OBZORY

2/2023 (52)

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY
A INFORMATIKY 2/2023 ročník 52

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 2/2023 Volume 52

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2023 (52)

VZDELÁVANIE V MATEMATIKE A INFORMATIKE

O desatinných periodických číslach

Jozef Doboš

Abstract [On repeating decimals]: In this article we show how to find periods of repeating decimals with a calculator. The second part of this paper is devoted to addition of repeating decimals without converting of them to fractions.

Key words: repeating decimals, period, addition

Súhrn: V tomto článku ukazujeme, ako nájsť periódu desatinných periodických čísel pomocou kalkulačky. Druhá časť práce je venovaná sčítaniu desatinných periodických čísel bez ich prevedenia na zlomky.

Kľúčové slová: desatinné periodické čísla, perióda, sčítanie

MESC: 97A80, 97A30.

Úvod

Rozhodnúť o desatinnom čísle, či ide o racionálne alebo iracionálne číslo, môže byť náročné nielen pre žiakov. Dokazuje to nasledujúci sken z knihy [5]:

> ***Irrational numbers***, on the other hand, are numbers that are sort of . . . unfinished. For example, let's say you want to know how many times 8 is divisible by 23. The answer is .34782608696 and on and on. This is an example of an irrational number.

Asi za to môže výpočet na kalkulačke. Totiž perióda čísla $8/23$ má 22 cifier, čo je viac ako dokáže zobraziť displej bežnej elektronickej kalkulačky. Pritom perióda čísla sa dá nájsť aj pomocou takejto kalkulačky (pozri napr. [4]). Ukážeme si, ako sa to robí.

Druhá časť tohto článku je venovaná aritmetickým operáciám s desatinnými periodickými číslami. Inšpiráciou nám bol materiál zverejnený na internete[1], v ktorom sa píše:

> *Desatinné periodické čísla nevieme sčítať, odčítať, násobiť, či deliť. Ak ich však vyjadríme v tvare zlomku, všetky tieto, ako aj iné počtové operácie, vieme realizovať.*

---

[1] `https://kolbi.wbl.sk/desatinne_periodicke_cisla.pdf`

Ukážeme, že to nie je celkom tak. Aritmetike desatinných periodických čísel sa venuje článok [8]. V roku 2021 bol publikovaný článok [3], v ktorom je elementárnym spôsobom popísaná aritmetika reálnych čísel, ktoré sú reprezentované desatinnými číslami (nielen periodickými). Kvôli jednoduchosti uvedieme v tejto časti iba sčítanie desatinných periodických čísel bez ich vyjadrenia v tvare zlomku.

Hľadáme periódu racionálneho čísla

V publikácii [6] autor popisuje triedny projekt pre žiakov, ktorý je zameraný na desatinné čísla a zlomky. Skúmaniu racionálnych desatinných čísel na strednej škole sa venuje aj diplomová práca [1]. Píše sa tam, že vyjadrenie zlomkov v tvare periodických desatinných čísel, ako napr.

$$\tfrac{1}{23} = 0.\overline{0434782608695652173913} \quad \text{(perióda má 22 cifier)},$$

je nad rámec jednoduchej vedeckej kalkulačky. Autorka preto odporúča oboznámiť žiakov s výkonnejšími výpočtovými nástrojmi, ktoré sú ľahko dostupné na internete, napr. `www.wolframalpha.com/`. Tieto programy umožňujú žiakom skúmať/vypočítať takéto reprezentácie racionálnych čísel s pomerne dlhou periódou – čo je pri počítaní na kalkulačke takmer nemožná úloha (napr. perióda zlomku $1/113$ má 112 cifier).

Platí nasledujúce tvrdenie (pozri napr. [2]):

Veta. *Nech p je prvočíslo, pre ktoré platí $p \neq 2$ a $p \neq 5$. Potom číslo $1/p$ má periódu dĺžky $p-1$ práve vtedy, keď číslo 10 je primitívnym koreňom čísla p.*

Pripomeňme si, že prirodzené číslo k je primitívnym koreňom prvočísla p práve vtedy, keď postupnosť mocnín čísla k modulo p vytvorí všetky prirodzené čísla menšie ako p.

