

# OBSOBY

1/2023 (52)

*MATEMATIKY*  
*FYZIKY a*  
*INFORMATIKY*

# OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2023 ročník 52

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,  
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

## HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 1/2023 Volume 52

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and  
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

**Fundavit:** Štefan Znám, Beloslav Riečan et Daniel Kluvanec

**Editors in Chief:** Jozef Doboš (Mathematics and Computer Sciences)

### International Editorial Board:

Anatolij Dvurečenskij (Slovakia)	Štefan Luby (Slovakia)
Gábor Galambos (Hungary)	László Nána (Hungary)
Juraj Hromkovič (Switzerland)	Adam Plocki (Poland)
Hans Jordens (Netherlands)	Zdeněk Půlpán (Czech republic)
Martin Kalina (Slovakia)	Ladislav Emanuel Roth (USA)

**Executive Editors:** Štefan Tkáčik (Mathematics and Computer Sciences)  
Aba Teleki (Physics)

### Editorial Board:

#### Mathematics and Computer Sciences:

Katarína Bachratá	Zbyněk Kubáček	Peter Maličký	Iveta Scholtzová
Vojtech Bálint	Jozef Kuzma	Mariana Marčoková	Milan Turčáni
Jozef Fulier	Ladislav Kvasz	Milan Matejdes	Peter Vrábel
	Tomáš Lengyelfalusi	Martin Papčo	

#### Physics:

Jozef Beňuška	Stanislav Holec	Viera Lapitková	Vladimír Šebeň
Ivo Čáp	Anna Jankovychová	Milan Noga	Boris Tomášik
Ivan Červeň	Zuzana Ješková	Endre Szabó	Bohumil Vybíral

### Reviewers:

#### Mathematics and Computer Sciences:

Ružena Blašková	Jaroslava Mikulecká	Štefan Solčan
Radoslav Harman	Martin Papčo	Marián Trenkler
Mária Kmeťová	Iveta Scholtzová	Dušan Vallo

#### Physics:

Peter Demkanin	Peter Hanisko	Marián Kíreš	Arnold Pompoš
Jozef Hanč	Ján Klíma	Miroslava Ožvoldová	Mária Rakovská

---

# Popisná štatistika s GeoGebrou

Jozef Doboš

**Abstract [Descriptive Statistics with GeoGebra]:** In this paper, we would like to show how it is possible to use GeoGebra for solving problems in Descriptive Statistics.

**Key words:** Descriptive Statistics, GeoGebra

**Súhrn:** V tomto článku chceme ukázať, ako možno používať program GeoGebra pri riešení úloh popisnej štatistiky.

**Kľúčové slová:** popisná štatistika, GeoGebra

**MESC:** 97U70



## Úvod

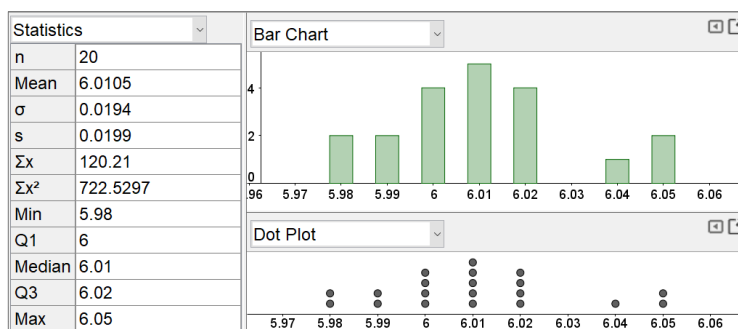
V rámci školení učiteľov stredných škôl používame program GeoGebra. Zistili sme, že niektorí učitelia pri výuke štatistiky prenášajú údaje z GeoGebry do iných programov na ďalšie spracovanie (uvádzali konkrétne MS Excel). To je však proti filozofii programu GeoGebra. Ukážeme si, na príkladoch z popisnej štatistiky (vo väčšom rozsahu, ako vyžaduje učebnica [1]), že to nie je nutné. GeoGebra má štatistické nástroje, ktoré sú pre školskú matematiku postačujúce.

