OBZORY

2/2020 (49)

MATEMATIKY
FYZIKY a
INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2020 ročník 49

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 2/2020 Volume 49

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2020 (49)

VZDELÁVANIE V MATEMATIKE A INFORMATIKE

Riešenie rovníc graficky

Jozef Doboš

Abstract [Solving Equations Graphically]: In this paper, we would like to show how it is possible to solve equations in school Mathematics graphically.

Key words: solving equations graphically

Súhrn: V tomto článku chceme ukázať, ako možno graficky riešiť rovnice v školskej matematike.

Kľúčové slová: grafické riešenie rovníc

MESC: H30

Úvod

V tomto článku sa pozrieme na to, ako sa v minulosti v školskej matematike riešili rovnice graficky, ako možno dnes využiť na tento účel výpočtovú techniku, ako aj na užitočnosť takéhoto prístupu k hlbšiemu porozumeniu problematike riešenia rovníc.

Grafické riešenie kvadratickej rovnice

Ak chceme zistiť, čo to znamená „riešiť rovnicu graficky“, je vhodné siahnuť po starších učebniciach, ktoré sa používali vtedy, keď ešte osobné počítače neexistovali. Napríklad v učebnici [5] je celý odsek venovaný grafickému riešeniu kvadratickej rovnice, ktorá sa pre tento účel najskôr upraví do tvaru

$$x^2 = kx + q. \tag{1}$$

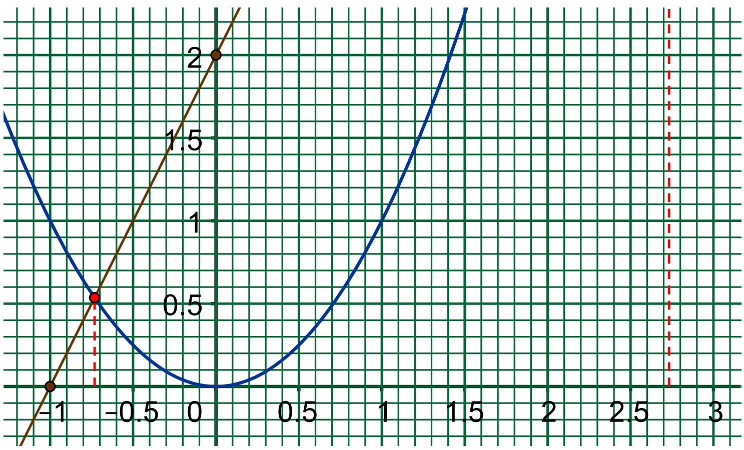
Pri grafickom riešení rovnice (1) postupujeme tak, že na milimetrový papier [1], na ktorom už máme dopredu narysovaný graf funkcie $y = x^2$ (čo najpresnejšie), narysujeme (pomocou pravítka) priamku, ktorá je grafom lineárnej funkcie $y = kx + q$. Korene rovnice (1) potom nájdeme ako x-ové súradnice priesečníkov týchto grafov.

Dnes si takýto milimetrový papier s grafom funkcie $y = x^2$ vieme pripraviť na počítači (napr. v programe GeoGebra). Môže byť súčasťou pracovného listu, v ktorom

