1/2020 (49)

OBZORY MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2020 ročník 49

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 1/2020 Volume 49

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2020 (49)

VMI ZDELÁVANIE V MATEMATIKE A INFORMATIKE

O exponenciálnych rovniciach

Jozef Doboš

Abstract [On Exponential Equations]: In this paper, we would like to show how it is possible to solve exponential equations in school Mathematics.

Key words: solving exponential equations

Súhrn: V tomto článku chceme ukázať, ako možno riešiť exponenciálne rovnice v školskej matematike.

Kľúčové slová: riešenie exponenciálnych rovníc

MESC: H30

Úvod

Začneme ukážkou niektorých bežných exponenciálnych rovníc:

$$2^{3x-2} = 5, \quad 4^{2x} = 8^{x+1}, \quad 6^{x-3} = 2^x, \quad 2^x + 2^{-x} = 2, \quad 3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0.$$

Ako však definovať exponenciálnu rovnicu? V učebniciach sa namiesto toho stretávame najčastejšie s rôznymi vágnymi formuláciami, ktoré v podstate hovoria toto:

Exponenciálne rovnice spoznáme podľa toho, že majú neznámu v exponente.

Pozri napr. [2], [5], [7], [11], [15], [16], [18], [28], [31], [33], [35], [39].

Výrazne menej učebníc kladie obmedzenia na základ. Napr. v učebnici [34] sa píše: „Equations that involve terms of the form a^x, $a > 0$, $a \neq 1$, are often referred to as *exponential equations*.“[1] Podobne, v učebnici [4] sa píše: „Equations involving exponential functions are called *exponential equations*.“[2] V tomto prípade sú obmedzenia na základ skryté v definícii pojmu exponenciálna funkcia.

Josef Polák ide vo svojej knihe [30] ešte ďalej: „*Exponenciální rovnicí* nazýváme rovnici, ve které je neznámá $x \in \mathsf{R}$ v exponentu nějaké mocniny tvaru a^x, popř. $a^{f(x)}$, kde $a > 0$, $a \neq 1$ je daná konstanta, f je daná polynomická funkce.“

---

[1] Rovnice, ktoré obsahujú členy tvaru a^x, $a > 0$, $a \neq 1$, sa volajú *exponenciálne rovnice*.

[2] Rovnice obsahujúce exponenciálne funkcie sa volajú exponenciálne rovnice.

Otázkou je, kam potom zaradiť (podľa Polákovej definície) nasledujúce rovnice:

$$9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}, \quad 4^{\frac{2}{x}} + 4 = 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}},$$

$$3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162, \quad |x-1|^{\log^2 x - \log x^2} = |x-1|^3.$$

Sú z knihy [29], čo je príručka pre prípravu na prijímacie skúšky z matematiky na Ekonomickú univerzitu, pričom všetky sú tam zaradené v kapitole s názvom *Exponenciálne rovnice*. A je ich tam takých viac.

Poznamenajme, že [30] je už deviate prepracované vydanie Polákovho *Přehledu středoškolské matematiky*. Pritom v prvom vydaní z roku 1972 autor uvádza iba tieto tri typy exponenciálnych rovníc:

1. Základná exponenciálna rovnica typu $a^x = b$, kde $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.
2. Exponenciálna rovnica typu $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, kde $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $f(x)$, $g(x)$ sú dané funkcie.
3. Exponenciálna rovnica typu $F[a^{f(x)}] = 0$, kde $a > 0$, $a \neq 1$, F je daná funkcia argumentu $a^{f(x)}$, $f(x)$ je daná funkcia argumentu x.

Žiadne polynomické funkcie sa pri exponenciálnych rovniciach v tomto prvom vydaní nespomínajú.

Exponenciálne rovnice so záporným základom

V knihe [6], str. 129, sa rieši rovnica

$$(-4)^{2x^2} = (-4)^{5x-2}. \tag{1}$$

Všimnime si, že táto rovnica nie je ekvivalentná s rovnicou

$$(-4)^{2x^2-5x+2} = 1. \tag{2}$$

Naozaj, číslo $x = \frac{1}{2}$ je koreňom rovnice (2), ale nie koreňom rovnice (1).

