

OBZORY

4/2022 (51)

*MATEMATIKY
FYZIKY a
INFORMATIKY*

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2022 ročník 51

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 4/2022 Volume 51

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: Štefan Znám, Beloslav Riečan et Daniel Klvanec

Editors in Chief: Jozef D o b o š (Mathematics and Computer Sciences)
Daniel K l u v a n e c (Physics)

International Editorial Board:

Anatolij D v u r e č e n s k i j (Slovakia)	Štefan L u b y (Slovakia)
Gábor G a l a m b o s (Hungary)	László N á n a i (Hungary)
Juraj H r o m k o v i č (Switzerland)	Adam P l o c k i (Poland)
Hans J o r d e n s (Netherland)	Zdeněk P ů l p á n (Czech republic)
Martin K a l i n a (Slovakia)	Ladislav Emanuel R o t h (USA)

Executive Editors: Štefan T k a č i k (Mathematics and Computer Sciences)
Aba T e l e k i (Physics)

Editorial Board:

Mathematics and Computer Sciences:

Katarína Bachratá	Zbyněk Kubáček	Peter Maličský	Iveta Scholtzová
Vojtech Bálint	Jozef Kuzma	Mariana Marčoková	Milan Turčáni
Jozef Fulier	Ladislav Kvasz	Milan Matejdes	Peter Vrábel
	Tomáš Lengyelfalusy	Martin Papčo	

Physics:

Jozef Beňuška	Stanislav Holec	Viera Lapitková	Vladimír Šebeň
Ivo Čáp	Anna Jankovychová	Milan Noga	Boris Tomášik
Ivan Červeň	Zuzana Ješková	Endre Szabó	Bohumil Vybíral

Reviewers:

Mathematics and Computer Sciences:

Ružena Blašková	Jaroslava Mikulecká	Štefan Solčan
Radoslav Harman	Martin Papčo	Marián Trenkler
Mária Kmeťová	Iveta Scholtzová	Dušan Vallo

Physics:

Peter Demkanin	Peter Hanisko	Marián Kíreš	Arnold Pompoš
Jozef Hanč	Ján Klíma	Miroslava Ožvoldová	Mária Rakovská

O troch významoch znaku mínus

Jozef Doboš

Abstract [On three meanings of minus sign]: In this article, we want to point out the three meanings of the minus sign and the different ways of marking them in the literature.

Key words: negative numbers, opposite of a number, subtraction

Súhrn: V tomto článku chceme poukázať na tri významy znaku mínus a na rôzne spôsoby ich označovania v literatúre.

Kľúčové slová: záporné čísla, opačné číslo, odčítanie

MESC: 97A80, 97A30.

Úvod

Začneme citátom z príručky [9], str. 15:

„Znak alebo znaménko $-$ má v matematike tri rôzne významy.

- Pred číslom zapsaným číslicami znamená znak $-$, že dané číslo je záporné, např. -7 .
- Pred číslom zapsaným písmenom znamená znak $-$, že jde o číslo opačné, např. $-a$ je opačné k číslu a , ale $-\pi$ znamená záporné číslo.
- Znak $-$ znamená početní výkon, tj. odčítání.“

Podobne, v učebnici [11] na str. 44 sa píše (voľný preklad):

„Znamienko mínus môže znamenať tri rôzne veci, v závislosti od kontextu.

- Môže označovať záporné číslo. Pred kladným číslom, a iba tam, znamená záporné číslo. Príklad: -2 môže znamenať mínus 2.
- Môže označovať opačné číslo. Číslo opačné k danému číslu je také číslo, ktoré keď pripočítate k danému číslu, dostanete nulu. Príklad: -2 je opačné číslo k číslu 2, čo je v tomto prípade číslo mínus 2, pretože $2 + -2 = 0$. Podobne $-x$ je opačné číslo k číslu x , teda $x + -x = 0$.
- Môže to znamenať odčítanie. Medzi dvoma výrazmi to znamená odčítať druhý výraz od prvého. Napríklad $x - 3$ znamená odčítať 3 od x .

