[9] Iverson, K. E.: A Programming Language, John Wiley & Sons, Inc., 1962.

[10] Johnson, G., Piecewise Defined Functions, Math Teacher's Resource, 2015. `https://mathteachersresource.com/instructional-content.html`

[11] Kronecker, L.: Über Sturm'sche Functionen, Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin von Jahre 1878, 95–121.

[12] Кузнецов, В. О.: *Об элементарных и неэлементарных функциях*, Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 9. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2014, 133–137.

[13] Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B. H.: Precalculus Functions and Graphs. A Graphing Approach, Houghton Mifflin Company, 2008.

[14] Mishra, S., Fundamentals of Mathematics. Functions and Graphs, Pearson India Education Services, 2016.

[15] Muleshkov, A. S., Sweat, K. R., Elementary Functions, College Mathematics Journal, vol. 53 (2021), 54–63. DOI: 10.1080/07468342.2022.1990675

[16] Nicholas, J., Hunter, J., Hargreaves, J., Functions and Their Graphs, Mathematics Learning Centre, University of Sydney, 2006.

[17] Odvárko, O., Ryšánková, M.: Matematika pre 2. ročník gymnázia. Funkcie II, SPN, Bratislava, 1998.

[18] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, SPN, Praha, 1972.

[19] Polák, J.: Didaktika matematiky. Jak učit matematiku zajímavě a užitečně, Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2014.

[20] Rusczyk, R., Introduction to Algebra, AoPS Incorporated, 2007.

[21] Senk, S. L., at all., Advanced Algebra, Scott, Foresman and Co., 1990.

[22] Sisson, P., Precalculus, Hawkes Learning Systems, 2015.

[23] Snoha, Ľ.: Úvod do teórie funkcií. Záznam prednášok, UMB, Banská Bystrica, 2019. `https://www.fpv.umb.sk/lsnoha/ucebne-texty-k-vyucovaniu.html`

[24] Stewart, J., Redlin, L., Watson, S., Panman, P., College Algebra: Concepts and Contexts, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.

[25] Sullivan, M, Sullivan, M. III., Algebra & Trigonometry: Enhanced with Graphing Utilities, Pearson Education, 2013.

[26] Thomae, J.: Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale, Verlag von Louis Nebert, Halle, 1875.

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou grantu KEGA 012UPJŠ-4/2021 *Vývoj digitálnej knižnice interdisciplinárnych STEAM projektov a jej implementácia do informatického, matematického a prírodovedného vzdelávania na stredných školách*.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Ústav informatiky SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Jednota slovenských matematikov a fyzikov pobočka Nitra,
(kontaktná adres: Schurmannova 27, 949 01 Nitra)
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
kontakt: Prof. Martin Kalina, KMDG SvF STU, Radlinského 11,
810 05 Bratislava (e-mail: martin.kalina@stuba.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
3/2023 ročník 52

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Aba Teleki
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková
Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 350 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: október 2023

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences"
OMFI 3/2023 Volume 52
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

OBSAH

CONTENTS