Pri riešení rovnice (1) využijeme nasledujúcu vlastnosť exponenciálnych výrazov:

$$\text{Ak } a^x = a^y \text{, potom } x = y \ \text{ (v prípade, že } a \neq -1, 0, 1). \tag{3}$$

V tomto tvare je vlastnosť (3) uvedená napríklad v učebnici [1]. Niektorí autori (pozri napr. [39]) uvádzajú túto vlastnosť v odlišnom tvare, kde namiesto implikácie majú ekvivalenciu. To však nie je správne. Ako môžeme vidieť na príklade rovnice (1), nejde o ekvivalentnú úpravu, ale iba o dôsledkovú úpravu. Naozaj, ak x je koreňom rovnice (1), potom podľa vlastnosti (3) je aj koreňom rovnice $2x^2 = 5x - 2$. Avšak číslo $x = \frac{1}{2}$ je koreňom rovnice $2x^2 = 5x - 2$, ale nie je koreňom rovnice (1). Jednoducho preto, že výraz $(-4)^{\frac{1}{2}}$ nie je v stredoškolskej matematike definovaný. Naozaj, ak $a < 0$, potom výraz a^b je definovaný iba vtedy, keď exponent b je celé číslo, pričom $a^b \neq 0$. Ak b je párne, potom $a^b > 0$. Ak b je nepárne, potom $a^b < 0$. Na to si treba dávať pozor hlavne vtedy, keď exponent obsahuje premennú. Napríklad výraz $(-4)^{5x-2}$ má význam len vtedy, keď $5x - 2 = k$, t.j. keď $x = \frac{k+2}{5}$, kde k je ľubovoľné celé číslo. (Pozri [22].)

Rovnicu (1) skúsime tiež riešiť pomocou programu Wolfram Alpha, ktorý nájdeme na adrese `www.wolframalpha.com`. Do príkazového riadku napíšeme:

solve (-4)^(2x^2)=(-4)^(5x-2) over the rationals.

To znamená, že hľadáme korene rovnice (1) v množine racionálnych čísel (the rationals). Wolfram Alpha nám potom zobrazí nasledujúcu odpoveď:

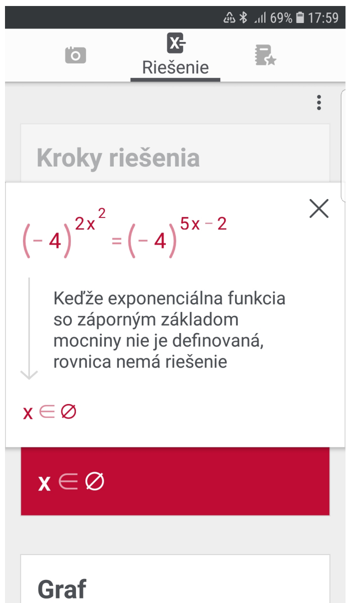
Input Interpretation:

solve	$(-4)^{2x^2} = (-4)^{5x-2}$	over the rationals

Result:

$x = 2$

Keď použijeme Photomath (čo je aplikácia pre smartfón), dozvieme sa, že rovnica (1) nemá riešenie. Zdôvodňuje to tým, že exponenciálna funkcia so záporným základom nie je definovaná. Môžeme to vidieť na obrázku vpravo. Rovnicu (1) tiež skúsime riešiť v programe GeoGebra, v okne počítačovej algebry (CAS). Bez úspechu. Avšak dosadením do rovnice (1) sa môžeme presvedčiť, že číslo $x = 2$ je jej koreňom. Vidíme to na obrázku dole.



1	$(-4)^{2x^2} = (-4)^{5x-2}$ ✓ $(-4)^{2x^2} = (-4)^{5x-2}$
2	Solve($1) → {?}
3	Substitute($1,x = 2) → 65536 = 65536

Je pravda, že v našich učebniciach sa nedefinuje exponenciálna funkcia so záporným základom, ale to nemá žiadny vplyv na to, že číslo $x = 2$ je koreňom rovnice (1), ako sa žiaci môžu presvedčiť skúškou správnosti. Môžeme iba diskutovať o tom, či máme rovnicu (1) pokladať za exponenciálnu rovnicu, alebo nie.

