OBZORY

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

1/2018 (47)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2018 ročník 47

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 1/2018 Volume 47

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: **Štefan Znám, Beloslav Riečan et Daniel Kluvanec**

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2018 (47)

Poznámka o postupnostiach

Jozef Doboš

Abstract [On sequences]: In this paper we show that the Lambert W function appears in finding some basic limits of sequences from "first principles" by a natural way.

Key words: sequences of real numbers, the Lambert W function

Súhrn: V tejto práci ukážeme, že Lambertova W funkcia sa prirodzeným spôsobom objavuje pri hľadaní limít niektorých základných postupností priamo z definície limity.

Kľúčové slová: postupnosti reálnych čísel, Lambertova W funkcia

MESC: I30, I20

Pripomeňme si definíciu limity postupnosti, s ktorou budeme v ďalšom pracovať:

Hovoríme, že postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$ *konverguje k reálnemu číslu L, čo zapisujeme* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, *ak pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje také reálne číslo* N_ε, *že pre všetky členy s indexom* $n > N_\varepsilon$ *platí* $|a_n - L| < \varepsilon$.

Takto je limita postupnosti reálnych čísel definovaná nielen v súčasnej literatúre (pozri [6], príp. [5]), ale dokonca aj v učebnici prof. Karla Petra [7] z roku 1923. Niektorí autori požadujú, aby N_ε bolo prirodzené číslo. Prípadne namiesto nerovnosti $n > N_\varepsilon$ uvádzajú nerovnosť $n \geq N_\varepsilon$. Avšak všetky tieto varianty definície limity postupnosti sú si navzájom ekvivalentné.

Čo sa týka samotného označenia pre postupnosť, v tom dodnes nie je zhoda. Možno iba v tom, že symbol pre n-tý člen sa napíše v zátvorkách. Najčastejšie buď $\{a_n\}$, alebo (a_n), niekedy s vyznačením oboru pre indexy, napr. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, alebo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Avšak v učebnici [6] sa používa označenie $\langle a_n \rangle_1^{\infty}$, v článku [4] zase označenie $[a_n]$. V januári 2017 vstúpila do platnosti norma STN EN ISO 80000-2:2017, ktorú vydal Slovenský ústav technickej normalizácie. V tejto norme je použité označenie pre postupnosť v tvare (a_n).

Vráťme sa k učebnici [6]. Konkrétne k príkladu 17.4, v ktorom sa priamo podľa vyššie uvedenej definície limity postupnosti dokazuje, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$. Autor tu konštatuje, že – na rozdiel od predchádzajúcich ilustračných príkladov – nevieme riešiť nerovnicu $\left|\frac{n}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$ (ktorá vznikla dosadením $a_n = \frac{n}{2^n}$ a $L = 0$ do nerovnice $|a_n - L| < \varepsilon$). Túto nerovnicu s neznámou $n \in \mathbb{N}$ a s parametrom $\varepsilon > 0$ prepíšeme do ekvivalentného tvaru

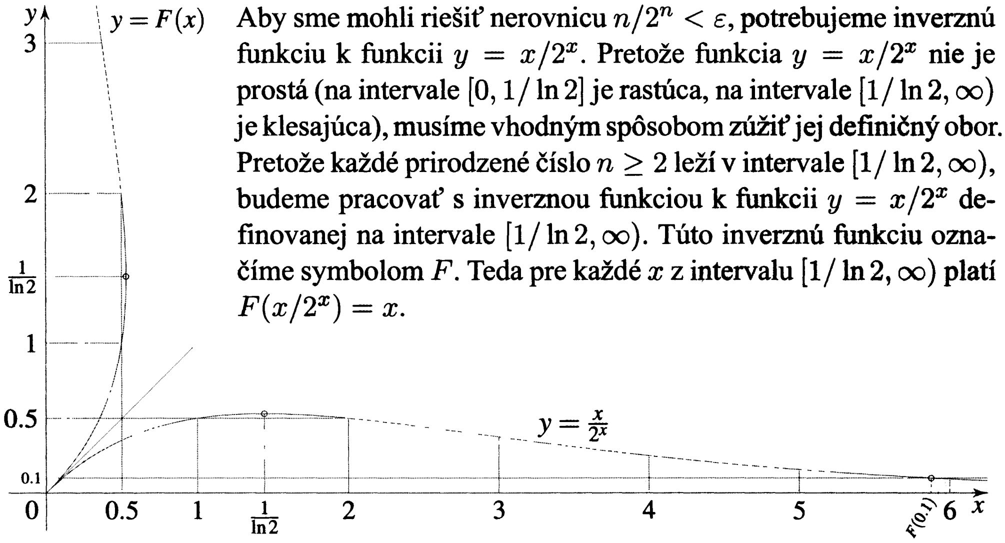
$$\frac{n}{2^n} < \varepsilon. \tag{1}$$