Podľa tejto vety perióda čísla $1/23$ má 22 cifier. Na overenie toho, že číslo 10 je primitívnym koreňom prvočísla 23, môžeme použiť program GeoGebra (v okne počítačovej algebry CAS) nasledujúcim spôsobom:

```
Sort(Sequence(Mod(10^n,23),n,1,22))
```

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22\}$

Ako vidíme, v tomto zozname sú všetky prirodzené čísla menšie ako 23. Preto číslo 10 je primitívnym koreňom prvočísla 23.

Užitočné je tiež nasledujúce tvrdenie (pozri napr. [7]):

Veta. *Nech p je prvočíslo, pre ktoré platí $p \neq 2$ a $p \neq 5$. Ak n je dĺžka periódy čísla $1/p$, potom n je najmenšie také prirodzené číslo, pre ktoré číslo $10^n - 1$ je deliteľné číslom n.*

Pre $p = 23$ môžeme znova použiť program GeoGebra (v okne CAS):

```
RemoveUndefined(Sequence(If(GCD(10^n-1,23)==23,n),n,1,22))
```

$\{22\}$

Výstupom je zoznam všetkých prirodzených čísel s vlastnosťou uvedenou vo vete, ktoré sú menšie ako prvočíslo p. V našom prípade obsahuje tento zoznam iba číslo 22 (čo je zrejme najmenšie číslo tohto zoznamu), preto perióda čísla $1/23$ má 22 cifier.

V článku [11] je ukázané, že ak p je také prvočíslo, že číslo $1/p$ má periódu dĺžky $p - 1$, potom číslo tvaru m/p, kde $m \in \{1, 2, \ldots, p - 1\}$, má periódu zloženú z tých istých cifier ako číslo $1/p$, len začínajúcu inou cifrou (hovorí sa tomu cyklická permutácia). Autor tiež ukazuje, ako problematika desatinných periodických čísel môže byť vstupnou bránou do abstraktnej algebry.

Prejdeme k sľúbenému hľadaniu periódy na kalkulačke. Postup je vysvetlený v poznámkach k prednáškam [9] (na hľadaní periódy čísla $1/19$). Na kalkulačke (my sme použili kalkulačku smartfónu) vydelíme číslo 1 číslom 23 a potom výsledok vynásobíme číslom 23:

postupne stlačíme $\boxed{1}\,\boxed{\div}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{=}$, zapíšeme si výsledok 0.0434782609

a pokračujeme $\boxed{\times}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{=}$. Dostaneme číslo 1.0000000007.

Dostali sme číslo, ktoré prepíšeme do tvaru $1+7\cdot 10^{-10}$. Takto sme získali číslo 7, ktoré použijeme v druhom kroku.

Teraz vydelíme číslo 7 číslom 23 a potom výsledok vynásobíme číslom 23:

postupne stlačíme $\boxed{7}\,\boxed{\div}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{=}$, zapíšeme si výsledok 0.3043478261

a pokračujeme $\boxed{\times}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{=}$. Dostaneme číslo 7.0000000003.

Dostali sme číslo, ktoré prepíšeme do tvaru $7 + 3 \cdot 10^{-10}$. Takto sme získali číslo 3, ktoré použijeme v treťom kroku.

Teraz vydelíme číslo 3 číslom 23 a potom výsledok vynásobíme číslom 23:

postupne stlačíme $\boxed{3}\,\boxed{\div}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{=}$, zapíšeme si výsledok 0.1304347826

a pokračujeme $\boxed{\times}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{=}$. Dostaneme číslo 2.9999999998.

Dostali sme číslo, ktoré prepíšeme do tvaru $3 - 2 \cdot 10^{-10}$. Takto sme získali číslo 2, ktoré použijeme vo štvrtom kroku.