GeoGebra disponuje tabuľkovým kalkulátorom (Spreadsheet View), v ktorom môžeme (okrem iného) riešiť úlohy popisnej štatistiky. Pri príprave tohto článku bola použitá GeoGebra Classic 5.0.683.0-d (07 January 2022). Aby sme ukázali základnú paletu nástrojov popisnej štatistiky, ktorými disponuje GeoGebra, budeme pracovať s nasledujúcimi tabuľkami:


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	6.05	5.98	6.04	6.05	6	6.02	6.01	6.01	5.99	5.98			banana	50			od	–	do	$n_i$	$N_i$
2	6	6.02	6	6.01	6.01	5.99	6	6.02	6.01	6.02			apple	60			30	–	40	12	12
3													orange	25			40	–	50	11	23
4													blueberry	10			50	–	60	25	48
5	$x_i$	5.98	5.99	6	6.01	6.02	6.04	6.05					watermelon	60			60	–	70	15	63
6	$n_i$	2	2	4	5	4	1	2									70	–	80	9	72
7																	80	–	90	2	74

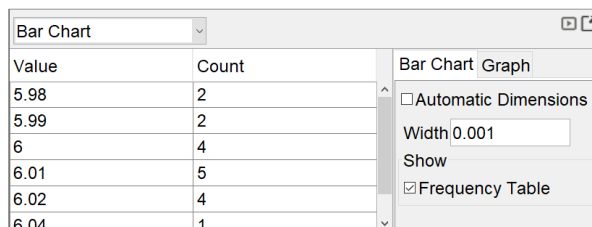
Tab. 1.

Pozrime sa najskôr na tabuľku umiestnenú v bunkách A1:J2. Vyznačíme myšou túto tabuľku a klikneme na tlačidlo  pre štatistickú analýzu (na lište druhé zľava). Otvorí sa nám okno s názvom Data Source, v ktorom je potrebné zvoliť typ vstupnej tabuľky. Klikneme myšou na ikonu . Otvorí sa nám roletové menu, kde vyberieme príslušný typ údajov a typ tabuľky. Implicitné nastavenie je Number a Row data. Je to typ tabuľky umiestnenej v bunkách A1:J2, takže v tomto prípade stačí len kliknúť myšou na tlačidlo Analyze. GeoGebra nám poskytne prehľadné spracovanie nášho štatistického súboru. Základné číselné charakteristiky a niektoré z grafických reprezentácií vidíme na obr. 1.



Obr. 1.

Nájde tam aj tabuľku početností<sup>1</sup>, ktorú môžeme exportovať do algebraického a grafického okna, avšak iba ako text. Súčasne sa exportuje aj stĺpcový diagram. Služí na to tlačidlo .





Value	Count
5.98	2
5.99	2
6	4
6.01	5
6.02	4
6.04	1

Obr. 2.



Túto tabuľku početností sme zaradili do nášho súboru tabuliek. V tab. 1 je v bunkách B5:H6. Pri malom počte údajov to možno urobiť manuálne, pri väčšom aj pomocou príkazov (tie sa píše do príkazového riadku – je pod názvom Input, po každom príkaze treba stlačiť kláves Enter):


`FillCells(B5,Unique(A1:J2))` a `FillCells(B6,Frequency(A1:J2))`.

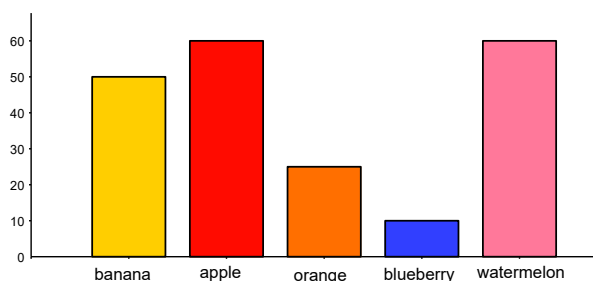
<sup>1</sup>početnosť je počet výskytov danej hodnoty v štatistickom súbore