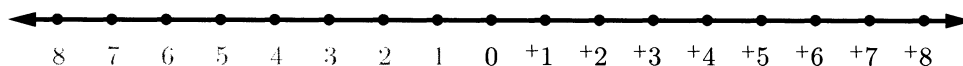
V tejto knihe bude znamienko mínus, ktoré znamená záporný alebo opačný, menšie ako znamienko pre odčítanie. Pri písaní rukou to nie je potrebné. Niektoré kalkulačky

však používajú rôzne klávesy pre tieto dva významy: $\boxed{-}$ pre odčítanie a $\boxed{(-)}$ alebo $\boxed{+/-}$ pre záporné a opačné čísla.“

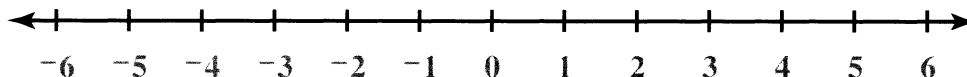
Na druhej strane, na Wikipédii¹ sa píše (voľný preklad):

„Niektorí učitelia základných škôl používajú pred číslami znamienka plus a mínus umiestnené vyššie, aby ukázali, že ide o kladné alebo záporné čísla. Napríklad odčítanie čísla -5 od čísla 3 sa zapíše v tvare $3 - ^{-}5$, čo sa prevedie do tvaru $3 + 5 = 8$, alebo sa dokonca zapíše v tvare $^+3 - ^{-}5$, čo sa prevedie do tvaru $^+3 + ^+5$, čo je rovné $+8$.“

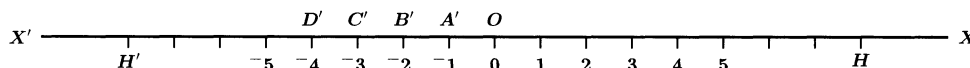
Tak je to napr. v učebnici [4] na strane 178 z roku 1985, odkiaľ sme prevzali nasledujúcu ukážku:



Podobne, v učebnici [6] na strane 144 z roku 2004 môžeme vidieť takúto ilustráciu:



Týmto spôsobom sú označované záporné čísla aj v učebnici [10] (str. 79) z roku 1900. Sken z tejto učebnice, ktorý sa nachádza v článku [7], znázorňuje číselnú os v nasledujúcom tvare:



Niektoré učebnice (napísané vo francúzštine) jasne rozlišujú medzi mínusom ako binárnym symbolom na odčítanie a mínusom ako unárnym symbolom na získanie opačného čísla (pozri [3]). Pritom opačné číslo k číslu x sa označuje $\text{opp}(x)$. V učebnici [2] na str. 21 je uvedené pravidlo, že odčítanie je pripočítanie opačného čísla, v tvare

$$a - b = a + \text{opp}(b).$$

V knihe [8] sa kladie dôraz na zavedenie záporných celých čísel ako nových čísel, ktoré budú koreňmi rovnice $a + x = c$ v prípade, keď $c < a$. Každé prirodzené číslo a

¹http://en.wikipedia.org/wiki/Plus_and_minus_signs

potom bude mať „partnera“ \hat{a} s vlastnosťou

$$a + \hat{a} = 0.$$

Takto sa množina prirodzených čísel rozširuje do radu

$$\dots \hat{4}, \hat{3}, \hat{2}, \hat{1}, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Autori článku [5] idú ešte ďalej. Uvádzajú nasledujúci výraz, v ktorom sa stretávajú všetky tri významy znamienka mínus:

$$-(-3) - 2.$$

Pritom dôsledne odlišujú tieto tri významy, ako môžeme vidieť na prepise uvedeného výrazu v tvare

$$^{-}\hat{3} - 2.$$

V tomto zápise $\hat{3}$ označuje záporné číslo mínus 3, zatiaľ čo ^{-}a označuje opačné číslo k číslu a . Teda $^{-}\hat{3} = 3$.

V materiáli [1] zverejnenom na internete sa autor podrobne venuje zdôvodneniu rovnosti

$$(40 + 12) - (20 + 5) = (40 - 20) + (12 - 5).$$

Binárne mínus $a - b$ pritom prepisuje do tvaru $a + ^{-}b$. Tiež ukazuje, že platí

$$^{-}a = (^{-}1) \cdot a.$$

Využíva k tomu distributívny zákon:

$$a + (^{-}1) \cdot a = 1 \cdot a + (^{-}1) \cdot a = (1 + ^{-}1) \cdot a = 0 \cdot a = 0.$$

Záver. Ukázali sme rôzne spôsoby, ako možno medzi sebou odlišiť jednotlivé významy znamienka mínus. Použitie striešky, ako v zápise $\hat{3}$, na označenie záporných celých čísel nie je použiteľné pri viacciferných číslach. Okrem toho, svojím tvarom a umiestnením má ďaleko od zaužívaných označení pre znamienko mínus. Pritom strieška sa v matematike používa v úplne iných situáciách. Pre nás neobvykle pôsobí aj označenie $\text{opp}(x)$ pre opačné číslo k číslu x . Tu by sme dali skôr prednosť spôsobu podľa učebnice [11], kde opačným číslom k číslu x je $-x$. Výraz $-(-3) - 2$ by potom prešiel do tvaru $^{-}(-3) - 2$. Všetky tri znamienka mínus sú si podobné, avšak vieme ich medzi sebou ľahko odlišiť.