Rovnicu (2) riešime tým istým spôsobom. Pretože $1 = (-4)^0$, podľa vlastnosti (3) dostávame rovnicu $2x^2 - 5x + 2 = 0$, ktorej obidva korene sú aj koreňmi rovnice (2).

Exponenciálne funkcie so záporným základom

V našej učebnici [23] je exponenciálna funkcia definovaná predpisom $y = a^x$, kde základ a je kladné reálne číslo rôzne od 1. Ale napríklad v staršej učebnici [21] sa definuje exponenciálna funkcia pre $a > 0$, teda sa nepožaduje $a \neq 1$. Objavuje sa to až pri pojme exponenciálna krivka, čo je graf funkcie $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

V učebnici [8] autor dokonca uvádza nasledujúce príklady funkcií, ktoré nie sú exponenciálne:

$F(x) = x^2$ — **Premenná je v základe, nie v exponente.**

$G(x) = 1^x$ — **Základ exponenciálnej funkcie musí byť kladná koštanta rôzna od 1.**

$H(x) = (-1)^x$ — **Základ exponenciálnej funkcie musí byť kladná konštanta.**

$J(x) = x^x$ — **Premenná je aj v základe, aj v exponente.**

Z toho vzniká u žiakov miskoncepcia, že exponenciálne výrazy v rovniciach nemôžu mať záporný základ. Podľa autora knihy [6] si tu žiaci zamieňajú význam slovných spojení „nie je definované“ a „nemá zmysel“. Z tohto dôvodu odporúča pri definovaní exponenciálnej funkcie nedávať na číslo a žiadne obmedzenia.

Tento problém si uvedomujú aj niektorí autori učebníc. Napríklad učebnica [38] obsahuje úlohu, v ktorej majú žiaci doplniť nasledujúce tabuľky:

x	4^x	x	3^x	x	$(-9)^x$	x	$(-5)^x$
2		2		2		2	
1		1		1		1	
0		0		0		0	
-1		-1		-1		-1	
-2		-2		-2		-2	

V učebnici [14] je opísaná aktivita, v rámci ktorej žiaci pracujú vo dvojiciach s funkciami $y = (-2)^x$ a $y = (-7)^x$, resp. s funkciami $y = (-6)^x$ a $y = (-5)^x$. Každému žiakovi priradíme jednu z týchto funkcií. V prvom kroku každý žiak vytvára tabuľku hodnôt svojej funkcie so štartovacou hodnotou $x = 2$ a s prírastkom 2. V druhom kroku si medzi sebou porovnávajú vytvorené tabuľky. Snažia sa zistiť čo majú spoločné. V treťom kroku žiaci vytvárajú nové tabuľky, avšak teraz so štartovacou hodnotou $x = 1$ a s prírastkom 2. Znova si medzi sebou porovnávajú vytvorené tabuľky a snažia sa zistiť čo majú spoločné. Vo štvrtom kroku žiaci dopĺňajú správne slová v tejto vete: *Mocnina so záporným základom a* ___?___ *(párnym/nepárnym) exponentom je* ___?___ *(kladná/záporná), zatiaľ čo mocnina so záporným základom a* ___?___ *(párnym/nepárnym) exponentom je* ___?___ *(kladná/záporná).* Táto aktivita ukazuje, že mocniny so záporným základom a prirodzeným exponentom nadobúdajú striedavo kladné a záporné hodnoty. Pre párne exponenty sú to kladné hodnoty, pre nepárne exponenty sú to záporné hodnoty.

Ako definujeme mocniny

A tu je problém. Pretože nemáme k dispozícii jednu definíciu, ale pojem mocniny budujeme postupne v niekoľkých krokoch. Pritom je porušená zásada, že každé rozšírenie definície nejakého pojmu by malo v sebe zahŕňať pôvodnú definíciu. V prípade definície mocniny je totiž možné túto zásadu dodržať iba čiastočne. S postupným rozširovaním definičného oboru pre číslo v exponente dochádza k zužovaniu definičného oboru pre číslo v základe mocniny.

Mocniny s prirodzeným exponentom

Ak a je reálne číslo a $n > 1$ je celé číslo, potom a^n je skrátený zápis súčinu

$$\underbrace{aa\ldots a}_{n},$$

kde n je počet činiteľov. Toto označenie zaviedol René Descartes vo svojej knihe [12] už v roku 1637 (vďaka internetu si dnes môžeme pozrieť aj naskenovaný originál). Thomas Harriot vo svojej knihe [17] z roku 1631 ešte žiadny skrátený zápis nepoužíva, ako môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku:

Æquatio communis *aaa* — 3.*bba* ═══ + 2.*ccc*. in qua *c* > *b*.