[1] `www.freeprintablepdf.eu/en-millimeter-paper-pdf`

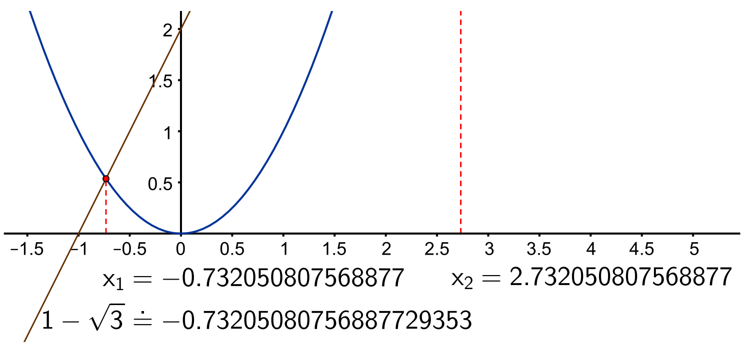
žiaci budú graficky riešiť kvadratické rovnice. Na obr. 1 vidíme výrez z milimetrového papiera, na ktorom sme graficky riešili rovnicu $x^2 = 2x+2$. Najskôr vyznačíme dva body, ktoré ležia na grafe lineárnej funkcie $y = 2x + 2$. Zvolili sme body $[-1, 0]$ a $[0, 2]$, ktoré ležia na súradnicových osiach, vezmeme pravítko a tieto dva body spojíme priamkou. Priesečníky tejto priamky s grafom funkcie $y = x^2$ určujú korene rovnice $x^2 = 2x + 2$. Korene potom odhadneme vizuálne: $-0.75 < x_1 < -0.70$, $2.70 < x_2 < 2.75$. Pre porovnanie, ich presné hodnoty sú:

$$x_1 = 1 - \sqrt{3} \approx -0.732, x_2 = 1 + \sqrt{3} \approx 2.732.$$



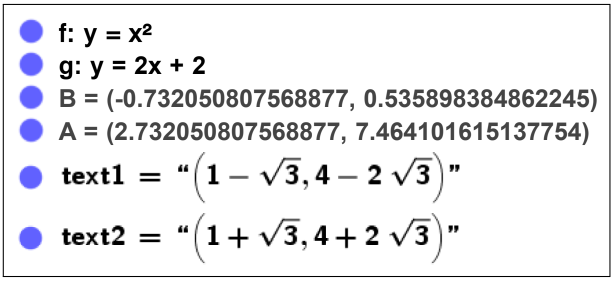
Obrázok 1. Grafické riešenie rovnice $x^2 = 2x + 2$ na milimetrovom papieri.

Dnes môžeme takéto grafické riešenie rovníc simulovať na počítači. Nemusíme sa spoliehať na vizuálny odhad koreňov, pretože GeoGebra nám umožňuje zobraziť súradnice týchto priesečníkov podstatne presnejšie. Môžeme to vidieť na obr. 2.



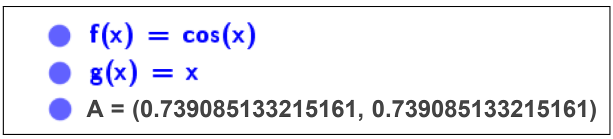
Obrázok 2. Grafické riešenie rovnice $x^2 = 2x + 2$ v programe GeoGebra.

Pomocou nástroja Intersect vyznačíme priesečníky priamky $y = 2x + 2$ a paraboly $y = x^2$. Nastavíme Rounding na 15 desatinných miest. V algebraickom okne sa nám zobrazia súradnice týchto priesečníkov. GeoGebra nám dokonca dovoľuje vyjadriť tieto súradnice pomocou odmocnín. Stačí použiť príkazy SurdText(B) a SurdText(A). Vidíme, že x-ová súradnica priesečníka B je číslo $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ a x-ová súradnica priesečníka A je číslo $x_2 = 1 + \sqrt{3}$, čo sú presné hodnoty koreňov rovnice $x^2 = 2x + 2$ (pozri obr. 3).



Obrázok 3. Použitie príkazov SurdText(B) *a* SurdText(A).

Týmto spôsobom môžeme pomocou programu GeoGebra riešiť aj iné rovnice. Dokonca aj také, ktoré nevieme riešiť analyticky. Napríklad rovnicu $\cos x = x$ (pozri obr. 4).



Obrázok 4. Grafické riešenie rovnice $\cos x = x$.

