OBZORY

4/2021 (50)

MATEMATIKY
FYZIKY a
INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2021 ročník 50

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 4/2021 Volume 50

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: Štefan Znám, Beloslav Riečan et Daniel Kluvanec

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2021 (50)

VZDELÁVANIE V MATEMATIKE A INFORMATIKE

O riešení nerovníc s absolútnou hodnotou

Jozef Doboš

Abstract [On Solving Absolute Value Inequalities]: In this paper, we would like to show how it is possible to solve absolute value inequalities in school Mathematics using method of rationalization.

Key words: solving absolute value inequalities, method of rationalization

Súhrn: V tomto článku chceme ukázať, ako možno riešiť nerovnice s absolútnou hodnotou v školskej matematike metódou racionalizácie.

Kľúčové slová: riešenie nerovníc s absolútnou hodnotou, metóda racionalizácie

MESC: H30

Nerovnice obsahujúce neznámu v absolútnej hodnote žiaci riešia najčastejšie rozdelením definičného oboru nerovnice na intervaly, v ktorých každý z výrazov v absolútnej hodnote nemení znamienko. V každom z týchto intervalov takto dostanú nerovnicu, ktorá už neobsahuje absolútne hodnoty. Každú z nich riešia na príslušnom intervale samostatne a nakoniec urobia zjednotenie takto nájdených riešení. (Pozri napr. [1].) Čitateľom, ktorí si chcú rozšíriť svoje poznatky o riešení nerovníc, odporúčame sériu článkov, ktoré vyšli v roku 2015 v metodickom časopise pre učiteľov. Posledné dva diely sú venované práve nerovniciam s absolútnou hodnotou. Ako tam píše Сергей Алексеевич Шестаков (pozri [2]), vyššie popísaný spôsob riešenia robí žiakom problémy – hlavne vtedy, keď sú absolútne hodnoty vnorené do seba. Takéto úlohy sa však vyskytujú aj v niektorých príručkách, ktoré vydávajú naše univerzity pre uchádzačov o štúdium (pozri napr. [1]).

Cieľom tohto článku je ukázať čitateľom iný spôsob riešenia takýchto nerovníc. Predovšetkým nerovníc s absolútnou hodnotou, ktoré možno previesť do jedného z nasledujúcich tvarov:

$$|f(x)| < g(x), \qquad |f(x)| \leq g(x), \qquad |f(x)| < |g(x)|, \qquad |f(x)| \leq |g(x)|.$$

V podstate pôjde o metódu racionalizácie nerovníc, v ktorej sa daná nerovnica prevedie na racionálnu nerovnicu, prípadne na sústavu racionálnych nerovníc. Silu metódy racionalizácie nerovníc ilustrujeme v závere článku na zložitejšej úlohe, ktorá je iným spôsobom riešená na internete (pozri [3]).

Nerovnice s jednou absolútnou hodnotou

V tejto kapitole budeme používať nasledujúcu vlastnosť absolútnej hodnoty:

$$\text{Pre ľubovoľné reálne čísla } a, b \text{ platí } \begin{cases} |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b, \\ |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b. \end{cases} \tag{1}$$

Príklad 1. Riešme nerovnicu

$$x - |3x - 5| > 0. \tag{2}$$

Riešenie. Nerovnicu (2) najskôr prepíšeme do tvaru $|3x - 5| < x$. Potom podľa (1) je nerovnica (2) ekvivalentná s nasledujúcou sústavou nerovníc:

$$-x < 3x - 5 < x. \tag{3}$$

Každú nerovnicu sústavy (3) riešime samostatne.

$$\begin{aligned} -x &< 3x - 5, & 3x - 5 &< x, \\ 5 &< 4x, & 2x &< 5, \\ \frac{5}{4} &< x, & x &< \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (2) je interval $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{2}\right)$. GeoGebra dáva riešenie v tvare $\left\{\frac{5}{4} < x < \frac{5}{2}\right\}$, čo je skrátená verzia zápisu $\left\{x \in \mathsf{R} \mid \frac{5}{4} < x < \frac{5}{2}\right\}$.

