OBZORY

3/2019 (48)

MATEMATIKY
FYZIKY a
INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2019 ročník 48

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 3/2019 Volume 48

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2019 (48)

GeoGebra a rovnice

Jozef Doboš

Abstract [GeoGebra and Equations]: In this paper, we would like to show how it is possible to use GeoGebra for solving equations and inequalities in school Mathematics.

Key words: GeoGebra, solving equations

Súhrn: V článku chceme ukázať, ako možno používať program GeoGebra pri riešení rovníc a nerovníc v školskej matematike.

Kľúčové slová: GeoGebra, riešenie rovníc

MESC: 97U70.

Úvod

GeoGebra disponuje oknom počítačovej algebry[1] (CAS view), v ktorom môžeme (okrem iného) riešiť rovnice/nerovnice a ich sústavy. Pri príprave tohto článku bola použitá GeoGebra Classic 6.0.536.0 (01 May 2019). Ako referenčný nástroj použijeme Wolfram Alpha, dostupný na adrese `www.wolframalpha.com`. Ide totiž pravdepodobne o najlepší voľne dostupný CAS systém. Či už z hľadiska spoľahlivosti pri riešení matematických úloh, alebo z hľadiska zrozumiteľnosti poskytovaných výstupov. Ako uvidíme v článku, GeoGebra v týchto ukazovateľoch zaostáva. Použitiu Wolfram Alpha pri výuke matematiky je venovaný článok [2].

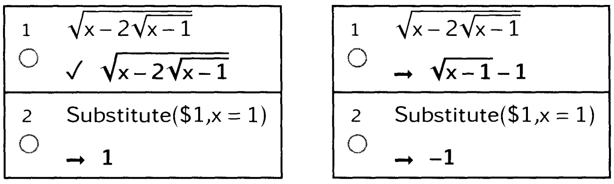
Vkladanie matematických výrazov v programe GeoGebra, ako aj príkazov na manipuláciu s takýmito výrazmi, prebieha v jednotlivých bunkách. Tieto bunky sú číslované, čo nám umožňuje odvolávať sa na ich obsah. Napríklad na obr. 2 máme v bunke č. 2 príkaz Solve($1), t. j. príkaz na riešenie rovnice uloženej v bunke č. 1. Každá bunka má dve časti: horný riadok pre vstup a spodný riadok pre výstup. Do vstupného riadku napíšeme požadovaný výraz/príkaz, pričom môžeme použiť virtuálnu klávesnicu. Na hornej lište máme k dispozícii panel nástrojov, ktorý vidíme na obrázku 2. GeoGebra nám tu ponúka tri rôzne nástroje na vyhodnotenie nášho vstupu:

---

[1] Počítačové algebraické systémy (CAS – Computer algebra system) nám umožňujú realizovať symbolické matematické výpočty.

$\boxed{=}$ – Symbolic Evaluation – prevedie symbolické úpravy,
$\boxed{\approx}$ – Numeric Evaluation – prevedie numerické výpočty,
$\boxed{\checkmark}$ – Keep Input – vkladá vstup bez úprav.

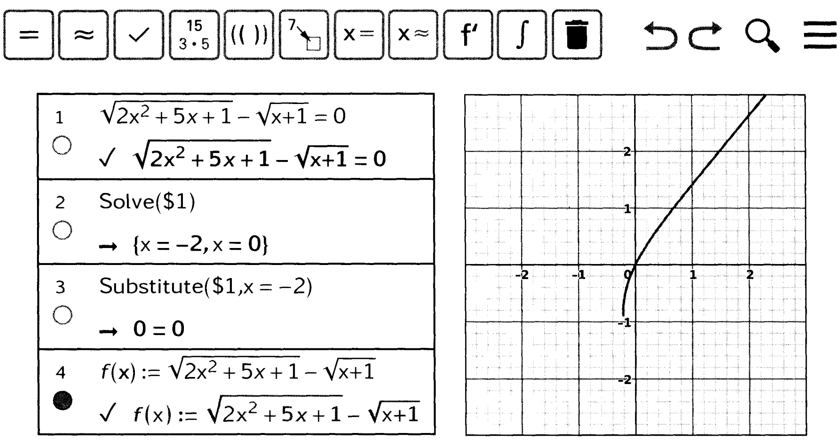
Keep Input sa použije vtedy, keď chceme zabrániť automatickému zjednodušeniu matematického výrazu. Keď napríklad použijeme Symbolic Evaluation na výraz $\frac{x}{x}$, GeoGebra ho zjednoduší na 1. Avšak rozdiel medzi použitím Keep Input a Symbolic Evaluation nemusí byť na prvý pohľad zrejmý. Ilustráciu vidieť napr. na obrázku č. 1.