Konkrétne ide o všeobecnú rovnicu $a^3 - 3b^2a = 2c^3$ (s neznámou a), v ktorej $c > b$.

Predchádzajúca definícia v skutočnosti nezahŕňa prípad $n = 1$. Museli by sme totiž vysvetliť, čo je to súčin s jedným činiteľom. Korektné je uviesť pre tento prípad samostatnú definíciu: $a^1 = a$. Všimnime si, že už nám neprejde zdôvodnenie, že ide o skrátený zápis. Dokonca ešte aj v 19. storočí matematici bežne používali zápis aa, pretože zápis a^2 im nepripadal ako jeho skrátenie.

V niektorých učebniciach (pozri napr. [3]) autori uvádzajú rekurentnú definíciu:

$$a^1 = a \ \text{ a } \ a^{n+1} = a^n a \ \text{ pre } \ n = 1, 2, 3, \dots$$

Ako to funguje, môžeme vidieť v tabuľke 1. Ďalšiu hodnotu dostaneme z predchádzajúcej jej vynásobením číslom $a = 2$ (postupujeme pritom zhora dole, ako naznačujú šípky).

	n	2^n	
	1	2	
$+1$			$\times 2$
	2	4	
$+1$			$\times 2$
	3	8	
$+1$			$\times 2$
	4	16	
$+1$			$\times 2$
	5	32	
$+1$			$\times 2$
	6	64	
$+1$			$\times 2$
	7	128	
$+1$			$\times 2$
	8	256	

Tabuľka 1

	n	2^n	
	-3	$\frac{1}{8}$	
-1			$:2$
	-2	$\frac{1}{4}$	
-1			$:2$
	-1	$\frac{1}{2}$	
-1			$:2$
	0	1	
-1			$:2$
	1	2	
-1			$:2$
	2	4	
-1			$:2$
	3	8	
-1			$:2$
	4	16	

Tabuľka 2

Mocniny s celočíselným exponentom

Cieľom je rozšíriť definíciu mocniny pre nulu a záporné celé čísla. K tomu je potrebné otočiť smer šípok v tabuľke. Predchádzajúcu hodnotu dostaneme z danej hodnoty jej vydelením číslom $a = 2$. Ako to funguje, môžeme vidieť v tabuľke 2. Takýmto spôsobom sa postupuje v učebnici [24]. Podobne je to aj učebniciach [26] a [27], len tam je na ilustráciu použitý základ $a = 3$.

Môžeme to vyjadriť rekurentne takto:

$$a^1 = a \ \text{ a } \ a^{n-1} = \frac{a^n}{a} \ \text{ pre } n = 1, 0, -1, -2, \dots$$

Teraz názorne vidíme, že tento postup zlyhá pre základ mocniny $a = 0$. Nulou sa totiž deliť nedá. V učebniciach sa štandardne uvádza definícia mocniny s nulovým a záporným celočíselným exponentom v tvare

$$a^0 = 1 \quad \text{a} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{pre } a \neq 0 \quad \text{a} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Z takto formulovanej definície by sa na prvý pohľad mohlo zdať, že nie je dôvod dávať podmienku $a \neq 0$ pri definovaní mocniny s nulovým exponentom. Napriek tomu sa v drvivej väčšine stredoškolských učebníc matematiky explicitne uvádza, že výraz 0^0 nedefinujeme. Vysvetlenie toho ide čiastočne nad rámec stredoškolskej matematiky. Pekne spracovaný materiál na túto tému možno nájsť na internete na adrese `www.askamathematician.com/2010/12`, v odpovedi na otázku: *What does* 0^0 *(zero raised to the zeroth power) equal? Why do mathematicians and high school teachers disagree?*

Mocniny s racionálnym exponentom

Ak exponent x je racionálne číslo, ktoré nie je celým číslom, potom mocninu a^x definujeme predpisom

$$a^x = \sqrt[n]{a^k}, \tag{4}$$

kde $x = \frac{k}{n}$ je vyjadrenie čísla x v tvare zlomku, pričom k, n sú celé čísla, $n > 1$ (ak $n = 1$, potom x je celé číslo). Treba si však uvedomiť, že reprezentácia racionálneho čísla v tvare zlomku nie je jednoznačná. Aby táto definícia bola korektná, musíme ukázať, že výraz $\sqrt[n]{a^k}$ nezávisí od reprezentácie čísla x v tvare zlomku[3]. Otázkou však je, aké obmedzenia z toho vyplývajú pre číslo a.