Tu nastáva zmena, pretože $3 - 2 \cdot 10^{-10}$ nie je súčet, ale rozdiel. V tomto prípade budeme na kalkulačke počítať rozdiel $1 - \frac{2}{23} = \frac{21}{23}$. Teda vydelíme číslo 21 číslom 23 a potom výsledok vynásobíme číslom 23:

postupne stlačíme $\boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$, zapíšeme si výsledok 0.9130434783

a pokračujeme $\boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$. Dostaneme číslo 21.0000000009.

Dostali sme číslo, ktoré prepíšeme do tvaru $21 + 9 \cdot 10^{-10}$. Takto sme získali číslo 9, ktoré použijeme v piatom kroku.

Postup opakujeme. Výpočty možno prehľadne zapísať takto:

$$
\begin{array}{rlrlrl}
\frac{1}{23} & \approx 0.043\,478\,260\,9 \;/\cdot 23 & 1 & \approx 1.000\,000\,000\,7 & = 1 + & 7 \cdot 10^{-10} \\
\frac{7}{23} & \approx 0.304\,347\,826\,1 \;/\cdot 23 & 7 & \approx 7.000\,000\,000\,3 & = 7 + & 3 \cdot 10^{-10} \\
\frac{3}{23} & \approx 0.130\,434\,782\,6 \;/\cdot 23 & 3 & \approx 2.999\,999\,999\,8 & = 3 - & 2 \cdot 10^{-10} \\
1 - \frac{2}{23} & \approx 0.913\,043\,478\,3 \;/\cdot 23 & 21 & \approx 21.000\,000\,000\,9 & = 21 + & 9 \cdot 10^{-10} \\
\frac{9}{23} & \approx 0.391\,304\,347\,8 \;/\cdot 23 & 9 & \approx 8.999\,999\,999\,4 & = 9 - & 6 \cdot 10^{-10} \\
1 - \frac{6}{23} & \approx 0.739\,130\,434\,8 \;/\cdot 23 & 17 & \approx 17.000\,000\,000\,4 & = 17 + & 4 \cdot 10^{-10} \\
\frac{4}{23} & \approx 0.173\,913\,043\,5 \;/\cdot 23 & 4 & \approx 4.000\,000\,000\,5 & = 4 + & 5 \cdot 10^{-10} \\
\frac{5}{23} & \approx 0.217\,391\,304\,3 \;/\cdot 23 & 5 & \approx 4.999\,999\,998\,9 & = 5 - & 11 \cdot 10^{-10} \\
1 - \frac{11}{23} & \approx 0.521\,739\,130\,4 \;/\cdot 23 & 12 & \approx 11.999\,999\,999\,2 & = 12 - & 8 \cdot 10^{-10} \\
1 - \frac{8}{23} & \approx 0.652\,173\,913\,0 \;/\cdot 23 & 15 & \approx 14.999\,999\,999\,0 & = 15 - & 10 \cdot 10^{-10} \\
1 - \frac{10}{23} & \approx 0.565\,217\,391\,3 \;/\cdot 23 & 13 & \approx 12.999\,999\,999\,9 & = 13 - & 1 \cdot 10^{-10} \\
1 - \frac{1}{23} & \approx 0.956\,521\,739\,1 \;/\cdot 23 & 22 & \approx 21.999\,999\,999\,3 & = 22 - & 7 \cdot 10^{-10} \\
1 - \frac{7}{23} & \approx 0.695\,652\,173\,9 \;/\cdot 23 & 16 & \approx 15.999\,999\,999\,7 & = 16 - & 3 \cdot 10^{-10} \\
1 - \frac{3}{23} & \approx 0.869\,565\,217\,4 \;/\cdot 23 & 20 & \approx 20.000\,000\,000\,2 & = 20 + & 2 \cdot 10^{-10} \\
\frac{2}{23} & \approx 0.086\,956\,521\,7 \;/\cdot 23 & 2 & \approx 1.999\,999\,999\,1 & = 2 - & 9 \cdot 10^{-10} \\
1 - \frac{9}{23} & \approx 0.608\,695\,652\,2 \;/\cdot 23 & 14 & \approx 14.000\,000\,000\,6 & = 14 + & 6 \cdot 10^{-10} \\
\frac{6}{23} & \approx 0.260\,869\,565\,2 \;/\cdot 23 & 6 & \approx 5.999\,999\,999\,6 & = 6 - & 4 \cdot 10^{-10} \\
1 - \frac{4}{23} & \approx 0.826\,086\,956\,5 \;/\cdot 23 & 19 & \approx 18.999\,999\,999\,5 & = 19 - & 5 \cdot 10^{-10} \\
1 - \frac{5}{23} & \approx 0.782\,608\,695\,7 \;/\cdot 23 & 18 & \approx 18.000\,000\,001\,1 & = 18 + & 11 \cdot 10^{-10} \\
\frac{11}{23} & \approx 0.478\,260\,869\,6 \;/\cdot 23 & 11 & \approx 11.000\,000\,000\,8 & = 11 + & 8 \cdot 10^{-10} \\
\frac{8}{23} & \approx 0.347\,826\,087\,0 \;/\cdot 23 & 8 & \approx 8.000\,000\,001\,0 & = 8 + & 10 \cdot 10^{-10} \\
\frac{10}{23} & \approx 0.434\,782\,608\,7 \;/\cdot 23 & 10 & \approx 10.000\,000\,000\,1 & = 10 + & 1 \cdot 10^{-10}
\end{array}
$$