Príklad 2. Riešme nerovnicu

$$x + 4 + |3x - 5| > 0. \tag{4}$$

Riešenie. Reálne číslo x je riešením nerovnice (4) práve vtedy, keď nie je riešením nerovnice

$$x + 4 + |3x - 5| \leq 0. \tag{5}$$

Podľa (1) je nerovnica (5) ekvivalentná s nasledujúcou sústavou nerovníc:

$$x + 4 \leq 3x - 5 \leq -x - 4. \tag{6}$$

Každú z nerovníc sústavy (6) riešime samostatne:

$$\begin{aligned} x + 4 &\leq 3x - 5, & 3x - 5 &\leq -x - 4, \\ 9 &\leq 2x, & 4x &\leq 1, \\ \frac{9}{2} &\leq x, & x &\leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Pretože $\frac{1}{4} < \frac{9}{2}$, také reálne číslo x neexistuje. Teda žiadne reálne číslo x nie je riešením nerovnice (5). Preto každé reálne číslo x je riešením nerovnice (4).

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (4) je množina všetkých reálnych čísel.

Nerovnice s dvomi absolútnymi hodnotami

V tejto kapitole budeme používať nasledujúcu vlastnosť absolútnej hodnoty:

$$\text{Pre ľubovoľné reálne čísla } a,\, b \text{ platí } \begin{cases} |a| < |b| \Leftrightarrow (b-a)(b+a) > 0, \\ |a| \leq |b| \Leftrightarrow (b-a)(b+a) \geq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Príklad 3. Riešme nerovnicu (pozri [1])

$$\left| \frac{2x-1}{x-1} \right| > 2. \tag{8}$$

Riešenie. Výraz na ľavej strane nerovnice (8) nie je definovaný pre $x = 1$.

Odteraz budeme predpokladať, že $x \neq 1$. Potom môžeme prepísať nerovnicu (8) do tvaru

$$|2x-2| < |2x-1|. \tag{9}$$

Podľa (7) môžeme nerovnicu (9) prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} \big((2x-1)-(2x-2)\big)\big((2x-1)+(2x-2)\big) &> 0, \\ 4x-3 &> 0, \\ x &> \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Nakoniec, nesmieme zabudnúť na náš predpoklad $x \neq 1$.

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (8) je množina $\left(\frac{3}{4}; 1\right) \cup (1; \infty)$.
GeoGebra dáva odpoveď v tvare $\left\{ \mathbf{\frac{3}{4} < x < 1, x > 1} \right\}$, čo je skrátená verzia zápisu $\left\{ x \in \mathsf{R} \mid \frac{3}{4} < x < 1 \vee x > 1 \right\}$.

Príklad 4. Riešme nerovnicu (pozri [1])

$$\left| \frac{x^2-5x+4}{x^2-4} \right| \leq 1. \tag{10}$$

Riešenie. Nerovnica (10) je ekvivalentná s nerovnicou

$$|x^2-5x+4| \leq |x^2-4|. \tag{11}$$

Výraz na ľavej strane nerovnice (10) nie je definovaný pre $x = -2$ a $x = 2$. Avšak ani jedno z čísel $x = -2$, $x = 2$ nie je riešením nerovnice (11). Odteraz budeme predpokladať, že $x \neq -2$ a $x \neq 2$. Podľa (7) môžeme nerovnicu (11) prepísať do tvaru

$$\begin{aligned}\big((x^2-4)-(x^2-5x+4)\big)\big((x^2-4)+(x^2-5x+4)\big) &\geq 0,\\ (5x-8)(2x^2-5x) &\geq 0,\\ (5x-8)x(2x-5) &\geq 0. \qquad (12)\end{aligned}$$

Nerovnicu (12) si už môžete vyriešiť samostatne.

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (10) je množina[1] $\left[0; \frac{8}{5}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; \infty\right)$.
GeoGebra dáva odpoveď v tvare $\left\{\mathbf{0 \leq x \leq \frac{8}{5}, x \geq \frac{5}{2}}\right\}$, čo je skrátená verzia zápisu $\left\{x \in \mathsf{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{8}{5} \vee x \geq \frac{5}{2}\right\}$.