Obrázok 1

Našou prvou ukážkou je riešenie iracionálnej rovnice

$$\sqrt{2x^2 + 5x + 1} - \sqrt{x + 1} = 0. \tag{1}$$



Obrázok 2

Ako vidieť na obr. 2 (bunka č. 2), keď použijeme Symbolic Evaluation na príkaz Solve($1), dostaneme zoznam koreňov rovnice (1). V bunke č. 3 prevedieme skúšku správnosti pre číslo $x = -2$ príkazom Substitute($1,x=-2). Skúška správnosti vyšla. Že tu niečo nesedí, zistíme z grafu funkcie $f(x) = \sqrt{2x^2 + 5x + 1} - \sqrt{x + 1}$. Ten pretína x-ovú os iba v jednom bode. Rovnica (1) teda nemôže mať dva reálne korene.

Pretože pod druhou odmocninou nemôže byť záporné číslo, číslo -2 nepatrí do definičného oboru rovnice (1). Tak to učíme žiakov na strednej škole. Ale GeoGebra pripúšťa aj záporné čísla pod druhou odmocninou. Robia to tak aj iné programy, napríklad komerčný Maple. Systémy CAS spravidla počítajú hlavnú hodnotu odmocniny komplexného čísla (principal root). Ak nenulové komplexné číslo z máme vyjadrené v goniometrickom tvare $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, kde $-\pi < \theta \le \pi$, potom hlavnou hodnotou n-tej odmocniny zo z je komplexné číslo $w_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right)$.

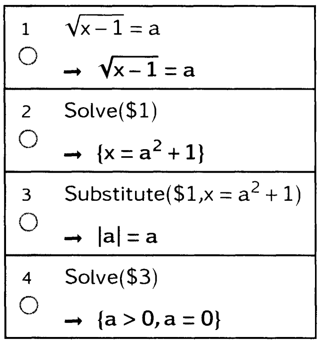
Ak chceme, aby program GeoGebra riešil rovnicu (1) tak, ako sa to očakáva v školskej matematike, musíme vziať do úvahy jej definičný obor. Stačí, keď v bunke č. 2 namiesto Solve($1) napíšeme Solve({$1,2x^2+5x+1>=0,x+1>=0}). Tým vlastne riešime zmiešanú sústavu: jednu rovnicu a dve nerovnice, ktoré určujú definičný obor tejto rovnice.

V programe Wolfram Alpha riešime rovnicu (1) príkazom

solve sqrt(2x^2+5x+1)-sqrt(x+1)=0 over the reals.

Pozor si treba dávať pri rovniciach s parametrom. GeoGebra totiž nerobí diskusiu vzhľadom na parameter. Ukážeme si to na riešení nasledujúcej iracionálnej rovnice s neznámou x a parametrom a.

$$\sqrt{x-1} = a. \tag{2}$$



Obrázok 3

GeoGebra sa nás pokúša presvedčiť, že rovnica (2) má koreň $x = a^2 + 1$. Avšak po dosadení $x = a^2 + 1$ do rovnice (2) dostávame $|a| = a$. Teraz už stačí vyriešiť rovnicu $|a| = a$ s neznámou a. Zistili sme, že číslo $x = a^2+1$ je koreňom rovnice (2) práve vtedy, keď $a \ge 0$. Diskusiu vzhľadom na parameter sme si museli urobiť sami.

Rovnicu (2) riešime v programe Wolfram Alpha príkazom

solve sqrt(x-1)=a over the reals.

Dostaneme aj diskusiu vzhľadom na parameter (Result: $x = a^2 + 1$ and $a \ge 0$).

Odlišný postup zvolíme pri riešení nasledujúcej racionálnej rovnice s neznámou x a parametrami a, b.

$$\frac{1}{x+a+b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \tag{3}$$

Najskôr prevedieme všetko na jednu stranu a potom použijeme úpravu na súčin (pomocou príkazu Factorise). Z takto upravenej rovnice by už nemal byť problém urobiť diskusiu vzhľadom na parametre (obr. 4).