V našich stredoškolských učebniciach odmocniny zo záporných čísel spravidla nedefinujeme[4]. Párne odmocniny zo záporných čísel sa nedajú definovať bez imaginárnych čísel. Pri nepárnych odmocninách zase narazíme na problém s tým, že nepárna odmocnina v obore reálnych čísel by bola niečo iné ako nepárna odmocnina v obore komplexných čísel. Preto je rozumné požadovať, aby číslo a bolo nezáporné.

Ak celé číslo k je záporné, výraz a^k je definovaný len pre $a \neq 0$. Preto predpisom (4) môžeme definovať mocninu 0^x len pre tie racionálne čísla x (v prípade, keď nie sú celými číslami), pre ktoré $x > 0$. Ak $a > 0$, žiadne obmedzenia pre racionálne čísla x (ktoré nie sú celými číslami) nevznikajú.

---

[3] V niektorých zahraničných učebniciach to riešia požiadavkou, aby zlomok $\frac{k}{n}$ bol v základnom tvare.

[4] Výnimkou je učebnica [23], kde na strane 101 sa definuje nepárna odmocnina z ľubovoľného reálneho čísla. V celej učebnici sa však pracuje iba s odmocninami z kladných čísel. Asi jediným dôvodom pre takéto definovanie odmocniny tak zostáva graf funkcie $y = \sqrt[3]{x}$, ktorý je uvedený na strane 120.

Mocniny s iracionálnym exponentom

Začneme nasledujúcou úlohou z učebnice [10]: Máme zistiť, či existuje také racionálne číslo x, pre ktoré platí $12^x = 7$. Nie je ťažké nahliadnuť, že také racionálne číslo neexistuje. Naozaj, ak by bolo $x = \frac{k}{n}$, kde k a n sú prirodzené čísla, potom rovnicu $12^x = 7$ môžeme prepísať do tvaru $12^k = 7^n$. Na ľavej strane by sme mali párne číslo, kým na pravej strane by sme mali nepárne číslo. To však nie je možné. Je zrejmé, že ani prípad $x = -\frac{k}{n}$ nie je možný.

Vidíme, že potrebujeme rozšíriť pojem mocniny aj pre iracionálne exponenty. V tomto prípade však korektné definovanie mocniny presahuje rámec stredoškolskej matematiky. Teória iracionálnych čísel patrí už do vysokoškolskej matematiky. Žiakom stredných škôl sa to zvykne zdôvodňovať pomocou aproximácie iracionálnych čísel racionálnymi číslami. Ukážeme si to na príklade:
Pretože $\sqrt{2} \doteq 1.414\,213\,562\,373$, platí $1.414\,213\,562 < \sqrt{2} < 1.414\,213\,563$. Potom

$$\left.\begin{array}{l} 3^{1.414\,213\,562} \doteq 4.728\,804\,386 \\ 3^{1.414\,213\,563} \doteq 4.728\,804\,391 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 3^{\sqrt{2}} \doteq 4.728\,804.$$

Ak $a > 0$, žiadne obmedzenia pre iracionálne čísla x nevznikajú. Ak $a = 0$, výraz a^x je definovaný len ak $x > 0$, pričom $0^x = 0$.

Rovnice s neznámou v základe aj v exponente

V tomto odseku nás budú zaujímať rovnice tvaru $f(x)^{\varphi(x)} = g(x)$ (pozri napr. [40]). Pretože budeme používať dôsledkové úpravy, z nájdených koreňov upravenej rovnice musíme vylúčiť tie, ktoré nie sú koreňmi pôvodnej rovnice. K tomu potrebujeme vedieť, že (vzhľadom na to, ako je definovaná mocnina v stredoškolskej matematike) platí

1. $a^b > 0$ v dvoch prípadoch:
   1.1. ak $a > 0$,
   alebo
   1.2. ak $a < 0$ a b je párne celé číslo;
2. $a^b = 0$ len ak $a = 0$ a súčasne $b > 0$;
3. $a^b < 0$ len ak $a < 0$ a b je nepárne celé číslo.

