OBZORY

4/2020 (49)

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2020 ročník 49

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 4/2020 Volume 49

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: Štefan Znám, Beloslav Riečan et Daniel Kluvanec

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2020 (49)

VZDELÁVANIE V MATEMATIKE A INFORMATIKE

Riešenie racionálnych nerovníc metódou intervalov

Jozef Doboš

Abstract [Solving Rational Inequalities using Method of Intervals]: In this paper, we would like to show how it is possible to solve rational inequalities in school Mathematics.

Key words: solving rational inequalities

Súhrn: V tomto článku chceme ukázať, ako možno riešiť racionálne nerovnice v školskej matematike.

Kľúčové slová: riešenie racionálnych nerovníc

MESC: H30

Impulzom pre napísanie tohto článku bol konferenčný príspevok [2], v ktorom začínajúca učiteľka pútavým spôsobom popísala svoje skúsenosti s vyučovaním racionálnych nerovníc. Je poučné uvedomiť si, že ak so žiakmi riešime príliš veľa veľmi podobných úloh, namiesto upevňovania správnych návykov si žiaci môžu vytvárať vlastné zjednodušené postupy, ktoré však nemusia fungovať pri ďalších úlohách.

Naučíme sa používať metódu intervalov pri riešení racionálnych nerovníc, ktoré pre tento účel majú byť zapísané v jednom z nasledujúcich tvarov:

$$\underbrace{\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0,}_{\text{ostré racionálne nerovnice}} \qquad \underbrace{\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0,}_{\text{neostré racionálne nerovnice}} \tag{1}$$

kde $P(x)$ a $Q(x)$ sú mnohočleny premennej x. Pokiaľ daná racionálna nerovnica nie je zapísaná v požadovanom tvare, najskôr ju do takéhoto tvaru upravíme. Pritom používame iba ekvivalentné úpravy.

Úlohu na riešenie neostrej racionálnej nerovnice môžeme rozdeliť na dve alternatívy: na ostrú racionálnu nerovnicu a na racionálnu rovnicu. Pretože

$a \geq b$ práve vtedy, keď $a > b$ alebo $a = b$,

$a \leq b$ práve vtedy, keď $a < b$ alebo $a = b$.

Na záver potom stačí zjednotiť obidva nájdené obory pravdivosti.

Preto sa najskôr zameriame na ostré racionálne nerovnice. Pripomeňme si, že v menovateli zlomku nemôže byť nula. Ak teda číslo x je riešením danej ostrej racionálnej nerovnice, potom platí $Q(x) \neq 0$. Pretože potom $Q^2(x) > 0$, danú ostrú racionálnu nerovnicu môžeme vynásobiť mnohočlenom $Q^2(x)$. Tým prevedieme danú ostrú racionálnu nerovnicu na algebraickú nerovnicu, ktorá je s ňou ekvivalentná:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x)Q(x) > 0; \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x)Q(x) < 0. \tag{2}$$

Pozrime si nasledujúcu ukážku.

Úloha 1. Riešte nerovnicu (pozri [3])

$$2 + \frac{3}{x+1} > \frac{2}{x}. \tag{3}$$

Riešenie. Nerovnicu (3) upravíme do jedného z tvarov uvedených v (1). Najskôr prenesieme výraz z pravej strany na ľavú a potom ľavú stranu upravíme na spoločného menovateľa:

$$\begin{aligned}
2 + \frac{3}{x+1} &> \frac{2}{x}, \\
2 + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x} &> 0, \\
\frac{2x(x+1) + 3x - 2(x+1)}{x(x+1)} &> 0, \\
\frac{2x^2 + 2x + 3x - 2x - 2}{x(x+1)} &> 0, \\
\frac{2x^2 + 3x - 2}{x(x+1)} &> 0. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Vzhľadom na (2) môžeme nerovnicu (4) prepísať do tvaru