Príklad 5. Riešme nerovnicu (pozri [1])

$$|3x-5|+2 < |x+2|. \qquad (13)$$

Riešenie. Všimnime si, že $|3x-5|+2 \geq 2 > 0$ pre každé reálne číslo x. Preto pre ľavú stranu nerovnice (13) platí $|3x-5|+2 = ||3x-5|+2|$. Podľa (7) môžeme nerovnicu (13) prepísať do tvaru

$$\begin{aligned}\big((x+2)-(|3x-5|+2)\big)\big((x+2)+(|3x-5|+2)\big) &> 0,\\ (x-|3x-5|)(x+4+|3x-5|) &> 0. \qquad (14)\end{aligned}$$

V príklade č. 2 sme ukázali, že $x+4+|3x-5| > 0$ pre každé reálne číslo x. Preto nerovnica (14) je ekvivalentná s nerovnicou $x-|3x-5| > 0$. Tú sme už vyriešili v príklade č. 1.

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (13) je interval $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{2}\right)$.

Príklad 6. Riešme nerovnicu (pozri [1])

$$\big||x+2|-5\big| > 3. \qquad (15)$$

Riešenie. Podľa (7) môžeme nerovnicu (15) prepísať do tvaru

$$\begin{aligned}(|x+2|-5-3)(|x+2|-5+3) &> 0,\\ (|x+2|-8)(|x+2|-2) &> 0, \quad \Big/ \cdot (|x+2|+8)\end{aligned}$$

[1]Intervaly označujeme podľa normy STN EN ISO 80000-2.

Pre každé reálne číslo x totiž platí $|x+2|+8>0$.

$$\big((x+2)^2-8^2\big)(|x+2|-2)>0, \quad \Big/ \cdot (|x+2|+2)$$

Pre každé reálne číslo x totiž platí $|x+2|+2>0$.

$$\begin{aligned}(x+2-8)(x+2+8)\big((x+2)^2-2^2\big)&>0,\\ (x-6)(x+10)(x+2-2)(x+2+2)&>0,\\ (x-6)(x+10)x(x+4)&>0.\end{aligned}$$

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (15) je množina

$$(-\infty;-10)\cup(-4;0)\cup(6;\infty).$$

Príklad 7. Riešme nerovnicu (pozri [2])

$$\big||x^2+3x+2|-1\big|\geq 1. \tag{16}$$

Riešenie. Podľa (7) môžeme nerovnicu (16) prepísať do tvaru

$$\begin{aligned}(|x^2+3x+2|-1-1)(|x^2+3x+2|-1+1)&\geq 0,\\ (|x^2+3x+2|-2)|x^2+3x+2|&\geq 0, \quad \Big/ \cdot (|x^2+3x+2|+2)\end{aligned}$$

Pre každé reálne číslo x totiž platí $|x^2+3x+2|+2>0$.

$$\begin{aligned}\big((x^2+3x+2)^2-2^2\big)|x^2+3x+2|&\geq 0,\\ (x^2+3x+2-2)(x^2+3x+2+2)|x^2+3x+2|&\geq 0,\\ x(x+3)(x^2+3x+4)\,|(x+1)(x+2)|&\geq 0, \quad \Big/ \cdot \frac{|(x+1)(x+2)|}{x^2+3x+4}\end{aligned}$$

Pre každé reálne číslo x totiž platí $|(x+1)(x+2)|\geq 0$, $x^2+3x+4>0$.

$$x(x+3)(x+1)^2(x+2)^2\geq 0.$$

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (16) je množina

$$(-\infty;-3]\cup\{-2;-1\}\cup[0;\infty).$$

GeoGebra dáva odpoveď v tvare $\{\mathbf{x=-2,x=-1,x\leq -3,x\geq 0}\}$.

Príklad 8. Riešme nerovnicu (pozri [1])

$$\big||x-2|-3\big|\leq 2x. \tag{17}$$

Riešenie. Výraz na ľavej strane nerovnice (17) nemôže byť záporný. Odtiaľ vyplýva, že ak x je riešením nerovnice (17), potom $2x \geq \big||x-2|-3\big| \geq 0$, čo dáva $x \geq 0$.