Pri riešení takýchto rovníc budeme používať nasledujúcu dôsledkovú úpravu:

$$f(x)^{\varphi(x)} = g(x) \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)|^{\varphi(x)} = |g(x)|\,, \tag{5}$$

založenú na použití vzorca $\left|a^b\right| = |a|^b$ (pozri napr. [9], str. 250).

V dizertačnej práci [37], ktorá je venovaná riešeniu rovníc v školskej matematike s využitím systémov počítačovej algebry (CAS), je medzi exponenciálne rovnice zaradená aj rovnica:

$$(x-6)^x = 2^x. \tag{6}$$

GeoGebra[5] nájde z troch koreňov rovnice (6) iba dva, konkrétne $x = 0$ a $x = 8$. Pritom aj číslo $x = 4$ je jej koreňom, čo si možno ľahko overiť dosadením. Keď však použijeme dôsledkovú úpravu (5), dostaneme rovnicu

$$|x-6|^x = 2^x. \tag{7}$$

Teraz už GeoGebra nájde všetky tri korene. Odkiaľ však berieme istotu, že rovnica (7) iné korene nemá? Zrejme nemôže byť $|x-6| = 0$, pretože po dosadení $x = 6$ do rovnice (7) dostaneme na ľavej strane $0^6 = 0$ a na pravej strane $2^6 > 0$. Pretože pre každé reálne číslo x platí $2^x > 0$, rovnicu (7) môžeme prepísať do tvaru

$$\left(\frac{|x-6|}{2}\right)^x = 1. \tag{8}$$

Pripomeňme si, že platí

$$a^b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1, \\ b = 0 \text{ a zároveň } a \neq 0, \\ a = -1 \text{ a } b \text{ je párne celé číslo.} \end{cases}$$

Pre rovnicu (8) to znamená, že môžu nastať dve možnosti: buď $\frac{|x-6|}{2} = 1$, alebo $x = 0$ a zároveň $\frac{|x-6|}{2} \neq 0$. Rovnica $\frac{|x-6|}{2} = 1$ má dva korene: $x = 8$ a $x = 4$. Dosadením čísel $x = 0$, $x = 4$ a $x = 8$ do rovnice (7) overíme, že všetky tri sú jej koreňmi.

V článku [13] sa môžeme stretnúť s rovnicou

$$(x-3)^x = 3 - x. \tag{9}$$

Zrejme nemôže byť $x > 3$, pretože na ľavej strane by sme mali kladné číslo a na pravej strane by sme mali záporné číslo. Na druhej strane, číslo $x = 3$ je koreňom rovnice (9), pritom GeoGebra ho nenájde. Ani ako koreň rovnice

$$|x-3|^x = |3-x|. \tag{10}$$

Za predpokladu $x \neq 3$ môžeme rovnicu (10) prepísať do tvaru

$$|x-3|^{x-1} = 1. \tag{11}$$

[5]Version: 6.0.553.0-w (31 July 2019)

Máme dve možnosti: buď $|x-3|=1$, alebo $x-1=0$ a zároveň $|x-3|\neq 0$. Rovnica $|x-3|=1$ má dva korene: $x=4$ a $x=2$. Rovnica $x-1=0$ má koreň $x=1$. Dosadením čísel $x=1$ a $x=2$ do rovnice (9) overíme, že z nich iba $x=2$ je jej koreňom. Rovnica (9) má teda dva korene: $x=2$ a $x=3$.

Rovnice tvaru $(f(x))^{g(x)}=(f(x))^{h(x)}$ sa v knihe [25] volajú *exponenciálno-mocninové rovnice* (Exponential-power Equations, Показательно-степенные уравнения). Na str. 124 – 125 možno nájsť podrobné riešenie rovnice

$$(x^2+x-57)^{3x^2+3}=(x^2+x-57)^{10x}. \tag{12}$$

GeoGebra nevie túto rovnicu riešiť. Wolfram Alpha nenájde koreň $x=7$, ale prehlási za koreň číslo $x=\frac{1}{3}$. Avšak aj keď číslo $x=\frac{1}{3}$ je koreňom rovnice $3x^2+3=10x$, nie je koreňom rovnice (12).