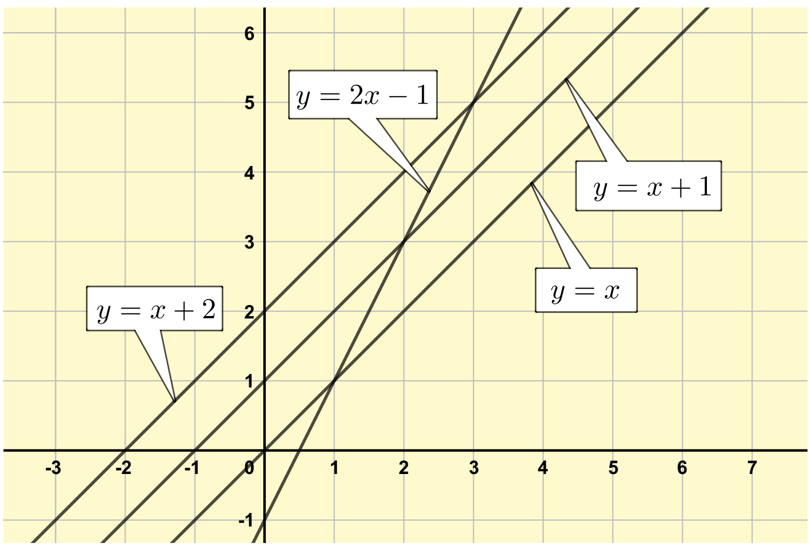
$$x(x+1)(2x^2 + 3x - 2) > 0. \tag{5}$$

Ešte je vhodné rozložiť kvadratický trojčlen $2x^2 + 3x - 2$ na súčin lineárnych dvojčlenov. Nerovnica (5) potom bude mať tvar

$$x(x+1)(x+2)(2x-1) > 0. \tag{6}$$

Nulové body mnohočlena $p(x) = x(x+1)(x+2)(2x-1)$ zrejme sú $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$ a $x = \frac{1}{2}$. Pretože nerovnica (6) je ostrá, žiadne z týchto čísel nie je jej riešením. Môžeme sa o tom presvedčiť aj tak, že urobíme skúšku správnosti. Po dosadení každého z týchto čísel do nerovnice (6) dostaneme nerovnosť $0 > 0$, ktorá zrejme nie je pravdivá.

Každý z lineárnych dvojčlenov v nerovnici (6) je tvaru $kx + q$, kde $k > 0$. Už zo základnej školy vieme, že ak $k > 0$, potom funkcia $y = kx + q$ je rastúca. Nech x_0 je nulový bod tohto lineárneho dvojčlena (t. j. koreň rovnice $kx + q = 0$). Potom tento lineárny dvojčlen nadobúda kladné hodnoty napravo od bodu x_0 a záporné hodnoty naľavo od bodu x_0.



Teraz už máme všetko pripravené na vyriešenie našej nerovnice.

O číslach $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$ a $x = \frac{1}{2}$ už vieme, že žiadne z nich nie je riešením našej nerovnice. Tieto čísla vyčleňujú na reálnej osi intervaly $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; \frac{1}{2})$ a $(\frac{1}{2}; \infty)$.

Najskôr preskúmame interval $(\frac{1}{2}; \infty)$. Všetky čísla z tohto intervalu ležia napravo od všetkých nulových bodov nášho mnohočlena $p(x)$, preto každý z lineárnych dvojčlenov v nerovnici (6) nadobúda v intervale $(\frac{1}{2}; \infty)$ kladné hodnoty. Odtiaľ vyplýva, že každé číslo z intervalu $(\frac{1}{2}; \infty)$ je riešením nerovnice (6).

Teraz sa pozrieme na interval $(0; \frac{1}{2})$. V tomto intervale každý z lineárnych dvojčlenov v nerovnici (6) nadobúda kladné hodnoty, okrem lineárneho dvojčlena $2x - 1$, ktorý tam nadobúda záporné hodnoty. Preto mnohočlen $p(x)$ nadobúda v intervale $(0; \frac{1}{2})$ záporné hodnoty (ako súčin troch kladných hodnôt a jednej zápornej hodnoty). Odtiaľ vyplýva, že žiadne číslo z intervalu $(0; \frac{1}{2})$ nie je riešením nerovnice (6).

Tak isto preskúmame postupne aj intervaly $(-1; 0)$, $(-2; -1)$ a $(-\infty; -2)$. Môžeme si všimnúť, že pri tomto postupe sprava doľava (od jedného intervalu k druhému) práve jeden z lineárnych dvojčlenov mnohočlena $p(x)$ zmení znamienko. Na tom je založený tento skrátený postup: do oboru pravdivosti nerovnice (6) zaradíme najskôr interval, ktorý je najviac vpravo a potom každý druhý interval pri prechode cez číselnú os sprava doľava.

Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (3) je množina

$$M = (-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (\tfrac{1}{2}; \infty).$$

Poznámka. Pri riešení predchádzajúcej úlohy sme tiež zistili, že oborom pravdivosti nerovnice $x(x+1)(x+2)(2x-1) < 0$ je množina $P = (-2, -1) \cup (0; \frac{1}{2})$.

Postup z riešenia úlohy č. 1 môžeme použiť pri riešení racionálnych nerovníc, ktoré vieme upraviť do tvaru

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0, \tag{7}$$

kde $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ vyčleňujú na reálnej osi intervaly $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, …, $(x_n; \infty)$. Potom do oboru pravdivosti nerovnice (7) zaradíme interval, ktorý je najviac vpravo, t.j. interval $(x_n; \infty)$, ako aj každý druhý interval pri prechode cez číselnú os sprava doľava.