Ukážeme, že na riešenie nerovnice (1) stačí použiť nástroje, ktoré sú dokonca uvedené v učebnici [6]. Pretože

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{n-1}{2^{n+1}} \geq 0,$$

máme $a_n \geq a_{n+1}$, pričom rovnosť nastáva iba pre $n = 1$. Preto pre každé $n \geq 3$ platí $a_n < \frac{1}{2} = a_2 = a_1$. Odtiaľ vyplýva, že ak $\varepsilon > \frac{1}{2}$, potom je každé prirodzené číslo n riešením nerovnice (1). Podobne, ak $\varepsilon = \frac{1}{2}$, potom prirodzené číslo n je riešením nerovnice (1) práve vtedy, keď $n \geq 3$. V ďalšom nech $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Aby sme mohli riešiť nerovnicu $n/2^n < \varepsilon$, potrebujeme inverznú funkciu k funkcii $y = x/2^x$. Pretože funkcia $y = x/2^x$ nie je prostá (na intervale $[0, 1/\ln 2]$ je rastúca, na intervale $[1/\ln 2, \infty)$ je klesajúca), musíme vhodným spôsobom zúžiť jej definičný obor. Pretože každé prirodzené číslo $n \geq 2$ leží v intervale $[1/\ln 2, \infty)$, budeme pracovať s inverznou funkciou k funkcii $y = x/2^x$ definovanej na intervale $[1/\ln 2, \infty)$. Túto inverznú funkciu označíme symbolom F. Teda pre každé x z intervalu $[1/\ln 2, \infty)$ platí $F(x/2^x) = x$.

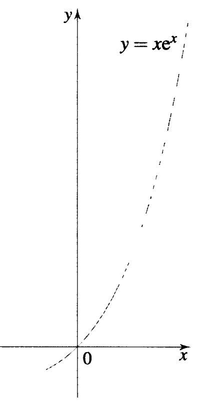


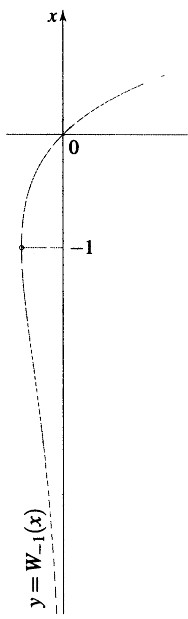
Pretože funkcia F je klesajúca, platí

$$\frac{n}{2^n} < \varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$n = F\left(\frac{n}{2^n}\right) > F(\varepsilon).$$

Odtiaľ vyplýva, že ak $\varepsilon < \frac{1}{2}$, potom prirodzené číslo n je riešením nerovnice (1) práve vtedy, keď $n > F(\varepsilon)$. Musíme sa ešte naučiť počítať hodnoty funkcie F. Bohužiaľ, táto funkcia nepatrí medzi elementárne funkcie. Nenájdeme ju preto na kalkulačke. Cesta k riešeniu tohto problému vedie cez Lambertovu funkciu. Niečo málo o tejto funkcii nájdeme dokonca aj v učebnici [6]. Lambertovu funkciu autor definuje v príklade 7.6 ako inverznú funkciu k funkcii $y = x\mathrm{e}^x$ definovanej na intervale $[-1, \infty)$. Na obrázku sú potom znázornené grafy obidvoch funkcií a v poznámke je uvedená aplikácia Lambertovej funkcie na vyjadrenie inverznej funkcie k funkcii $y = x^x$ definovanej na intervale $[\mathrm{e}^{-1}, \infty)$.