Teraz si ukážeme, ako GeoGebra dokáže spracovať takúto tabuľku početností. Vyznačíme myšou prvý riadok tejto tabuľky (v tab. 1 sú to bunky B5:H5) a klikneme na tlačidlo . Otvorí sa nám okno s názvom Data Source, v ktorom je potrebné zvoliť typ vstupnej tabuľky. Klikneme myšou na ikonu . Otvorí sa nám roletové menu, kde vyberieme príslušný typ údajov a typ tabuľky. Nastavíme Number a Data with Frequency. Potom vyznačíme myšou druhý riadok tabuľky početností (v tab. 1 sú to bunky B6:H6) a vložíme ho do druhého stĺpca – kliknutím na symbol ruky v záhlaví (vedľa bieleho nápisu Frequency). Nakoniec klikneme myšou na tlačidlo Analyze.

GeoGebra nám poskytne presne tie isté výstupy ako v predchádzajúcej ukážke. Tabuľka početností umiestnená v bunkách B5:H6 (tab. 1) obsahuje totiž tie isté údaje ako tabuľka umiestnená v bunkách A1:J2 (tab. 1), len sú zapísané iným spôsobom.

Početnosti sa nemusia vzťahovať iba na kvantitatívne štatistické znaky. Ukážkou je tabuľka umiestnená v bunkách M1:N5 v tab. 1. Ukážeme si, že GeoGebra si poradí aj s takouto tabuľkou početností. Vyznačíme myšou stĺpec štatistických znakov (v tab. 1 sú to bunky M1:M5 s ovocím) a klikneme na tlačidlo . Otvorí sa nám okno s názvom Data Source, v ktorom je potrebné zvoliť typ vstupnej tabuľky. Klikneme myšou na ikonu . Otvorí sa nám roletové menu, kde vyberieme príslušný typ údajov a typ tabuľky. Nastavíme Text a Data with Frequency. Potom vyznačíme myšou druhý stĺpec tabuľky početností (v tab. 1 sú to bunky N1:N5) a vložíme ho do druhého stĺpca. Nakoniec klikneme myšou na tlačidlo Analyze.

Nájdeme tam aj tabuľku početností, ktorú môžeme exportovať do algebraického a grafického okna, avšak iba ako text. Súčasne sa exportuje aj stĺpcový diagram. Služi na to tlačidlo . Na obr. 3 vidíme tento stĺpcový diagram.



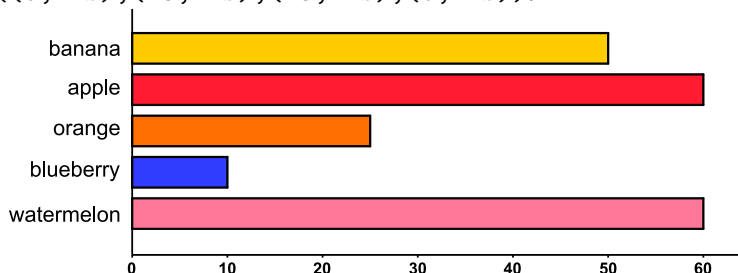
Obr. 3.

Farby nastavíme príkazmi `SetColor(a_1, "#FF789A")`, `SetColor(a_2, "#313FFF")`, `SetColor(a_3, "#FF6F00")`, `SetColor(a_4, "#FF0B00")`, `SetColor(a_5, "#FFCE00")`.

GeoGebra nemá špeciálny príkaz pre vodorovný stĺpcový diagram. Môžeme si však nakresliť každý stĺpec zvlášť, napr. pomocou príkazov