1	$\frac{1}{x+a+b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$
○	$\rightarrow\ \frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$
2	`Solve($1)`
○	$\rightarrow\ \{x=-a, x=-b\}$
3	`Substitute($1,x = -a)`
○	$\rightarrow\ \frac{1}{b}=\frac{1}{b}$

1	$0=\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{x+a+b}$
○	$\rightarrow\ 0=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}-\frac{1}{a+b+x}$
2	`Factorise($1)`
○	$\rightarrow\ 0=(a+b)(x+b)\frac{x+a}{bax(x+a+b)}$

Obrázok 4

Rovnicu (3) riešime v programe Wolfram Alpha príkazom

solve 1/(x+a+b)=1/x+1/a+1/b for x.

Dostaneme aj diskusiu vzhľadom na parametre v tvare

$$bx \neq 0 \text{ and } a=-b; \quad x=-a \text{ and } ab \neq 0; \quad x=-b \text{ and } ab \neq 0.$$

GeoGebra má problém aj s niektorými rovnicami, ktoré majú nekonečne veľa koreňov. Ukážeme si to na tejto iracionálnej rovnici:

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-1. \qquad (4)$$

Použijeme substitúciu $\sqrt{x-1}=a$. Ako vidíme v bunke č. 2, zostalo tam ešte jedno x. Zo substitúcie vyjadríme x, čo sme vlastne už urobili pri riešení rovnice (2). Takže teraz použijeme substitúciu $x=a^2+1$. Ako vidíme v bunke č. 3, rovnica (4) prejde do tvaru $|a-1|=a-1$. Riešením tejto rovnice je každé reálne číslo $a \geq 1$. Pretože $a=\sqrt{x-1}$, musíme vyriešiť nerovnicu $\sqrt{x-1} \geq 1$. Ako vidíme na obr. 5, my sme zvolili najskôr návrat k neznámej x. Substitúciou

1	$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-1$
○	$\checkmark\ \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-1$
2	`Substitute($1,√(x-1) = a)`
○	$\rightarrow\ \sqrt{-2a+x}=a-1$
3	`Substitute($2,x = a²+1)`
○	$\rightarrow\ \lvert a-1\rvert=a-1$
4	`Substitute($3,a = √(x-1))`
○	$\rightarrow\ \left\lvert\sqrt{x-1}-1\right\rvert=\sqrt{x-1}-1$
5	`Solve($4)`
○	$\rightarrow\ \{x>2, x=2\}$

Obrázok 5

$a = \sqrt{x-1}$. Dostali sme tak rovnicu, ktorú už GeoGebra dokáže vyriešiť. Riešením rovnice (4) je každé reálne číslo $x \geq 2$. Wolfram Alpha nepotrebuje substitúciu. Stačí použiť príkaz

solve sqrt(x-2sqrt(x-1))=sqrt(x-1)-1 over the reals.

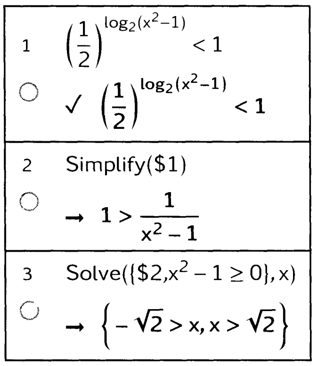
Pri riešení nerovnice

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} < 1. \tag{5}$$

je vhodné ju najskôr zjednodušiť príkazom Simplify.

Nesmieme pritom zabudnúť na definičný obor nerovnice. Pozri obr. 6. V programe Wolfram Alpha stačí použiť príkaz

solve (1/2)^log_2(x^2-1) && x^2-1>0 over the reals.



Obrázok 6

Niekedy GeoGebra nedokáže zohľadniť definičný obor rovnice. Napríklad pre rovnicu

$$\frac{\sin x}{x} = 0 \tag{6}$$

dostaneme odpoveď $\{x = k_1\pi\}$, čo zahŕňa aj číslo $x = 0$, hoci nie je jej koreňom. Môžeme však nahradiť príkaz Solve príkazom NSolve. Ten však zase nedokáže nájsť všetky korene.

V programe Wolfram Alpha stačí použiť príkaz

solve sin(x)/x=0 over the reals

s výsledkom: $x = \pi n$ and $n \neq 0$ and $n \in \mathbb{Z}$.