Pretože funkcia $y = x\mathrm{e}^x$ nie je prostá (na intervale $(-\infty, -1]$ je klesajúca, na intervale $[-1, \infty)$ je rastúca), musíme vhodným spôsobom zúžiť jej definičný obor. Inverzná funkcia k funkcii $y = x\mathrm{e}^x$ definovanej na intervale $[-1, \infty)$ sa volá hlavná vetva Lambertovej funkcie a označuje sa symbolom W_0. Inverzná funkcia k funkcii $y = x\mathrm{e}^x$ definovanej na intervale $(-\infty, -1]$ sa volá druhá reálna vetva Lambertovej funkcie a označuje sa symbolom W_{-1}. Niektorí autori odporúčajú zaradiť Lambertovu funkciu medzi elementárne funkcie (pozri [8]).





Na obrázku vľavo sú znázornené obidve vetvy Lambertovej funkcie. Pritom hlavná vetva je znázornená čiarkovane.

Funkciu F, ktorá je inverznou funkciou k funkcii $y = x/2^x$ definovanej na intervale $[1/\ln 2, \infty)$, chceme vyjadriť pomocou Lambertovej funkcie. Teda hľadáme riešenie $x \geq 1/\ln 2$ rovnice $y = x/2^x$ s parametrom y. Najskôr upravíme rovnicu $y = x/2^x$ do tvaru

$$(-\ln 2)y = (-\ln 2)x \cdot \mathrm{e}^{(-\ln 2)x}. \tag{2}$$

Pretože $x \geq 1/\ln 2$, platí $(-\ln 2)x \leq -1$. Rovnicu (2) môžeme teda prepísať do tvaru $W_{-1}((-\ln 2)y) = (-\ln 2)x$, odkiaľ

$$x = \frac{W_{-1}((-\ln 2)y)}{-\ln 2}.$$

Tým sme ukázali, že funkcia F je určená predpisom

$$F(x) = \frac{W_{-1}((-\ln 2)x)}{-\ln 2}. \tag{3}$$

Odtiaľ vyplýva, že ak $\varepsilon < \frac{1}{2}$, potom prirodzené číslo n je riešením nerovnice (1) práve vtedy, keď

$$n > \frac{W_{-1}((-\ln 2)\varepsilon)}{-\ln 2}.$$

Hodnoty Lambertovej funkcie vieme získať pomocou vhodného softvéru. Na ukážku si uvedieme výpočet pre $\varepsilon = 0.1$ v programe Maple:

$$F := x \to \frac{\mathrm{LambertW}(-1, (-\ln(2))x)}{-\ln(2)}$$

$$x \to -\frac{\mathrm{LambertW}(-1, -\ln(2)\,x)}{\ln(2)}$$

$evalf(F(0.1), 30)$

5.87701059379213756001347046194

Podobne v programe MuPAD Light:

- `F:=x->lambertV((-ln(2))*x)/(-ln(2))`

  `x -> lambertV((-ln(2))*x)/(-ln(2))`

- `DIGITS:=30: float(F(0.1))`

  `5.87701059379213756001347046194`

A naozaj, ako môžeme vidieť aj na obrázku, ak $\varepsilon = 0.1$, potom prirodzené číslo n je riešením nerovnice (1) práve vtedy, keď $n \geq 6$.

Ako bolo spomenuté vyššie, pomocou Lambertovej funkcie vieme invertovať funkciu $y = x^x$ (s ktorou sa môžeme podrobnejšie oboznámiť v článkoch [1] a [3], prípadne v knihe [2]). To nám pomôže pri dokazovaní toho, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Podobne, ako v predchádzajúcej úlohe, budeme riešiť nerovnicu $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$, (ktorá vznikla dosadením $a_n = \sqrt[n]{n}$ a $L = 1$ do nerovnice $|a_n - L| < \varepsilon$). Túto nerovnicu s neznámou $n \in \mathbb{N}$ a s parametrom $\varepsilon > 0$ prepíšeme do ekvivalentného tvaru

$$\tfrac{1}{1+\varepsilon} < \left(\tfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{4}$$