Teraz by už nemal byť problém uvidieť, ako postupne pribúdajú jednotlivé cifry v desatinnom rozvoji (hneď za desatinnou bodkou). A takto nájdeme periódu:

$$
\begin{array}{rl}
1/23 \approx & 0.0434782609 \\
14/23 \approx & 0.6086956522 \\
12/23 \approx & 0.5217391304 \\
7/23 \approx & 0.3043478261 \\
1/23 = & 0.\overline{0434782608695652173913}
\end{array}
$$

Teraz už ľahko vieme vyjadriť ako desatinné periodické číslo každé číslo tvaru $m/23$, kde $m \in \{1, 2, \ldots, 22\}$. Urobte to napr. pre číslo $8/23$, ktoré sme spomenuli v úvode.

Aj v prípade, že prvočíslo p bude iba dvojciferné, zlomok $1/p$ môže mať pomerne dlhú periódu. Žiaci si to môžu vyskúšať na zlomkoch $1/29$, $1/47$, $1/59$, $1/61$ a $1/97$.

Na záver tohto odseku sa ešte zastavme pri menovateli 113. Objavuje sa pri hľadaní najlepšej racionálnej aproximácie čísla π v tvare zlomku s menovateľom menším ako 1000. Ide o zlomok $355/113$, ktorý sa zhoduje s číslom π na 6 desatinných miest. A má aj svoju webstránku `https://en.wikipedia.org/wiki/Mil%C3%BC`.

Sčítanie desatinných periodických čísel

Postup budeme ilustrovať na súčte

$$2.54\overline{817} + 0.5\overline{78} = \tag{1}$$

Sčítance majú periódy rôznych dĺžok. Najmenší spoločný násobok týchto dĺžok bude dĺžkou periódy súčtu týchto čísel (pozri [8]). Jednotlivé sčítance vyjadríme v tvare desatinných periodických čísel s periódami rovnakej dĺžky umiestnenými na rovnakej pozícii:

$$\begin{array}{r} 2.54\overline{817817} \\ +\,0.57\overline{878787} \\ \hline \end{array}$$

Teraz využijeme to, že vieme sčítať čísla s konečným desatinným rozvojom:

$$\begin{array}{r} 2.54817817 \\ +\,0.57878787 \\ \hline 3.12696604 \end{array}$$