Ako sme videli v našej prvej ukážke (obr. 2), pri riešení rovníc nám môžu pomôcť grafy funkcií. Treba však vedieť, že GeoGebra vytvára graf ako lomenú čiaru zloženú z úsečiek. Na obr. 7 vľavo vidieť graf funkcie $y = \frac{\sin x}{x}$, vpravo výrez z okolia bodu $(0, 1)$. Hoci táto funkcia nie je definovaná pre $x = 0$, jej graf vytvorený v programe GeoGebra nás presviedča o niečom inom.

Obrázok 7

Funkcia $y = \frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$ nie je definovaná v nekonečne veľa bodoch $x = k\pi$ (pre $k \in \mathbb{Z}$), ktoré však Geogebra prehlási za korene rovnice $\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = 0$. Graf funkcie nám zase nepomôže. Aj v tomto prípade musíme riešiť zmiešanú sústavu:

Solve((1-cos(2x))/sin(2x)=0,sin(2x)!=0,x) .

Ešte horšia je situácia pri funkciách, ktoré sú definované len pre diskrétne hodnoty. Napríklad $y = \sqrt{\cos x - 1}$. GeoGebra nám žiadny graf nenakreslí. Rovnicu $\sqrt{\cos x - 1} = 0$ skúste riešiť príkazom Solutions(sqrt(cos(x)-1)=0). Treba však ešte vziať do úvahy periodičnosť.

Záver

V poslednej dobe je GeoGebra obľúbená nielen medzi učiteľmi, ale aj medzi žiakmi. V článku sme sa pokúsili ukázať, že GeoGebra je vhodným nástrojom nielen na riešenie úloh z geometrie, ale aj na riešenie úloh, ktoré tradične zaraďujeme do algebry. Veď už samotný názov GeoGebra vznikol prepojením slov *geo*metria a al*gebra*. K veľkým prednostiam patrí jednoduchosť zadávania matematických výrazov, k čomu nám slúži virtuálna klávesnica.

GeoGebra však nie je dokonalá. Neurobí všetko za nás. A to je dobre. Aby sme s jej pomocou dostali správne odpovede, musíme vedieť niečo z matematiky a musíme to vedieť použiť. Na dôkladnejšie oboznámenie sa s programom GeoGebra odporúčame článok [1]. Problematike využitia systémov CAS pri riešení rovníc v školskej matematike sa venuje dizertačná práca [4], ktorá je dostupná aj na internete.

Na záver poznamenajme, že systémy počítačovej algebry nám môžu slúžiť nielen na kontrolu výsledkov, ale aj na riešenie úloh, ktoré sme doteraz považovali pre školskú matematiku za príliš náročné, možno až neriešiteľné. Pozrite sa na rovnicu $x^2 = 2^x$. Dva korene dokážeme uhádnuť. Tretí koreň vieme vyjadriť iba pomocou Lambertovej funkcie, ktorú niektorí autori odporúčajú zaradiť medzi elementárne funkcie. GeoGebra nájde všetky tri korene.

Literatúra – References

[1] Gergelitsová, Š.: *GeoGebra – CAS a seznamy*. In: Sborník příspěvků 6. konference „Užití počítačů ve výuce matematiky", 7. – 9. listopadu 2013, České Budějovice, R. Hašek, ed., Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích (2013), 106 – 116.

[2] Mazurek, J.: *Užití software Wolfram Alpha při výuce matematiky*. Matematika – fyzika – informatika 26 (2017), 64 – 69.

[3] Stewart, S.: *A new elementary function for our curricula?*. Australian Senior Math. J. 19, No. 2 (2005), 8 – 29.

[4] Tõnisson, E.: *Differences between Expected Answers and the Answers Offered by Computer Algebra Systems to School Mathematics Equations*. Dissertationes Mathematicae Universitatis Tartuensis 122, University of Tartu Press, 2017.

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/0265/17 Formatívne hodnotenie vo výučbe prírodných vied, matematiky a informatiky.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice

e-mail: jozef.dobos@upjs.sk

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: JSMFteleki@gmail.com)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
3/2019 ročník 48

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov s finančným prispením
Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Mária Hricková, Ivo Kluvanec
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 550 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: október 2019

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANENT

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences" is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe (http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

OBSAH

CONTENTS