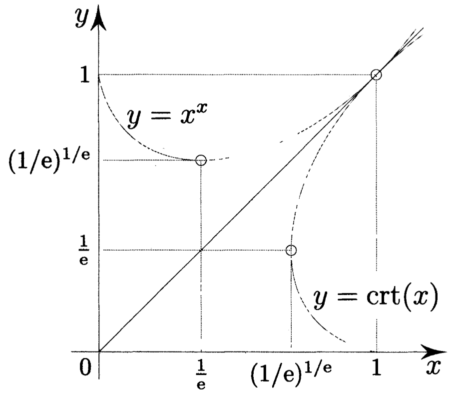
Zrejme $n = 1$ je riešením nerovnice (4) pre každé $\varepsilon > 0$. Pretože $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}}$, stačí sa v ďalšom obmedziť na prirodzené čísla $n \geq 3$.

Pretože pre každé $n \geq 3$ platí $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \leq n$, máme

$$\frac{(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}}{(\frac{1}{n+1})^{\frac{1}{n+1}}} = \left(\tfrac{1}{n} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} < 1,$$

čo môžeme prepísať do tvaru

$$\left(\tfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} < \left(\tfrac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} \quad \text{pre všetky } n \geq 3.$$



Aby sme mohli riešiť nerovnicu (4), potrebujeme inverznú funkciu k funkcii $y = x^x$. Pretože funkcia $y = x^x$ nie je prostá (na intervale $(0, 1/\mathrm{e}]$ je klesajúca, na intervale $[1/\mathrm{e}, \infty)$ je rastúca), musíme vhodným spôsobom zúžiť jej definičný obor. Pretože pre každé prirodzené číslo $n \geq 3$ leží číslo $\frac{1}{n}$ v intervale $(0, 1/\mathrm{e}]$, budeme pracovať s inverznou funkciou k funkcii $y = x^x$ definovanej na intervale $(0, 1/\mathrm{e}]$. Túto inverznú funkciu označíme symbolom crt. Teda pre každé x z intervalu $(0, 1/\mathrm{e}]$ platí $\mathrm{crt}(x^x) = x$.

V literatúre sa najčastejšie nepoužíva žiadne špeciálne označenie pre funkciu $y = x^x$, ani pre funkciu k nej inverznú. Jednou z mála výnimiek je kniha [2], podľa ktorej funkcia $y = x^x$ má označenie cxt a funkcia k nej inverzná má označenie crt.

Ako sme videli vyššie, výraz $(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$, kde $n \in \mathbb{N}$, nadobúda svoju najmenšiu hodnotu pre $n = 3$. V prípade, že pre číslo ε platí $\frac{1}{1+\varepsilon} < (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$ (t.j. $\varepsilon > \sqrt[3]{3} - 1$), každé prirodzené číslo n je riešením nerovnice (4). V ďalšom budeme predpokladať, že platí $\varepsilon \leq \sqrt[3]{3} - 1$. Pretože funkcia crt je klesajúca, pre každé prirodzené číslo $n \geq 3$ platí

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < (\tfrac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathrm{crt}(\tfrac{1}{1+\varepsilon}) > \mathrm{crt}\left((\tfrac{1}{n})^{\frac{1}{n}}\right) = \tfrac{1}{n}.$$

Odtiaľ vyplýva, že ak $\varepsilon \leq \sqrt[3]{3} - 1$, potom prirodzené číslo $n \geq 3$ je riešením nerovnice (4) práve vtedy, keď

$$n > \frac{1}{\mathrm{crt}(\frac{1}{1+\varepsilon})}. \tag{5}$$

Funkciu crt vyjadríme pomocou Lambertovej funkcie:

$$\mathrm{crt}(x) = \frac{\ln x}{W_{-1}(\ln x)} \quad \text{pre} \quad (\tfrac{1}{\mathrm{e}})^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \leq x < 1.$$

Teda nerovnosť (5) môžeme prepísať do tvaru

$$n > \frac{W_{-1}\left(\ln(\frac{1}{1+\varepsilon})\right)}{\ln(\frac{1}{1+\varepsilon})}.$$

Na ukážku si uvedieme výpočet pre $\varepsilon = 0.1$ a pre $\varepsilon = 0.01$ v programe Maple:

$$crt := x \to \frac{\mathrm{LambertW}\left(-1, \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}$$

$$x \to \frac{\mathrm{LambertW}\left(-1, \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}$$