Pre porovnanie, v programe Wolfram Alpha pomocou príkazu `solve cos(x)=x` dostávame

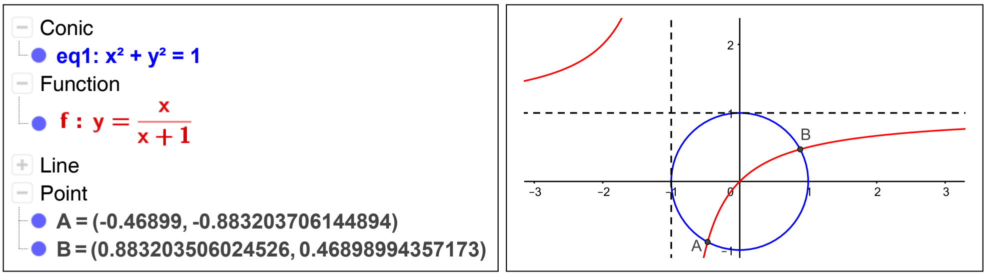
`0.73908513321516064165531208767387340401 34`

Od grafického riešenia k analytickému riešeniu

Teraz si ukážeme, ako nám môže grafické riešenie rovnice pomôcť pri hľadaní jej analytického riešenia. Nasledujúca rovnica (pozri [1] a [3]) môže byť pre začiatočníkov náročná:

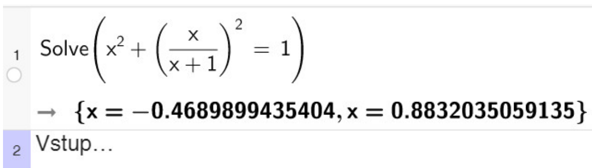
$$x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 1. \tag{2}$$

Položme $y = \frac{x}{x+1}$. Rovnica (2) potom prejde do tvaru $x^2 + y^2 = 1$, čo je rovnica jednotkovej kružnice so stredom v počiatku súradnicového systému. Pretože platí $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$, grafom funkcie $y = \frac{x}{x+1}$ je rovnoosá hyperbola s asymptotami $x = -1$ a $y = 1$. Grafické riešenie v programe GeoGebra môžeme vidieť na obr. 5.



Obrázok 5. Grafické riešenie rovnice (2) *v programe GeoGebra.*

GeoGebra nedokáže analyticky riešiť rovnicu (2) ani v okne počítačovej algebry (CAS), ktoré slúži na symbolické výpočty. Poskytne nám však presnejšie aproximácie koreňov rovnice (2), ako vidíme na obr. 6.



Obrázok 6. Riešenie rovnice (2) *v okne CAS.*

Analyticky riešiť rovnicu (2) dokáže program Wolfram Alpha. Stačí použiť príkaz `solve x^2+(x/(x+1))^2=1 over the reals`, čo dáva

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2} - 1},$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2} - 1}.$$

Prirodzená otázka je, či sa dá k týmto koreňom dopracovať elementárnymi prostriedkami. Skúsili sme dať túto rovnicu vysokoškolákom, študentom matematiky v druhom ročníku bakalárskeho štúdia. Avšak dostali sa iba k nasledujúcej rovnici štvrtého stupňa, s ktorou si už nedokázali poradiť:

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0. \tag{3}$$

Na riešenie rovnice (3) použijeme metódu, ktorú sa učili žiaci gymnázií pred 200 rokmi. Môžeme sa o tom presvedčiť nahliadnutím do učebnice [2], kde je príslušný postup pekne metodicky spracovaný. V podstate ide o metódu neurčitých koeficientov. Budeme riešiť rovnicu

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{4}$$

jej úpravou do tvaru

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0. \tag{5}$$

Potom už bude ľahké rozložiť ľavú stranu rovnice (5) na súčin dvoch kvadratických trojčlenov s využitím vzorca $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Rovnica (3) je špeciálnym prípadom rovnice (4), kde $a = 2$, $b = 1$, $c = -2$, $d = -1$. Preto dosadíme $a = 2$ do rovnice (5), čím dostávame

$$(x^2 + x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0. \tag{6}$$

Hľadáme reálne čísla p, q, r. Z rovnice (6) po malých úpravách dostávame

$$x^4 + 2x^3 + (2p - q^2 + 1)x^2 + (2p - 2qr)x + p^2 - r^2 = 0. \tag{7}$$

Porovnaním koeficientov pri jednotlivých mocninách premennej x v rovniciach (7) a (3) dostávame nasledujúcu sústavu rovníc:

$$\left.\begin{aligned} 2p - q^2 + 1 &= 1,\\ 2p - 2qr &= -2,\\ p^2 - r^2 &= -1. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Sústavu (8) prepíšeme do tvaru

$$\left.\begin{aligned} q^2 &= 2p,\\ qr &= p + 1,\\ r^2 &= p^2 + 1. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Druhú rovnicu sústavy (9) umocníme na druhú. Tým dostávame rovnicu $q^2r^2 = (p+1)^2$, ktorej ľavú stranu upravíme s využitím prvej a tretej rovnice sústavy (9). Tým vznikne rovnica $2p(p^2 + 1) = (p + 1)^2$, ktorú upravíme do tvaru

$$p^2(2p - 1) = 1. \tag{10}$$

Najskôr sa pozrieme, či táto rovnica nemá celočíselné korene. Ak celé číslo p je koreňom rovnice (10), potom číslo p^2 musí byť deliteľom čísla 1, pričom musí platiť $2p-1>0$. Odtiaľ dostávame $p=1$. Dosadením do rovnice (10) sa presvedčíme, že číslo $p=1$ je naozaj jej koreňom. Toto číslo teraz dosadíme do sústavy (9), čo dáva $q^2=2$, $qr=2$, $r^2=2$. Z prvých dvoch rovníc máme $q=r$. Pretože $p=1$, $q=r$ a $r^2=2$, z rovnice (6) postupne dostávame

$$\begin{aligned}(x^2+x+1)^2-(rx+r)^2&=0,\\(x^2+x+1)^2-r^2(x+1)^2&=0,\\(x^2+x+1)^2-2(x+1)^2&=0.\end{aligned}\tag{11}$$

Už stačí iba rozložiť ľavú stranu rovnice (11) na súčin dvoch kvadratických trojčlenov s využitím vzorca $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. Rovnica (11) sa rozpadne na dve kvadratické rovnice, ktoré už vieme riešiť. To už zvládnete sami.

Teraz príde (možno) malé prekvapenie. K tomu je potrebné vrátiť sa úplne na začiatok, k rovnici (2). Ide o doplnenie na štvorec, konkrétne o použitie vzorca $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

$$\begin{aligned}x^2+(\tfrac{x}{x+1})^2&=1,\\(x-\tfrac{x}{x+1})^2&=1-\tfrac{2x^2}{x+1},\\(\tfrac{x^2}{x+1})^2&=1-\tfrac{2x^2}{x+1}.\end{aligned}\tag{12}$$

Substitúciou $t=\frac{x^2}{x+1}$ prevedieme rovnicu (12) na kvadratickú rovnicu. To už zvládnete sami.

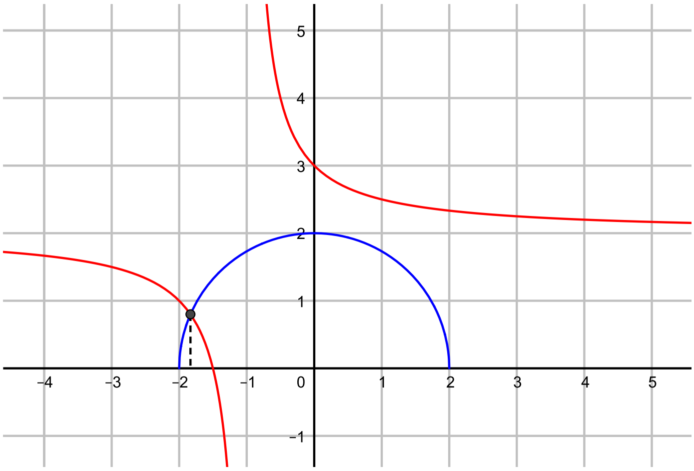
Podobná, ale zložitejšia rovnica sa rieši graficky v článkoch [9] a [10]. Konkrétne, ide o rovnicu

$$\sqrt{4-x^2}=\tfrac{1}{x+1}+2.\tag{13}$$

Grafom funkcie $y=\sqrt{4-x^2}$ je polkružnica, grafom funkcie $y=\frac{1}{x+1}+2$ je hyperbola. Rovnicu (13) môžeme riešiť graficky v programe Geogebra (pozri obr. 7).

