

**OBZORRY**

**1/**  
**2018 (47)**

*MATEMATIKY*  
*FYZIKY a*  
*INFORMATIKY*

# OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2018 ročník 47

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,  
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

## HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 1/2018 Volume 47

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and  
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

**Fundavit: Štefan ZnáM, Beloslav Riečan et Daniel Klavanec**

**Editors in Chief:** Jozef Doboš (Mathematics and Computer Sciences)  
Daniel Klavanec (Physics)

### International Editorial Board:

Giuliana Cavagioni (Italy)	László Náray (Hungary)
Anatolij Dvurečenskij (Slovakia)	Ján Pišťut (Slovakia)
Gábor Galambos (Hungary)	Adam Plocki (Poland)
Juraj Hromkovič (Switzerland)	Zdeněk Půlpán (Czech republic)
Hans Jordens (Netherland)	Ladislav Emanuel Roth (USA)
Štefan Luby (Slovakia)	Lubomír Zelenický (Slovakia)

**Executive Editors:** Štefan Tkáčik (Mathematics and Computer Sciences)  
Aba Teleki (Physics)

### Editorial Board:

#### Mathematics and Computer Sciences:

Katarína Bachratá	Zbyněk Kubáček	Tomáš Lengyelfalusi	Milan Matejdes
Vojtech Bálint	Jozef Kuzma	Peter Maličký	Peter Vrábel
Jozef Fulier	Ladislav Kvasz	Mariana Marčoková	Milan Turčáni

#### Physics:

Jozef Beňuška	Ivan Červeň	Zuzana Ješková	Endre Szabó
Ivo Čáp	Stanislav Holec	Dalibor Krupa	Vladimír Šebeň
Peter Čerňanský	Anna Jankovychová	Viera Lapitková	Bohumil Vybíral

### Reviewers:

#### Mathematics and Computer Sciences:

Ružena Blašková	Mária Kmeťová	Beloslav Riečan	Marián Trenkler
Radoslav Harman	Jaroslava Mikulecká	Štefan Solčan	Peter Vrábel

#### Physics:

Peter Demkanin	Marián Kíreš	Miroslav Kolesík	Miroslava Ožvoldová
Peter Hanisko	Ján Klíma	Igor Medveď	Mária Rakovská

---

## Poznámka o postupnostiach

Jozef Doboš

**Abstract [On sequences]:** In this paper we show that the Lambert W function appears in finding some basic limits of sequences from “first principles” by a natural way.

**Key words:** sequences of real numbers, the Lambert W function

**Súhrn:** V tejto práci ukážeme, že Lambertova W funkcia sa prirodzeným spôsobom objavuje pri hľadaní limít niektorých základných postupností priamo z definície limity.

**Kľúčové slová:** postupnosti reálnych čísel, Lambertova W funkcia

**MESC:** I30, I20

Pripomeňme si definíciu limity postupnosti, s ktorou budeme v ďalšom pracovať:

*Hovoríme, že postupnosť reálnych čísel  $a_1, a_2, a_3, \dots$  konverguje k reálnemu číslu  $L$ , čo zapisujeme  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ , ak pre každé  $\varepsilon > 0$  existuje také reálne číslo  $N_\varepsilon$ , že pre všetky členy s indexom  $n > N_\varepsilon$  platí  $|a_n - L| < \varepsilon$ .*

Takto je limita postupnosti reálnych čísel definovaná nielen v súčasnej literatúre (pozri [6], príp. [5]), ale dokonca aj v učebnici prof. Karla Petra [7] z roku 1923. Niektorí autori požadujú, aby  $N_\varepsilon$  bolo prirodzené číslo. Prípadne namiesto nerovnosti  $n > N_\varepsilon$  uvádzajú nerovnosť  $n \geq N_\varepsilon$ . Avšak všetky tieto varianty definície limity postupnosti sú si navzájom ekvivalentné.

Čo sa týka samotného označenia pre postupnosť, v tom dodnes nie je zhoda. Možno iba v tom, že symbol pre  $n$ -tý člen sa napíše v zátvorkách. Najčastejšie buď  $\{a_n\}$ , alebo  $(a_n)$ , niekedy s vyznačením oboru pre indexy, napr.  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ , alebo  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Avšak v učebnici [6] sa používa označenie  $\langle a_n \rangle_1^\infty$ , v článku [4] zase označenie  $[a_n]$ . V januári 2017 vstúpila do platnosti norma STN EN ISO 80000-2:2017, ktorú vydal Slovenský ústav technickej normalizácie. V tejto norme je použité označenie pre postupnosť v tvare  $(a_n)$ .