Na druhej strane, obor pravdivosti racionálnej nerovnice, ktorú vieme upraviť do tvaru

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) < 0 \tag{8}$$

(kde $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$), tvoria práve tie intervaly, ktoré sme pri riešení nerovnice (7) vynechali. Začneme teda druhým sprava a postupne pridávame každý druhý interval pri prechode cez číselnú os sprava doľava.

V ďalšom sa pozrieme na ostré racionálne nerovnice, ktoré sa nedajú tak priamočiaro upraviť do tvaru (7), resp. (8). Začneme nasledujúcou dôležitou ukážkou.

Úloha 2. Riešte nerovnicu

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + 2x - 15} < 0. \tag{9}$$

Riešenie. Pretože platí $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$, čísla $x = -5$ a $x = 3$ sú koreňmi kvadratického trojčlena $x^2 + 2x - 15$. Teda nemôžu byť riešeniami nerovnice (9). Jednoducho preto, že v menovateli zlomku nemôže byť nula.

Pretože platí $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$, čísla $x = 3$ a $x = 4$ sú koreňmi kvadratického trojčlena $x^2 - 7x + 12$. Ako vidíme, číslo $x = 3$ je zároveň aj koreňom kvadratického trojčlena $x^2 + 2x - 15$. Preto nesmieme zabudnúť, že sme už rozhodli o jeho vylúčení. Môžeme si to potvrdiť aj skúškou správnosti. Po dosadení čísla $x = 3$ do nerovnice (9) dostávame na ľavej strane nedefinovaný výraz $\frac{0}{0}$.

Nerovnicu (9) môžeme prepísať do ekvivalentného tvaru

$$\frac{(x + 5)(x - 3)}{(x - 3)(x - 4)} < 0. \tag{10}$$

Nasledujúci okamih je pre korektné riešenie nerovnice (9) kľúčový. Totiž po vykrátení lineárnym dvojčlenom $x - 3$ dostaneme nerovnicu

$$\frac{x + 5}{x - 4} < 0. \tag{11}$$

Táto však nie je ekvivalentná s nerovnicou (9). Ako sme videli vyššie, číslo $x = 3$ nie je riešením nerovnice (9). Ale je riešením nerovnice (11), o čom sa môžeme presvedčiť skúškou správnosti. V skutočnosti je nerovnica (9) ekvivalentná s nasledujúcou sústavou nerovníc:

$$\begin{cases} x \neq 3, \\ \dfrac{x + 5}{x - 4} < 0. \end{cases}$$

Túto sústavu riešime tak, že nájdeme množinu riešení nerovnice (11) a potom z tejto množiny odstránime číslo $x = 3$. Nerovnicu (11) môžeme riešiť rovnakým spôsobom, ako sme riešili úlohu č. 1. Množinou riešení nerovnice (11) je interval $(-5; 4)$. Z tohto intervalu teraz odstránime číslo $x = 3$, čím dostaneme množinu riešení nerovnice (9).
Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (9) je množina $M = (-5; 3) \cup (3; 4)$.

Veľmi podobný problém budeme riešiť aj v nasledujúcej úlohe.

Úloha 3. Riešte nerovnicu (pozri [3])

$$(x + 1)(x - 3)^2(x - 5)(x - 4)^2(x - 2) < 0. \tag{12}$$

Riešenie. Korene mnohočlena $p(x) = (x+1)(x-3)^2(x-5)(x-4)^2(x-2)$ sú $x = -1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ a $x = 5$. Pretože nerovnica (12) je ostrá, žiadne z týchto čísel nie je jej riešením. Môžeme sa o tom presvedčiť aj tak, že urobíme skúšku správnosti. Po dosadení každého z týchto čísel do nerovnice (12) dostaneme nerovnosť $0 < 0$, ktorá zrejme nie je pravdivá.

Aby sme previedli nerovnicu (12) do tvaru (8), potrebujeme ju predeliť mnohočlenom $(x-3)^2(x-4)^2$. To je možné za predpokladu, že $x \neq 3$ a $x \neq 4$. Totiž, pre každé reálne číslo $x \neq 3$ platí $(x-3)^2 > 0$ a podobne, pre každé reálne číslo $x \neq 4$ platí $(x-4)^2 > 0$. Dostávame tak nerovnicu

$$(x+1)(x-5)(x-2) < 0. \tag{13}$$

Nerovnica (13) však nie je ekvivalentná s nerovnicou (12). Napríklad číslo $x = 3$ je riešením nerovnice (13), ale nie je riešením nerovnice (12). V skutočnosti je nerovnica (12) ekvivalentná so sústavou nerovníc

$$\begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq 4, \\ (x+1)(x-5)(x-2) < 0. \end{cases}$$

Túto sústavu riešime tak, že nájdeme množinu riešení nerovnice (13) a potom z tejto množiny odstránime čísla $x = 3$ a $x = 4$. Oborom pravdivosti nerovnice (13) je množina $(-\infty; -1) \cup (2; 5)$. Z tejto množiny teraz odstránime čísla $x = 3$ a $x = 4$, čím dostaneme množinu riešení nerovnice (12).
Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (12) je množina

$$M = (-\infty, -1) \cup (2; 3) \cup (3; 4) \cup (4; 5).$$

Pripomeňme si, že kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ nemusí mať reálne korene (ak má záporný diskriminant). V takom prípade
pre každé reálne číslo x platí $ax^2 + bx + c > 0$ (ak $c > 0$), resp.
pre každé reálne číslo x platí $ax^2 + bx + c < 0$ (ak $c < 0$).