GeoGebra nedokáže analyticky riešiť rovnicu (13) ani v okne počítačovej algebry (CAS). Poskytne nám však presnejšiu aproximáciu koreňa, ako môžeme vidieť v nasledujúcej tabuľke:

GeoGebra, grafické riešenie	`-1.833147236250533`
GeoGebra, riešenie v okne CAS	`-1.833147236558`
Wolfram Alpha	`-1.8331472365575115579331535`



Obrázok 7. Grafické riešenie rovnice (13).

Analytické riešenie nám poskytne až Wolfram Alpha:

$$x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{3}{1+\sqrt[3]{271-6\sqrt{633}}+\sqrt[3]{271+6\sqrt{633}}}}}-$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{271-6\sqrt{633}}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{271+6\sqrt{633}}+\right.}$$
$$\left.8\sqrt{\frac{3}{1+\sqrt[3]{271-6\sqrt{633}}+\sqrt[3]{271+6\sqrt{633}}}}\right)$$

K tomuto analytickému riešeniu rovnice (13) sa môžeme dopracovať podobným spôsobom, ako pri rovnici (2). Najskôr prevedieme rovnicu (13) do tvaru

$$x^4+2x^3+x^2+4x+5=0, \tag{14}$$

ktorú riešime metódou neurčitých koeficientov, t.j. snažíme sa upraviť rovnicu (13) do tvaru (5). Tak dostávame sústavu rovníc

$$\left.\begin{aligned} 2p-q^2+1&=1,\\ 2p-2qr&=4,\\ p^2-r^2&=5, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

ktorá nás privedie k nasledujúcej kubickej rovnici

$$2p^3 - p^2 - 6p - 4 = 0,$$

ktorá má jediný reálny koreň

$$p = \frac{1}{6}\left(1 + \sqrt[3]{271 - 6\sqrt{633}} + \sqrt[3]{271 + 6\sqrt{633}}\right).$$

K tomu si však treba naštudovať riešenie rovníc tretieho stupňa, čo je tiež pekne vysvetlené v učebnici [2]. Koreň rovnice (13) potom môžeme nájsť riešením nasledujúcej kvadratickej rovnice:

$$x^2 + \left(1 + \sqrt{2p}\right)x + p + \sqrt{p^2 - 5} = 0.$$

Grafické riešenie rovníc v zahraničných učebniciach

Tejto problematike sa v poslednej dobe venuje zvýšená pozornosť v zahraničí. Súvisí to s rozvojom informačných technológií a ich používaním v školskej matematike. Nasledujúce porovnanie algebraického a grafického spôsobu riešenia rovníc sme prevzali z učebnice [6]:

metóda riešenia	*výhody*	*možné nevýhody*
algebraická	Dáva exaktné riešenia. Najjednoduchšia metóda pre väčšinu lineárnych a kvadratických rovníc.	Môže byť ťažké alebo nemožné ju použiť pri zložitých rovniciach.
grafická	Funguje dobre pre veľa rozličných typov rovníc. Poskytuje vizuálny obraz o lokalizácii riešení.	Riešenia môžu byť často iba približné. Nájdenie vhodného grafického okna môže zabrať dosť veľa času.