Ukážky podrobných riešení exponenciálno-mocninových rovníc môžeme tiež nájsť na YouTube. Napríklad

$$(x-2)^{x^2+2x}=(x-2)^{11x-20} \qquad \text{(pozri [32])},$$

alebo

$$(x^2-7x+11)^{x^2-13x+42}=1 \qquad \text{(pozri [36])}.$$

Niektoré rovnice tvaru $f(x)^{\varphi(x)}=g(x)$ si vyžadujú použitie vyššej matematiky. Napríklad rovnica

$$2^x=\frac{8x}{6-x}, \tag{13}$$

s ktorou sa môžeme stretnúť v článku [19], príp. [20]. Nie je problém zistiť, že rovnica (13) má korene $x=2$, $x=3$ a $x=4$. Ukážeme, že iné korene nemá. Najskôr upravíme rovnicu (13) do tvaru

$$x\ln 2-\ln x+\ln(6-x)-\ln 8=0. \tag{14}$$

Potom vypočítame deriváciu funkcie $h(x)=x\ln 2-\ln x+\ln(6-x)-\ln 8$. Aby sme zistili jej intervaly monotónnosti. Pretože

$$h'(x)=\frac{x^2\ln 2-6x\ln 2+6}{x(x-6)},$$

rovnica $h'(x)=0$ má dva korene. Ich približné hodnoty sú $x_1 \doteq 2.413\,630\,018\,959$ a $x_2 \doteq 3.586\,369\,981\,041$. Tieto čísla rozdeľujú definičný obor funkcie h na tri intervaly, pričom na každom z nich je funkcia h buď rastúca alebo klesajúca. To znamená, že na každom z nich môže mať rovnica (14) najviac jeden koreň. Tým sme ukázali, že rovnica (14) nemôže mať viac ako tri korene.

Dr. Hrubý vo svojich prácach [19] a [20] odporúča riešiť úlohy na zostavovanie takýchto rovníc s predpísanými koreňmi. Napríklad: Nájdite čísla a, b, c, d tak, aby rovnica $2^x=\frac{ax+b}{cx+d}$ mala korene $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$.

Literatúra – References

[1] Balzarini, E. et al.: Pre-Calculus 12, McGraw-Hill Ryerson, 2012.
[2] Baratto, S., Bergman, B., Hutchison, D.: Elementary and Intermediate Algebra, McGraw-Hill Primis, 2011.
[3] Barnett, R. A. et al.: Precalculus. Graphs and Models, McGraw-Hill, 2009.
[4] Barnett, R. A. et al.: College Algebra, McGraw-Hill, 2011.
[5] Beecher, J. A., Penna, J. A., Bittinger, M. L.: Algebra and Trigonometry, Addison Wesley, 2012.
[6] Бекаревич, А. Н.: Уравнения в школьном курсе математики, Издательство «Народная асвета», Минск, 1968.
[7] Blitzer, R.: College Algebra, Pearson Education, 2004.
[8] Blitzer, R.: Algebra & Trigonometry, Pearson Education, 2007.
[9] Болтянский, В. Г., Сидоров, Ю. В., Шабунин, М. И.: Лекции и задачи по элементарной математике, Наука, Москва, 1974.
[10] Burger, E. B., Starbird, M.: The Heart of Mathematics. An invitation to effective thinking, John Wiley & Sons, Inc., 2010.
[11] Coene, Ch. et al.: Foundations for College Mathematics 12, Pearson Education Canada, 2009.
[12] Descartes, R.: Discours de la methode Pour bien Conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences. Plus la Dioptrique. Les Meteores. Et la Geometrie. Qui sont des essais de cete sic Methode. Leiden, Netherlands, Ian Maire, 1637. `https://archive.org/details/bub_gb_s6lSHDngPFoC/page/n4`
[13] Егоров, А.: Показательные уравнения, Квант 1981, № 1, стр. 40 – 42.
[14] Flanders, J. et al.: UCSMP Advanced Algebra, Chicago, UChicagoSolutions, 2016.
[15] Gantert, A. X.: Algebra 2 and Trigonometry, Amsco School Publications, Inc., 2009.
[16] Gustafson, R. D., Hughes, J.: College Algebra, Cengage Learning, 2012.
[17] Harriot, T.: Artis analyticae praxis, Ad æquationes Algebraïcas nouâ, expeditâ, & generali methodo, resolvendas. Robertum Barker, London, 1631. `https://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/2667286`
[18] Holliday, B. et al.: Algebra 2, Glencoe/McGraw-Hill, 2006.
[19] Hrubý, D.: Zajímavé rovnice, Učitel matematiky, Vol. 11 No. 4 (2003), 251-253.
[20] Hrubý, D.: Zajímavé rovnice a nerovnice, In A. Slavík (ed.). Cesty k matematice, Sborník konference, 25 a 26. září 2014. Matfyzpress, Praha, 2014, 90 – 93.
[21] Kabele, J. a kol.: Matematika pre 2. ročník stredných všeobecnovzdelávacích škôl, SPN, Bratislava, 1966.
[22] Krňan, F., Bartoš, P., Rovan, K.: Algebra pre 1. ročník stredných všeobecnovzdelávacích škôl, SPN, Bratislava, 1963.
[23] Kubáček, Z.: Matematika pre 2. ročník gymnázií a 6. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, druhá časť, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2010.
[24] Lehmann, J.: Elementary Algebra. Graphs & Authentic Applications, Pearson Education, Inc., 2015.