Tento poznatok môžeme využiť pri riešení nerovníc obsahujúcich takéto kvadratické trojčleny. Ukážeme si to na nasledujúcej úlohe.

Úloha 4. Riešte nerovnicu

$$\frac{1+x^4}{1-x^4} > 0. \tag{14}$$

Riešenie. Pretože $1 - x^4 = (1-x^2)(1+x^2) = (1-x)(1+x)(1+x^2)$, nerovnicu (14) môžeme prepísať do tvaru

$$\frac{1+x^4}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} > 0. \tag{15}$$

Pretože pre každé reálne číslo x platí $1 + x^2 > 0$, nerovnicu (15) môžeme prenásobiť výrazom $1+x^2$. Podobne, pretože pre každé reálne číslo x platí $1+x^4 > 0$, nerovnicu (15) môžeme predeliť výrazom $1 + x^4$. Dostaneme tak nerovnicu

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} > 0,$$

ktorú prenásobíme mnohočlenom $(1 - x)(1 + x)$. Tak dostávame nerovnicu

$$(1-x)(1+x) > 0,$$

ktorú upravíme do tvaru (8) tak, že ju prenásobíme číslom (-1). Dostávame nerovnicu

$$(x-1)(x+1) < 0,$$

ktorej oborom pravdivosti je interval $(-1; 1)$.
Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (14) je interval $I = (-1; 1)$.

Na záver uvedieme na ukážku riešenie jednej neostrej racionálnej nerovnice.

Úloha 5. Riešte nerovnicu

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2+2x-15} \leq 0. \tag{16}$$

Riešenie. Ako sme povedali vyššie, riešenie neostrej racionálnej nerovnice môžeme rozdeliť na dve alternatívy: na ostrú racionálnu nerovnicu a na racionálnu rovnicu.

Ostrú nerovnicu sme vyriešili v úlohe č. 2, preto nám zostáva iba vyriešiť racionálnu rovnicu

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2+2x-15} = 0. \tag{17}$$

Rovnica (17) má jediný reálny koreň $x = 4$. Množinu riešení nerovnice (16) dostaneme tak, že k oboru pravdivosti nerovnice (9) pridáme koreň rovnice (17).
Odpoveď: Oborom pravdivosti nerovnice (16) je množina

$$M = (-5; 3) \cup (3; 4) \cup \{4\} = (-5; 3) \cup (3; 4].$$

Intervaly označujeme podľa normy STN EN ISO 80000-2.
Teda $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.

Viac o metóde intervalov si môžete prečítať v knihe [1], ktorá je voľne dostupná na mojej webstránke.

Literatúra – References

[1] Doboš, J.: Rovnice a nerovnice, Bolchazy-Carducci Publishers, Inc., Wauconda, Illinois 60084 USA, 2003. `http://web.science.upjs.sk/jozefdobos/publikacie/`

[2] Holečková, R.: *Překvapení pro začátečníky*, In: Cesty k matematice II, Sborník konference, Jana Hromadová, Antonín Slavík (ed.), Matfyzpress, Praha, 2016, 42 – 46. `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konference2016/sbornik.pdf`

[3] Peller, F., Šáner, V., Eliáš, J., Pinda, Ľ.: Matematika krok za krokom na EU, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava, 2002.

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/0265/17 Formatívne hodnotenie vo výučbe prírodných vied, matematiky a informatiky.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

ERRÁTA

V príspevku (Obzory matematiky, fyziky a informatiky č. 1/2020, str. 25) Eriky Feckovej Škrabuľákovej *Erupcie pre matematikov* bolo priezvisko jednej z osobností prednášajúcich v uplynulých rokoch na konferencii v Herľanoch uvedené nesprávne. Správne znenie je takéto: *„Nemecko: ... Prof. Dr. M. Lukáčová – Medviďová ...“*

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky FPV UKF, Trieda A. Hlinku č. 1, 949 74 Nitra
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
4/2020 ročník 49

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov.
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková, Ivo Kluvanec
Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 550 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: december 2020

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences"
OMFI 4/2020 Volume 49
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

OBSAH

CONTENTS