$s=0.35$ ,

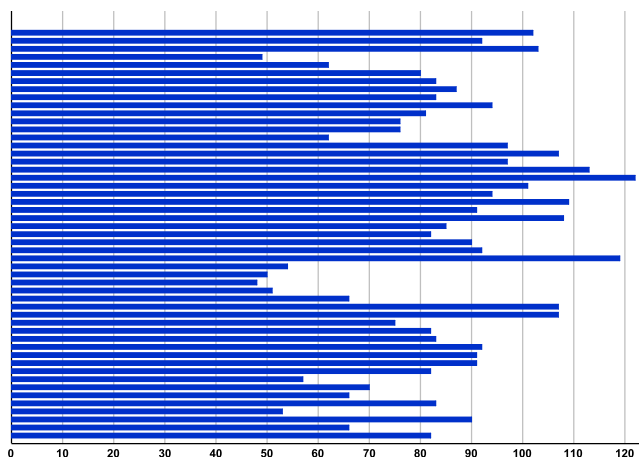
```
Polygon((0,5-s),(N1,5-s),(N1,5+s),(0,5+s)),
Polygon((0,4-s),(N2,4-s),(N2,4+s),(0,4+s)),
Polygon((0,3-s),(N3,3-s),(N3,3+s),(0,3+s)),
Polygon((0,2-s),(N4,2-s),(N4,2+s),(0,2+s)),
Polygon((0,1-s),(N5,1-s),(N5,1+s),(0,1+s)).
```



Obr. 4.

Môžeme ich nakresliť jediným príkazom:

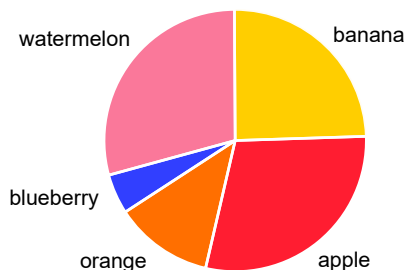
```
Execute(Sequence("a_"+n+"}=Polygon((0,"+n+"-s),
(Object("+UnicodeToLetter[34]+"N"+UnicodeToLetter[34]+"
+(6-"+n+")), "+n+"-s), (Object("+UnicodeToLetter[34]+"N"+
UnicodeToLetter[34]+"+(6-"+n+")), "+n+"+s), (0,"+n+"+s))",n,1,5))
```



Obr. 5.

Tento spôsob je vhodný pri väčšom počte stĺpcov. Vodorovný stĺpcový diagram (obr. 5) z učebnice [1] sme nakreslili práve takýmto príkazom.

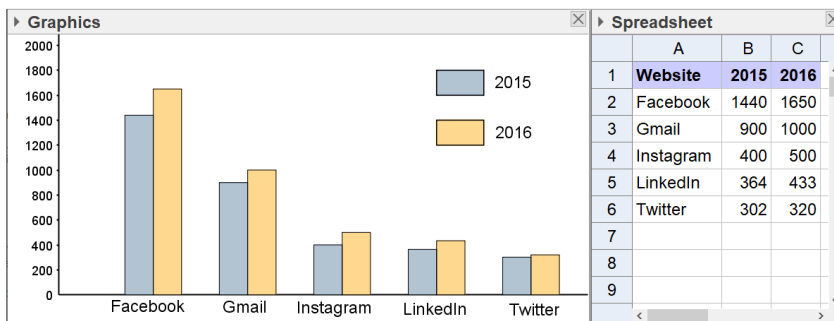
Kruhový diagram nakreslíme príkazom `PieChart(N1:N5,(0,0),1)`.



Obr. 6.

V médiách sa často stretávame s porovnaním medzi sebou viacerých stĺpcových diagramov. Nasledujúca ukážka (obr. 7), ktorú sme prevzali z učebnice [2], prezentuje zmeny v počte používateľov Facebooku, Gmailu, Instagramu, LinkedInu a Twitteru medzi rokmi 2015 a 2016.

Urobíme to pomocou príkazov `BarChart(Sequence(5)-0.15,B2:B6,0.3)` a `BarChart(Sequence(5)+0.15,C2:C6,0.3)`.

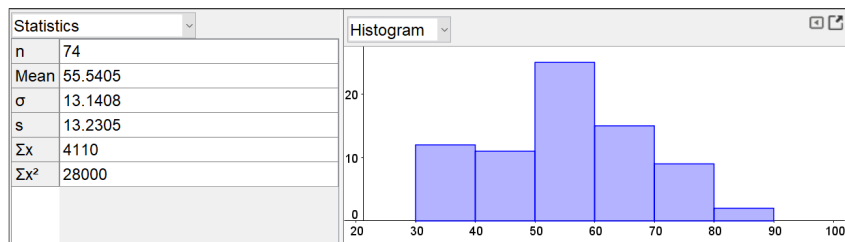


Obr. 7.