$evalf(crt(0.1), 30)$

$$38.2287328514240711541463731821$$

$evalf(crt(0.01), 30)$

$$651.100335344407821370199205463$$

A podobne v programe MuPAD Light:

- `crt:=x->lambertV(ln(1/(1+x)))/(ln(1/(1+x)))`

  `x -> lambertV(ln(1/(1 + x)))/ln(1/(1 + x))`

- `DIGITS:=30: float(crt(0.1))`

  `38.2287328514240711541463731821`

- `float(crt(0.01))`

  `651.100335344407821370199205464`

Definícia limity postupnosti však nevyžaduje ku každému $\varepsilon > 0$ nájsť najmenšiu možnú hodnotu N_ε s požadovanou vlastnosťou. Preto sa pri takýchto úlohách využívajú rôzne odhady, ktoré podstatným spôsobom tieto úlohy zjednodušujú. Môžeme to nájsť v každej solídnej učebnici (napríklad [5] a [6], ale aj mnoho iných).

Na záver uvedieme istú charakterizáciu limity postupnosti, ktorá môže byť užitočná z metodického hľadiska. Inšpiráciou bol článok [9], kde je podobným spôsobom charakterizovaná limita funkcie.

Tvrdenie 1. Postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ konverguje k reálnemu číslu L práve vtedy, keď existuje funkcia $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall n \in \mathbb{N} : (n > f(\varepsilon)) \Rightarrow (|a_n - L| < \varepsilon).$$

Dôkaz. Jedným smerom: funkciu $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definujeme predpisom $f(\varepsilon) = N_\varepsilon$ pre každé reálne číslo $\varepsilon > 0$. Opačným smerom: pre dané reálne číslo $\varepsilon > 0$ položme $N_\varepsilon = f(\varepsilon)$. Jednotlivé detaily dôkazu si premyslite samostatne.

Táto charakterizácia limity postupnosti nám uľahčuje dôkazy ďalších tvrdení. Napríklad:

Tvrdenie 2. Postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ konverguje k reálnemu číslu L práve vtedy, keď existuje funkcia $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall n \in \mathbb{N} : (n > g(\varepsilon)) \Rightarrow (|a_n - L| < \tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Dôkaz. Funkciu g definujeme predpisom $g(x) = f(x/2)$ pre každé $x \in (0,\infty)$, pričom f je funkcia z Tvrdenia 1.

Literatúra – References

[1] Dusl, K.: *K teorii exponenciální funkce x^x*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 No. 3 (1925), 214 – 225.

[2] Fantini, J. A., Kloepfer, G. C.: *The Coupled Exponential*, 1998. `http://eretrandre.org/rb/files/JayFantini1998_203.pdf`.

[3] González-Santander, J. L., Martín, G.: *Some Remarks on the Self-Exponential Function: Minimum Value, Inverse Function, and Indefinite Integral*, International Journal of Analysis (2014), Article ID 195329, 7 pages, 2014. doi:10.1155/2014/195329.

[4] Koliha, J.: *Axiomatické zavedení reálných čísel*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 14 No. 1 (1969), 1 – 14.

[5] Lay, S. R.: *Analysis: with an introduction to proof*, Pearson Prentice Hall, 2005.

[6] Moreno, L. F.: *An Invitation to Real Analysis*, The Mathematical Association of America, 2015.

[7] Petr, K.: *Počet differenciální. Část analytická*, Jednota československých mathematiků a fysiků, Praha, 1923.

[8] Stewart, S.: *A new elementary function for our curricula?*, Australian Senior Mathematics Journal, Vol. 19 No. 2 (2005), 8 – 26.

[9] Viswanath, K.: *Teaching The Limit Concept*, Resonance – Journal of Science Education, Vol. 3, No. 7 (1998), 74 – 77. `http://www.ias.ac.in/describe/article/reso/003/07/0074-0077`

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/0265/17 Formatívne hodnotenie vo výučbe prírodných vied, matematiky a informatiky.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
1/2018 ročník 47

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov s finančným prispením
Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Ivo Kluvanec
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 500 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: máj 2018

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANET

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences" is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe (http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

OBSAH

CONTENTS