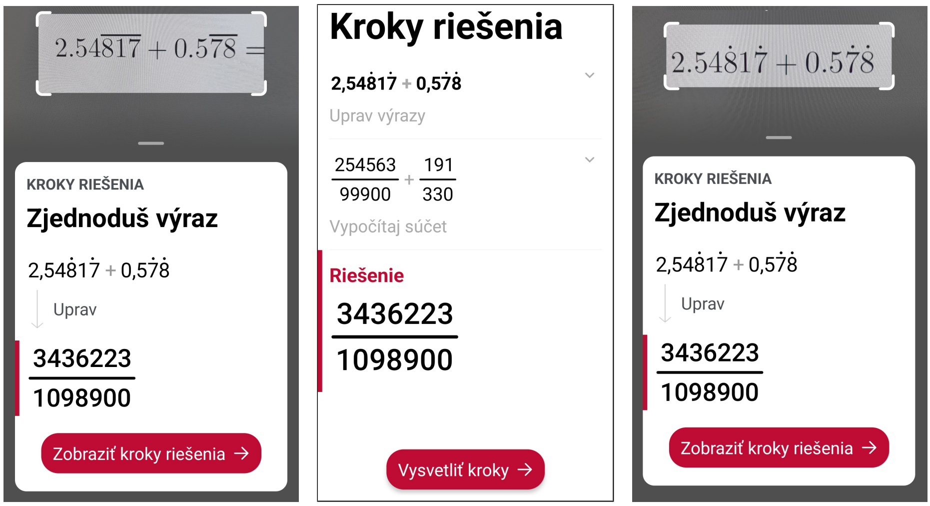
Toto však ešte nedáva hľadaný súčet (1), ktorý sa rovná číslu $3.12\overline{696605}$. Môžeme sa o tom presvedčiť napríklad pomocou nástroja `www.wolframalpha.com/`, kde do príkazového riadku napíšeme

```
(2.54 with 817 repeating)+(0.5 with 78 repeating)
```

Nevzali sme totiž do úvahy prechod cez desiatku. Preto náš výpočet upravíme tak, že každému zo sčítancov pridáme ďalšiu cifru (podľa príslušnej periódy):

$$\begin{array}{r} 2.54\dot{8}1781\dot{7}8 \\ +\,0.57\dot{8}7878\dot{7}8 \\ \hline 3.12\dot{6}9660\dot{5}6 \end{array}$$

Bodkami nad číslicami sme vyznačili začiatok a koniec periódy. Tento alternatívny spôsob označovania používa napr. aplikácia pre smartfón Photomath:



Vidíme, že Photomath rieši úlohu prevedením desatinných čísel na zlomky. Pritom pri skenovaní akceptuje obidva spôsoby zápisu desatinných periodických čísel.

Pozrime sa ešte na jeden súčet:

$$0.56\overline{718} + 2.01\overline{281} = \tag{2}$$

Postup, ktorý sme použili vyššie, dáva:

$$\begin{array}{r} 0.56\dot{7}1\dot{8}7 \\ +\,2.01\dot{2}8\dot{1}2 \\ \hline 2.57\dot{9}9\dot{9}9 \end{array}$$

Avšak `www.wolframalpha.com/` dáva výsledok 2.58. Ide totiž o špeciálny prípad, keď súčet cifier v periódach, ktoré sú na rovnakých pozíciách, je rovný číslu 9. Konkrétne, v našej ukážke máme $7+2=9$, $1+8=9$, $8+1=9$. Náš výpočet dal správny výsledok, pretože $2.57\overline{9} = 2.58$. Naozaj, môžeme sa o tom presvedčiť nasledujúcim spôsobom (pozri napr. [10]):

$$\frac{2.58 + 2.57\overline{9}}{2} = \frac{5.15\overline{9}}{2} = 2.57\overline{9},$$

pričom poslednú rovnosť sme získali delením čísla $5.15\overline{9}$ číslom 2.

$$
\begin{array}{l}
5.1599\ldots : 2 = 2.5799\ldots \\
\underline{4} \\
1.1 \\
\underline{1.0} \\
\quad 15 \\
\quad \underline{14} \\
\qquad 19 \\
\qquad \underline{18} \\
\qquad\ \ 19 \\
\qquad\ \ \underline{18} \\
\qquad\quad 1
\end{array}
$$

Už si len stačí uvedomiť, že z rovnosti $\frac{a+b}{2} = b$ vyplýva $a = b$.