Poslednou tabuľkou v našej ukážke (tab. 1) je tabuľka triednych početností, ktorá je umiestnená v bunkách Q2:T7. Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom prípade. Vyznačíme myšou stĺpec triednych početností (v tab. 1 sú to bunky T2:T7) a klikneme na tlačidlo . Otvorí sa nám okno s názvom Data Source, v ktorom je potrebné zvoliť typ vstupnej tabuľky. Klikneme myšou na ikonu . Otvorí sa nám roletové menu, kde vyberieme príslušný typ údajov a typ tabuľky. Nastavíme Number a Class with Frequency. Potom klikneme myšou na tlačidlo Analyze, hoci ešte nemáme správne nastavené triedne intervaly (pretože pole Width zatiaľ nie je prístupné na zápis). Otvoríme znova okno Data Source – kliknutím myšou na tlačidlo so sym-

bolom ruky – kde doplníme do poľa Start ľavý krajný bod prvého triedneho intervalu a do poľa Width dĺžku intervalov. Potom znova klikneme myšou na tlačidlo Analyze.

Výsledok vidíme na nasledujúcom obrázku.



Obr. 8.

Nájde tam aj tabuľku triednych početností, ktorú môžeme exportovať do algebraického a grafického okna, avšak iba ako text. Súčasne sa exportuje aj histogram. Slúži na to tlačidlo

GeoGebra neumožňuje farebne odlišiť medzi sebou stĺpce histogramu. Namiesto toho môžeme vytvoriť stĺpcový diagram príkazom `BarChart(30,90,T2:T7)`. Na obr. 9 vidíme tento stĺpcový diagram, na ktorom sme jednotlivé stĺpce dodatočne odlišili farebne.

**Modus** vyjadruje polohu najväčšej koncentrácie hodnôt štatistického súboru. Nachádza sa v intervale s najväčšou triednou početnosťou. Pri jeho určení vychádzame z predpokladu, že údaje sa v modálnom intervale viac koncentrujú k tej hranici, ktorej susedný interval má väčšiu triednu početnosť. Modus označujeme symbolom  $\hat{x}$ .

Môžeme použiť príkazy

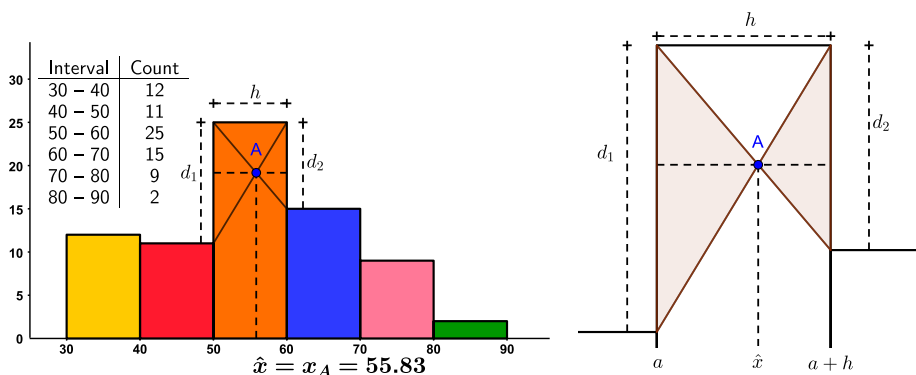
```
FrequencyTable(Histogram(Sequence(30,90,10),T2:T7)),
usecka1=Segment((Q4,T3),(Q5,T4)),
usecka2=Segment((Q4,T4),(Q5,T5)),
A=Intersect(usecka1,usecka2).
```

Modus sa potom rovná  $x$ -ovej súradnici priesečníka  $A$  týchto dvoch úsečiek.

Z podobnosti trojuholníkov vyplýva, že platí

$$\frac{\hat{x} - a}{d_1} = \frac{(a + h) - \hat{x}}{d_2}.$$





Obr. 9.