Literatúra – References

- [1] Baldwin, J.: What is a minus sign anyway? preprint (2001). <http://homepages.math.uic.edu/~jbaldwin/pub/assoc.ps>
- [2] Barreau, M. et al: Mathématiques, cycle 4, Lycée Français Louis Pasteur, Bogota, Colombie, 2016.
- [3] Borovik, A. V.: Shadows of the Truth: Metamathematics of Elementary Mathematics, American Mathematical Society, 2012.
- [4] Eicholz, R. E. and all: Addison-Wesley Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, 1985.
- [5] Harkin, J. B., Rising, G. R.: Some Psychological and Pedagogical Aspects of Mathematical Symbolism, Educational Studies in Mathematics, Vol. 5, No. 3 (1974), 255–260.
- [6] Impact Mathematics: Algebra and More, Course 1, Student Edition, Glencoe/McGraw-Hill, 2004.
- [7] Maz-Machado, A., Rico-Romero, L.: Negative numbers in the 18th and 19th centuries: phenomenology and representations, Electronic Journal of Research in Educational Psychology, No. 17, Vol. 7 (1) (2009), 537–554.
- [8] McWeeny, R.: Number and Symbols: From Counting to Abstract Algebras, Learning Development Institute, 2007.
- [9] Názvy a značky školské matematiky, Terminologická komise Jednoty čs. matematiků a fyziků, SPN, Praha, 1966.
- [10] Octavio de Toledo, L.: Elementos de aritmética universal. Calculatoria. Madrid, España, Imprenta Fortanet, 1900.
- [11] Wah, A., Picciotto, H.: Algebra: Themes, Concepts, Tools, Creative Publications, Mountain View, California, 1994.

Pod'akovanie: Článok vznikol s podporou grantu KEGA 012UPJŠ-4/2021 *Vývoj digitálnej knižnice interdisciplinárnych STEAM projektov a jej implementácia do informatického, matematického a prírodovedného vzdelávania na stredných školách.*

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta,
Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: jozef.dobos@upjs.sk

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Ústav informatiky SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť

Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť

Katedra fyziky FPV UKF, Trieda A. Hlinku č. 1, 949 74 Nitra
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje

JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2022 ročník 51

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Klivanec
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková, Ivo Klivanec
Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 550 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: december 2022
Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT
Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal “Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences”
 OMFI 4/2022 Volume 51
 is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
 (<http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/>).

OBSAH

Jozef D o b o š : O troch významoch znaku mínus.....	1
Jana H a n u š o v á : Konstruktivistický prístup k žákům matematicky méně zdatným	5
Zadania úloh 72. ročníka Matematickej olympiády(Stanislav Krajčí).....	21
Zadania úloh 38. ročníka Olympiády v informatike (Michal Anderle, Michal Forišek).....	28
Róbert Károly S z a b ó : How can We Teach the History of Physics? Methodological Suggestions from a Hungarian Physics Teacher	40
Aba T e l e k i : Kovariancia vo fyzike – skaláry, vektory, (pokrač.).....	50
Texty úloh 1. kola 64. ročníka Fyzikálnej olympiády (šk. r. 2022-2023) kategórie B,C,D úlohy 5 až 7	62
INFORMÁCIE: SVOČ 2023 (Soňa Čeretková).....	70

CONTENTS

Jozef D o b o š : On Three Meanings of Minus Sign.....	1
Jana H a n u š o v á : A Constructivist Approach to Less Mathematically Able Pupils.....	5
Tasks of the 72 nd Mathematical Olympiad (Stanislav Krajčí).....	21
Tasks of the 38 th Olympiad in Informatics (Michal Anderle, Michal Forišek).....	28
Róbert Károly S z a b ó : How can We Teach the History of Physics? Methodological Suggestions from a Hungarian Physics Teacher.....	40
Aba T e l e k i : Covariance in Physics – Scalars, Vectors, (continued).....	50
Tasks of the First Round of the 64 th Physics Olympiad in School Year 2022-2023 Categories B, C And D tasks from 5 to 7	62
INFORMATION Student's Scientific Activity - SVOČ 2023 (Soňa Čeretková).....	70