Na ukážku ešte uvedieme niekoľko úloh na grafické riešenie rovníc s využitím informačných technológií, ktoré sme prevzali zo zahraničných učebníc (pozri [4], [6], [7] a [8]):

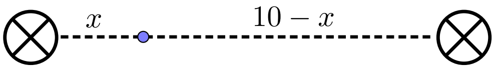
1) $(x+1)(x-3) = \sqrt{x+3}$, **2)** $x + \sqrt[3]{x} + 4 = 0$, **3)** $x^4 + 2^{-x} - 30 = 0$,

4) $x^5 + 5 = 3x^4 + x$, **5)** $10^x - \frac{1}{4}x = 28$, **6)** $x^3 + \cos\left(\frac{x}{3}\right) = 5$,

7) $\log_2(x^3 + x - 1) = 5$, **8)** $2^{x-2} = \log x^4$, **9)** $2^x - x^2 = x$.

10) Dva zdroje svetla sú od seba vzdialené $10\,\mathrm{m}$. Jeden je trikrát intenzívnejší ako druhý. Intenzita svetla[2] (v luxoch) v bode x metrov od slabšieho zdroja je daná vzťahom

$$L = \frac{10}{x^2} + \frac{30}{(10-x)^2}.$$



Nájdite body, v ktorých je intenzita svetla $L = 4$ luxy.

Záver

Grafické riešenie rovníc sa ukazuje ako vhodný materiál pri využívaní informačných technológií vo vyučovaní matematiky. Ak však chceme naplno využiť ich potenciál, musíme venovať zvýšenú pozornosť výberu vhodných úloh, na ktorých môžeme ukázať žiakom na jednej strane, ako sa nám rozšíri spektrum úloh, ktoré môžeme týmto spôsobom riešiť, ale na druhej strane aj ako môže použite informačných technológií ovplyvniť rozvoj ich matematických kompetencií.

L i t e r a t ú r a – R e f e r e n c e s

[1] Arcavi, A., Drijvers, P., Stacey, K.: The Learning and Teaching of Algebra. Ideas, Insight and Activities, Routledge, 2017.

[2] Фусс, Н. И.: Начальные основания чистой математики. Часть 1. Содержащая начальные основания алгебры, Санктпетербургъ, 1820.

[3] Guzmán Ozámiz, M. de: Para Pensar Mejor. Desarrollo de la Creatividad a Través de los Procesos Matemáticos, Pirámide, Madrid, 1995.

[4] Haese, M., Humphries, M., Sangwin, Ch., Vo, N.: Mathematics: Core Topics HL, for use with IB Diploma Programme, Haese & Harris Publications, 2019.

[5] Holubář, J., Hradecký, F., Hruša, K., Kasková, E., Kolibiar, M., Krňan, F.: Algebra pre 9. – 11. postupný ročník všeobecnovzdelávacích škôl, SPN, Bratislava, 1954.

[6] Hungerford, T. W., Shaw, D. J.: Contemporary Precalculus: A Graphing Approach, Thomson Brooks/Cole, 2009.

[7] Rockswold, G. K.: Essentials of College Algebra with Modeling and Visualization, Addison-Wesley, Pearson Education, 2012.

[8] Stewart, J., Redlin, L., Watson, S.: Precalculus, Mathematics for Calculus, Brooks/Cole Cengage Learning, 2016.

[2] Intenzita svetla je nepriamo úmerná druhej mocnine vzdialenosti od svetelného zdroja.

[9] Tabov, J., Velchev, A.: Computer-aided graphical solving of equations of the form $f(x) = g(x)$, MASSEE International Congress on Mathematics, MICOM 2009, 16 – 20 September 2009, Ohrid, Republic of Macedonia, Proceedings, 183 – 189.
[10] Tabov, J., Velchev, A.: Computer-aided graphical solving of equations of the form $f(x) = g(x)$, Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica), G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy), Issue 20 (2010), 154 – 160.

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/0265/17 *Formatívne hodnotenie vo výučbe prírodných vied, matematiky a informatiky*.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky FPV UKF, Trieda A. Hlinku č. 1, 949 74 Nitra
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
2/2020 ročník 49

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov s finančným prispením
Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková, Ivo Kluvanec
Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 550 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: jún 2020

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal “Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences”
OMFI 2/2020 Volume 49
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

OBSAH

CONTENTS