Pričom

$a$  je začiatok modálneho intervalu, t. j. intervalu s najväčšou triednou početnosťou (v našej ukážke  $a = 50$ ),

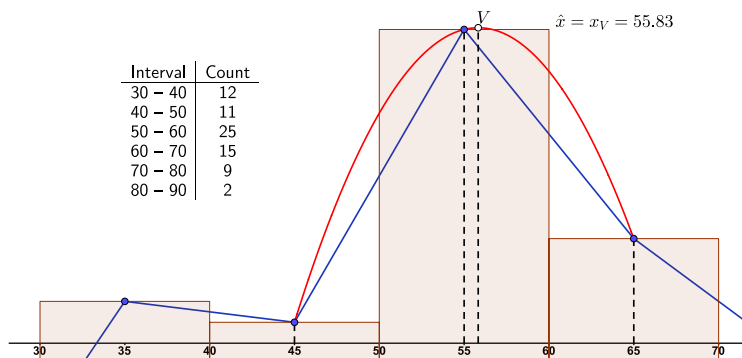
$h$  je dĺžka modálneho intervalu (v našej ukážke  $h = 10$ ),

$a + h$  je koniec modálneho intervalu (v našej ukážke  $a + h = 60$ ),

$d_1$  je rozdiel medzi početnosťou modálneho intervalu a predchádzajúceho intervalu (v našej ukážke  $d_1 = 25 - 11 = 14$ ),

$d_2$  je rozdiel medzi početnosťou modálneho intervalu a nasledujúceho intervalu (v našej ukážke  $d_2 = 25 - 15 = 10$ ).

Po úprave dostávame vzorec vhodný na výpočty:  $\hat{x} = a + h \cdot \frac{d_1}{d_1 + d_2}$ .



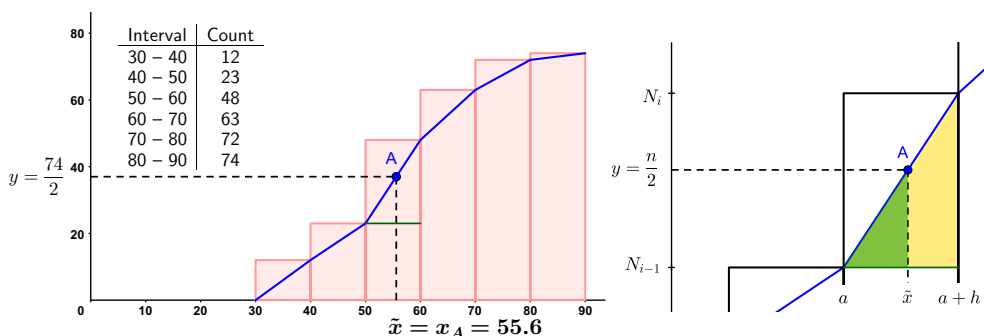
Obr. 10.

Modus sa tiež rovná  $x$ -ovej súradnici vrcholu paraboly, ktorú preložíme cez tri body – vrcholy polygónu triednych početností (obr. 10), ktoré sú určené modálnym intervalom a jeho susedmi.

**Medián** rozdeľuje štatistický súbor (usporiadaný podľa veľkosti) na dve približne rovnako početné časti<sup>2</sup>. Vychádzame z predpokladu, že v mediánovom intervale sú hodnoty rozložené rovnomerne. Medián označujeme symbolom  $\tilde{x}$ . Pri jeho určení vychádzame z histogramu kumulatívnych triednych početností (v tabuľke tab. 1 ich máme umiestnené v bunkách U2:U7), ktoré sú definované rekurentne takto:

$$N_1 = n_1, \quad N_{k+1} = N_k + n_{k+1}.$$

Preto  $N_2 = n_1 + n_2$ ,  $N_3 = n_1 + n_2 + n_3$ ,  $N_4 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ , atď.



Obr. 11.