Pokiaľ chceme v takýchto prípadoch dostať výsledok v tvare ukončeného desatinného rozvoja, pridáme na poslednú pozíciu číslo 1. V našej ukážke teda postupujeme takto:

$$
\begin{array}{r}
0.56\dot{7}1\dot{8} \\
+\ 2.01\dot{2}8\dot{1} \\
1 \\
\hline
2.58000
\end{array}
$$

A úplne na záver niečo na samostatnú prácu:

Úloha. *Riešte rovnicu*

$$0.\overline{ab} + 0.\overline{abc} = \frac{33}{37},$$

kde $0.\overline{ab} = 0.ababab\ldots$, $0.\overline{abc} = 0.abcabc\ldots$ *sú desatinné periodické čísla.*[2]

u

Pri takýchto úlohách je vhodné upozorniť žiakov, že pokiaľ a, b sú cifry v desatinnom čísle, tak ab nie je súčin. Podobne ako 23 je číslo dvadsaťtri, nie je to súčin čísel dva a tri.

Literatúra – References

[1] Boudoin, Robyn Jasmin: Exploring Rational Numbers in Middle School, Master Thesis, Louisiana State University, 2015.

[2] `https://math.stackexchange.com/questions/2052959/repeating-decimals-equation-problem`

[2] Dolisi, Earl E.: Periodic Decimal Fractions, Master Thesis, Kansas State Teachers College of Emporia, 1973.
[3] Fardin, Nicolas and Li, Liangpan: Real numbers as infinite decimals, The Mathematics Enthusiast, vol. 18, no. 1&2 (2021), pp. 21–38.
[4] Lichtenberg, D. R.: Minicalculators and Repeating Decimals, The Mathematics Teacher, vol. 71, no. 6 (1978), pp. 524–530.
[5] Maganzini, Christy: Cool Math: Math Tricks, Amazing Math Activities, Cool Calculations, Awesome Math Factoids and More, Los Angeles, Price Stern Sloan, 1997.
[6] Martin, W. J.: Fraction Wheels: An interactive project for middle school students, Worcester Polytechnic Institute, Massachusetts, 2017 `https://users.wpi.edu/~martin/MATHKIDS/content/fracwheels.pdf`.
[7] Nygaard, P. H.: Repeating Decimals, The Mathematics Teacher, vol. 31 (1938), pp. 316–321.
[8] Plagge, R.: Fractions Without Quotients: Arithmetic of Repeating Decimals, The Two-Year College Mathematics Journal, vol. 9, no. 1 (1978), pp. 11–15.
[9] Sutherland, Scott: Foundations of Secondary School Mathematics, lecture notes, Stony Brook University, 2009 `https://www.math.stonybrook.edu/~scott/mae301.spr09/notes/2009-03-03.pdf`.
[10] Tall, D. O., Schwarzenberger, R. L. E.: Conflicts in the learning of real numbers and limits, Mathematics Teaching, 82 (1978), 44–49.
[11] Wright, Matthew L.: Cycles of Digits, St. Olaf College, Minnesota, preprint, 2014 `https://mlwright.org/docs/cycles.pdf`.

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou grantu KEGA 012UPJŠ-4/2021 *Vývoj digitálnej knižnice interdisciplinárnych STEAM projektov a jej implementácia do informatického, matematického a prírodovedného vzdelávania na stredných školách*.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Ústav informatiky SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Jednota slovenských matematikov a fyzikov pobočka Nitra,
(kontaktná adres: Schurmannova 27, 949 01 Nitra)
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
kontakt: Prof. Martin Kalina, KMDG SvF STU, Radlinského 11,
810 05 Bratislava (e-mail: martin.kalina@stuba.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
2/2023 ročník 52

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Aba Teleki
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková
Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 350 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: marec 2023

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08