[25] Litvinenko, V., Mordkovich, A.: Solving Problems in Algebra and Trigonometry, Mir Publishers, Moscow, 1987.
[26] Miller, J., O'Neill, M., Hyde, N.: Beginning Algebra, McGraw-Hill, 2008.
[27] Murdock, J., Kamischke, E., Kamischke, E.: Discovering Algebra. An Investigative Approach, Key Curriculum Press, 2007.
[28] Narasimhan, R.: Precalculus. Building Concepts and Connections, Houghton Mifflin Company, 2009.
[29] Peller, F. a kol.: Matematika (krok za krokom na EU), Vydavateľstvo Ekonóm, Bratislava, 2002.
[30] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, Praha, 2008.
[31] Rockswold, G.: Essentials of College Algebra with Modeling & Visualization, Addison Wesley, 2012.
[32] Рожкова, З. И.: Показательно-степенные уравнения. Часть 7. `https://www.youtube.com/watch?v=sd8KjwDnOrg`
[33] Stewart, J., Redlin, L., Watson, S.: Precalculus. Mathematics for Calculus, Brooks/Cole Cengage Learning, 2009.
[34] Sullivan, M.: Algebra & Trigonometry, Pearson Education, Inc., 2008.
[35] Swokowski, E. W., and Cole, J. A.: Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry, Thomson Brooks/Cole, 2008.
[36] Talwalkar, P.: A Math Problem Most Computers Can't Solve, But You Can. `https://www.youtube.com/watch?v=C7A3uFC76G0`
[37] Tõnisson, E.: Differences between Expected Answers and the Answers Offered by Computer Algebra Systems to School Mathematics Equations, Dissertationes Mathematicae Universitatis Tartuensis 122, University of Tartu Press, 2017.
[38] Tussy, A. S., Gustafson, R. D., Koenig, D. R.: Developmental Mathematics for College Students, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
[39] Tussy, A. S., Gustafson, R. D.: Intermediate Algebra, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2013.
[40] Вуколова, Т. М., Потапов, М. К., Шевкин, А. В.: *Об уравнениях вида* $f(x)^{\varphi(x)} = g(x)$, Архимед: научно-методический сборник — 2009. — Вып. 5, стр. 94 – 102.

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/0265/17 Formatívne hodnotenie vo výučbe prírodných vied, matematiky a informatiky.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky FPV UKF, Trieda A. Hlinku č. 1, 949 74 Nitra
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
1/2020 ročník 49

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov s finančným prispením
Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková, Ivo Kluvanec
Správca www.omfi.ukf.sk: Martin Drlík
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 550 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: jún 2020

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal “Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences”
OMFI 1/2020 Volume 49
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/)

OBSAH

CONTENTS