Odteraz budeme predpokladať, že $x \geq 0$. Pretože potom $2x = |2x|$, nerovnicu (17) môžeme zapísať v tvare

$$\big||x-2|-3\big| \leq |2x|. \tag{18}$$

Podľa (7) môžeme nerovnicu (18) prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} \big(2x-(|x-2|-3)\big)\big(2x+(|x-2|-3)\big) &\geq 0, \\ (2x+3-|x-2|)(2x-3+|x-2|) &\geq 0, \quad \Big/ \cdot (2x+3+|x-2|) \end{aligned}$$

Za predpokladu $x \geq 0$ totiž platí $2x+3+|x-2| > 0$.

$$\begin{aligned} \big((2x+3)^2-(x-2)^2\big)(2x-3+|x-2|) &\geq 0, \\ (2x+3-x+2)(2x+3+x-2)(2x-3+|x-2|) &\geq 0, \\ (x+5)(3x+1)(2x-3+|x-2|) &\geq 0, \quad \Big/ \cdot \frac{1}{(x+5)(3x+1)} \end{aligned}$$

Za predpokladu $x \geq 0$ totiž platí $x+5 > 0$, $3x+1 > 0$.

$$2x-3+|x-2| \geq 0. \tag{19}$$

Nerovnicu (19) si už môžete vyriešiť samostatne.

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (17) je interval $[1;\infty)$.

Príklad 9. Riešme nerovnicu[2] (pozri [3])

$$\frac{x^3-|3x+2|}{x^3-|3x-2|} > 0. \tag{20}$$

Riešenie. Položme $P(x) = x^3-|3x+2|$. Potom

$$P(x) = \begin{cases} x^3+3x+2, & \text{ak } x \leq -\frac{2}{3}, \\ x^3-3x-2, & \text{ak } x \geq -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Všimnime si, že funkcia $P(x)$ je rastúca na intervale $\big(-\infty;-\frac{2}{3}\big]$, lebo je tam súčtom dvoch rastúcich funkcií $y=x^3$ a $y=3x+2$. Z toho vyplýva, že pre každé reálne

[2] Úloha je vhodná pre matematické krúžky, prípadne pre riešiteľov matematickej olympiády.

číslo $x \le -\frac{2}{3}$ platí $P(x) \le P\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27} < 0$. Tým sme ukázali, že na intervale $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$ funkcia $P(x)$ nadobúda len záporné hodnoty.

Na druhej strane, pre každé $x \ge -\frac{2}{3}$ máme $P(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$. Z toho vyplýva, že na intervale $\left[-\frac{2}{3}; \infty\right)$ má rovnica $P(x) = 0$ jediný koreň $x = 2$. Pritom pre každé $x > 2$ platí $P(x) > 0$ a pre každé $x \in \left[-\frac{2}{3}; 2\right)$ platí $P(x) < 0$.

Tým sme overili, že pre každé reálne číslo x platí:

1. $P(x) < 0$ práve vtedy, keď $x < 2$,
2. $P(x) = 0$ práve vtedy, keď $x = 2$,
3. $P(x) > 0$ práve vtedy, keď $x > 2$.

Z toho vyplýva, že nerovnica (20) je ekvivalentná s nerovnicou

$$\frac{x-2}{x^3 - |3x-2|} > 0. \tag{21}$$

Položme $Q(x) = x^3 - |3x-2|$. Potom

$$Q(x) = \begin{cases} x^3 + 3x - 2, & \text{ak } x \le \frac{2}{3}, \\ x^3 - 3x + 2, & \text{ak } x \ge \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Všimnime si, že funkcia $Q(x)$ je rastúca na intervale $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$, lebo je tam súčtom dvoch rastúcich funkcií $y = x^3$ a $y = 3x - 2$. Avšak, na rozdiel od prípadu s funkciou $P(x)$, tu máme $Q\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} > 0$. Teda rovnica $Q(x) = 0$ môže mať koreň v intervale $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$. Pretože platí $Q(0) = -2 < 0$, rovnica $Q(x) = 0$ má na intervale $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$ práve jeden reálny koreň, ktorý leží medzi číslami $x = 0$ a $x = \frac{2}{3}$. Hľadáme ho v tvare $x = a - b$. Potom platí $x^3 = a^3 - b^3 - 3abx$. Naozaj,

$$x^3 = (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) = a^3 - b^3 - 3abx.$$