Môžeme použiť príkazy

```
Histogram(Sequence(30,90,10),U2:U7),
FrequencyTable(Histogram(Sequence(30,90,10),U2:U7)),
polygon=Polyline((Sequence(30,90,10),Append(0,(U2:U7)))),
Intersect(polygon,y=74/2).
```

Medián sa potom rovná  $x$ -ovej súradnici priesečníka  $A$  lomenej čiary (polygónu) a priamky  $y = \frac{74}{2}$ .

Z podobnosti trojuholníkov vyplýva, že platí

$$\frac{\tilde{x} - a}{\frac{n}{2} - N_{i-1}} = \frac{h}{N_i - N_{i-1}}.$$

Pričom

$a$  je začiatok mediánového intervalu (v našej ukážke  $a = 50$ ),

$h$  je dĺžka mediánového intervalu (v našej ukážke  $h = 10$ ),

$N_i$  je početnosť mediánového (v našej ukážke  $N_i = 48$ ),

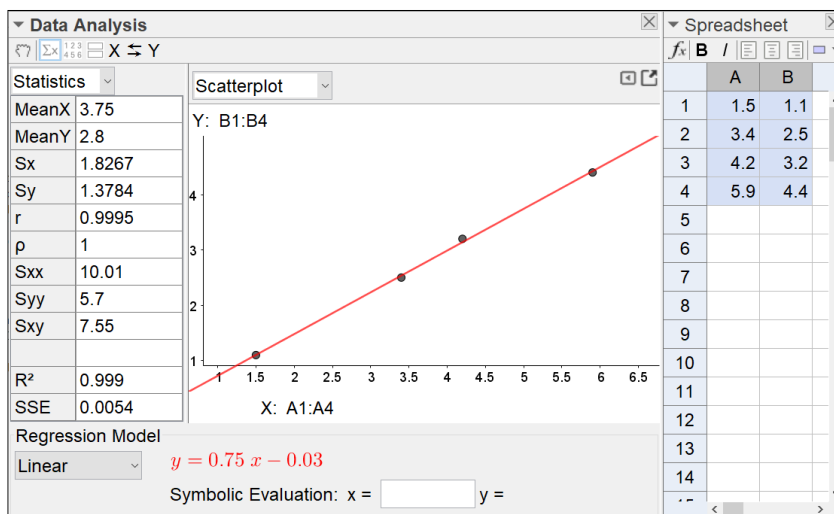
<sup>2</sup>V každej z týchto častí je najviac polovica hodnôt daného štatistického súboru.

$N_{i-1}$  je početnosť predchádzajúceho intervalu (v našej ukážke  $N_{i-1} = 23$ ),  
 $n$  je rozsah štatistického súboru (v našej ukážke  $n = 74$ ).

Po úprave (s využitím rovnosti  $N_i = N_{i-1} + n_i$ ) dostávame vzorec vhodný na výpočty:

$$\tilde{x} = a + h \cdot \frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{n_i}.$$

Na záver uvedieme ukážku dvojrozmernej regresnej analýzy. Túto problematiku už učebnica [1] neobsahuje.



Obr. 12.

Popisnou štatistikou to nekončí. GeoGebra zvláda toho oveľa viac. Stačí si pozrieť nasledujúce prehľady príkazov:

[https://wiki.geogebra.org/en/Probability\\_Commands](https://wiki.geogebra.org/en/Probability_Commands),

[https://wiki.geogebra.org/en/Statistics\\_Commands](https://wiki.geogebra.org/en/Statistics_Commands).

Ďalšie námety pre vyučovanie štatistiky s GeoGebrou môžeme nájsť v článkoch [3] a [4], prípadne v prezentácii <https://www.youtube.com/watch?v=jOrTyfx1DZA>.

## Literatúra – References

- [1] Kubáček, Z.: Matematika pre 3. ročník gymnázia a 7. ročník gymnázia s osemročným štúdiom, 1. časť, SPN, Bratislava, 2012.
- [2] Navidi, W. C., Monk, B. J.: Elementary Statistics, McGraw-Hill Education, 2019.
- [3] Phan-Yamada, T., Man, S. W.: Teaching Statistics with GeoGebra, North American GeoGebra Journal, (2018) vol. 7, no. 1, 14–24.