Rovnicu $x^3 + 3x - 2 = 0$ prepíšeme do tvaru $x^3 = 2 - 3x$ a porovnáme s vyjadrením $x^3 = a^3 - b^3 - 3abx$. Odtiaľ dostávame sústavu rovníc $a^3 - b^3 = 2$, $ab = 1$. Z rovnice $ab = 1$ vyjadríme $b = 1/a$, čo dosadíme do rovnice $a^3 - b^3 = 2$. Po malej úprave dostaneme kvadratickú rovnicu pre neznámu a^3. Takto nájdeme číslo a. Nakoniec vypočítame číslo $b = 1/a$. Preto jediným reálnym koreňom rovnice $x^3 + 3x - 2 = 0$ je číslo

$$x_0 = a - b = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}.$$

Pretože funkcia $Q(x)$ je rastúca na intervale $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$, pre každé číslo $x < x_0$ platí $Q(x) < 0$ a pre každé číslo $x \in \left(x_0; \frac{2}{3}\right]$ platí $Q(x) > 0$.

Na druhej strane, pre každé $x \ge \frac{2}{3}$ máme $Q(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$. Z toho vyplýva, že na intervale $\left[\frac{2}{3}; \infty\right)$ má rovnica $Q(x) = 0$ jediný koreň $x = 1$. Pritom pre každé číslo $x \in \left[\frac{2}{3}; \infty\right)$, $x \ne 1$ platí $Q(x) > 0$.

Tým sme overili, že pre každé reálne číslo x platí:
1. $Q(x) < 0$ práve vtedy, keď $(x - x_0)(x - 1)^2 < 0$,
2. $Q(x) = 0$ práve vtedy, keď $(x - x_0)(x - 1)^2 = 0$,
3. $Q(x) > 0$ práve vtedy, keď $(x - x_0)(x - 1)^2 > 0$.

Z toho vyplýva, že nerovnica (21) je ekvivalentná s nerovnicou

$$\frac{x-2}{(x-x_0)(x-1)^2} > 0. \tag{22}$$

Nerovnicu (22) si vyriešte samostatne. Treba k tomu využiť fakt, že $x_0 < \frac{2}{3} < 1$.

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (20) je množina
$$\left(-\infty;\ \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\right) \cup (2;\infty).$$
GeoGebra nevie nerovnicu (20) riešiť. Wolfram Alpha dáva odpoveď v tvare

$$x < \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2/3}-1}{\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}}, \qquad x > 2.$$

S nerovnicou (20) sa stretneme pri riešení nasledujúcej logaritmickej nerovnice:

$$x \log_{r(x)} s(x) \geq 0, \text{ kde } r(x) = \log_{|x^2-3|-2}(x^2 - 3|x| + 2), s(x) = \frac{x^3 - |3x+2|}{x^3 - |3x-2|}.$$

Literatúra – References

[1] Peller, F., Šáner, V., Eliáš, J., Pinda, Ľ.: Matematika krok za krokom na EU, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava, 2002.

[2] Шестаков, С.: *Решаем неравенства, 2.3. Неравенства, содержащие переменную под знаком абсолютной величины (модуля). Более сложные неравенства*, Математика. Первое сентября. Методический журнал для учителей математики, 2015, №10 октябрь, 56–60; №11 ноябрь, 56–62.

[3] `https://math.stackexchange.com/questions/2201633/logarithmic-inequality-two-hours`

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/0265/17 *Formatívne hodnotenie vo výučbe prírodných vied, matematiky a informatiky*.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Ústav informatiky SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky FPV UKF, Trieda A. Hlinku č. 1, 949 74 Nitra
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
4/2021 ročník 50

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková
Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 550 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: apríl 2021

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences"
OMFI 4/2021 Volume 50
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

OBSAH

CONTENTS