- [4] Quane, K.: Teaching Statistics with GeoGebra and Applets, Teaching Mathematics, (2014) vol. 39, no. 1, 24–32.

**Pod'akovanie:** Článok vznikol s podporou grantu KEGA 012UPJŠ-4/2021 *Vývoj digitálnej knižnice interdisciplinárnych STEAM projektov a jej implementácia do informatického, matematického a prírodovedného vzdelávania na stredných školách.*

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta,  
Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: [jozef.dobos@upjs.sk](mailto:jozef.dobos@upjs.sk)

Jednota slovenských matematikov a fyzikov  
Matematický ústav SAV  
Ústav informatiky SAV

---

**Adresa redakcie**

**Matematická a informatická časť**

Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok  
(e-mail: [obzory@ku.sk](mailto:obzory@ku.sk))

**Fyzikálna časť**

Jednota slovenských matematikov a fyzikov pobočka Nitra,  
(kontaktná adresa: Schurmannova 27, 949 01 Nitra)  
(e-mail: [JSMFteleki@gmail.com](mailto:JSMFteleki@gmail.com))

**Objednávky a predplatné vybavuje**

JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava  
**kontakt:** Prof. Martin Kalina, KMDG SvF STU, Radlinského 11,  
810 05 Bratislava (e-mail: [martin.kalina@stuba.sk](mailto:martin.kalina@stuba.sk))

**OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**  
**1/2023 ročník 52**

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Aba Teleki

Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki

Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková

Správca [www.omfi.ukf.sk](http://www.omfi.ukf.sk): Martin Drlík

Zástupca vydavateľa: Martin Kalina

Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou

Náklad: 350 kusov

Periodicita vydávania: štvrťročník

IČO vydavateľa: 00 178 705

Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava

Dátum vydania periodickej tlače: marec 2023

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené

Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava

č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

## OBSAH

Jozef D o b o š : Popisná Štatistika s GeoGebrou.....	1
Jindřich B e ě v á ř , Martina B e ě v á ř o v á : Vývoj gymnázií v českých zemích (Stručný nástin s ohledem na matematiku 1. část).....	11
Jozef B e ň u š k a : Balónové vznášadlo na strednej škole.....	22
Aba T e l e k i : Kovariancia vo fyzike – skaláry, vektory, (dokončenie)...	41
SPOMÍNANIE	
Spomienka na vzácného človeka Doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc. by sa v tomto roku dožil 75 rokov (Vojtech Bálint).....	55
Doc. RNDr. Jozef Dravecký, CSc. (Vladimír Toma)...	59
Odišiel výnimočný človek doc. RNDr. Jozef Dravecký, CSc. (Jozef Jarab)	63
Zomrela vedúca osobnosť tzv. Žilinskej školy v matematickej teórii dopravy profesor Pavol Kľuvánek (Štefan Tkačík).....	66
RECENZIA	
Recenzia na knihu Tkačík, Štefan: Osobnosti slovenskej matematiky: Roman Frič .....	69

## CONTENTS

Jozef D o b o š : Descriptive Statistics with GeoGebra .....	1
Jindřich B e ě v á ř , Martina B e ě v á ř o v á : Development of Grammar Schools in the Czech Land (Brief Outline with Regard to Mathematics, Part 1).....	11
Jozef B e ň u š k a : Balloon Hovercraft Treated on Highschool .....	22
Aba T e l e k i : Covariance in Physics – Scalars, Vectors, (final part)....	41
REMEMBRANCE	
Memory of a Precious Person Doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc. would have Lived to be 75 Years Old This Year (Vojtech Bálint) .....	55
Doc. RNDr. Jozef Dravecký, CSc. (Vladimír Toma)...	59
An extraordinary man doc. RNDr. Jozef Dravecký, CSc. has passed away (Jozef Jarab) .....	63
The Leading Personality of the Mathematical Theory of Transport in Žilina, Professor Pavol Kľuvánek has Passed Away (Štefan Tkačík) .....	66
REVIEW	
Review of the book Tkačík, Štefan: Personalities of Slovak Mathematics: Roman Frič .....	69