Vráťme sa k učebnici [6]. Konkrétne k príkladu 17.4, v ktorom sa priamo podľa vyššie uvedenej definície limity postupnosti dokazuje, že platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ . Autor tu

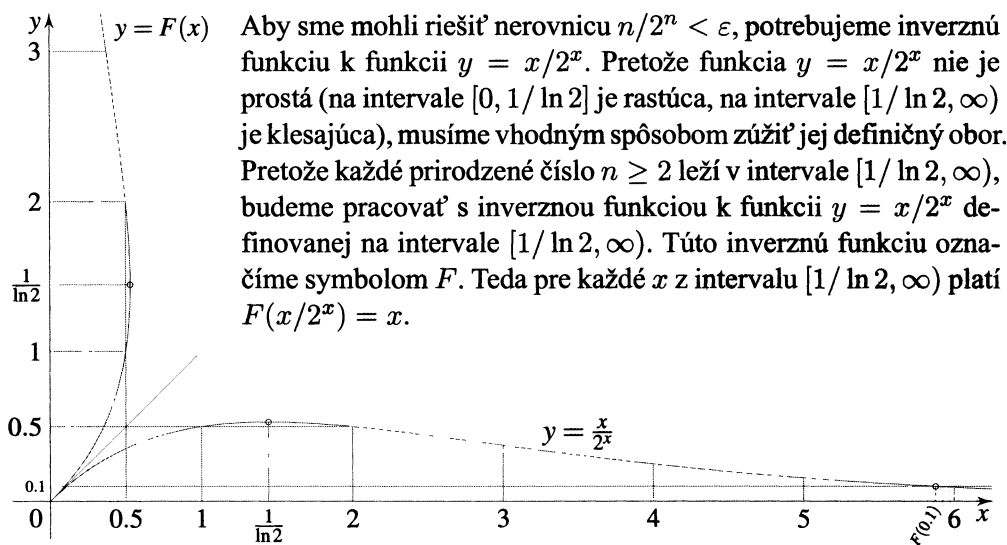
konštatuje, že – na rozdiel od predchádzajúcich ilustračných príkladov – nevieme riešiť nerovnicu  $|\frac{n}{2^n} - 0| < \varepsilon$  (ktorá vznikla dosadením  $a_n = \frac{n}{2^n}$  a  $L = 0$  do nerovnice  $|a_n - L| < \varepsilon$ ). Túto nerovnicu s neznámou  $n \in \mathbb{N}$  a s parametrom  $\varepsilon > 0$  prepíšeme do ekvivalentného tvaru

$$\frac{n}{2^n} < \varepsilon. \quad (1)$$

Ukážeme, že na riešenie nerovnice (1) stačí použiť nástroje, ktoré sú dokonca uvedené v učebnici [6]. Pretože

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{n-1}{2^{n+1}} \geq 0,$$

máme  $a_n \geq a_{n+1}$ , pričom rovnosť nastáva iba pre  $n = 1$ . Preto pre každé  $n \geq 3$  platí  $a_n < \frac{1}{2} = a_2 = a_1$ . Odtiaľ vyplýva, že ak  $\varepsilon > \frac{1}{2}$ , potom je každé prirodzené číslo  $n$  riešením nerovnice (1). Podobne, ak  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , potom prirodzené číslo  $n$  je riešením nerovnice (1) práve vtedy, keď  $n \geq 3$ . V ďalšom nech  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ .



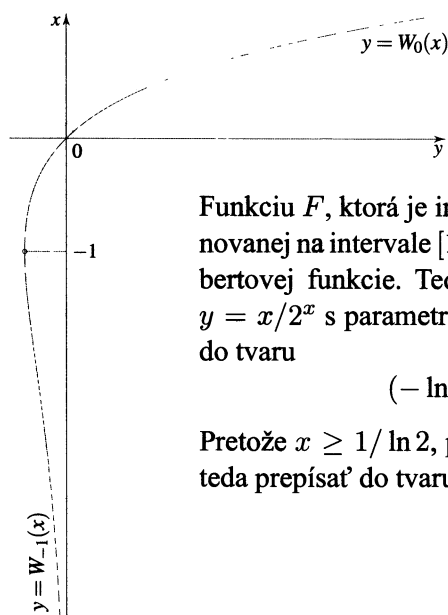
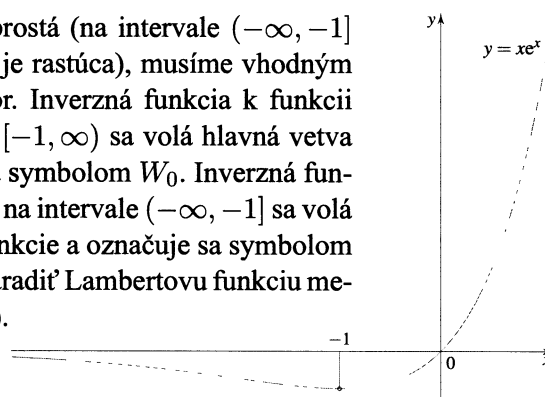
Pretože funkcia  $F$  je klesajúca, platí

$$\begin{aligned} \frac{n}{2^n} < \varepsilon \\ \Downarrow \\ n = F\left(\frac{n}{2^n}\right) > F(\varepsilon). \end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva, že ak  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ , potom prirodzené číslo  $n$  je riešením nerovnice (1) práve vtedy, keď  $n > F(\varepsilon)$ . Musíme sa ešte naučiť počítať hodnoty funkcie  $F$ . Bohužiaľ,

táto funkcia nepatrí medzi elementárne funkcie. Nenájdem ju preto na kalkulačke. Cesta k riešeniu tohto problému vedie cez Lambertovu funkciu. Niečo málo o tejto funkcii nájdeme dokonca aj v učebnici [6]. Lambertovu funkciu autor definuje v príklade 7.6 ako inverznú funkciu k funkcii  $y = xe^x$  definovanej na intervale  $[-1, \infty)$ . Na obrázku sú potom znázornené grafy obidvoch funkcií a v poznámke je uvedená aplikácia Lambertovej funkcie na vyjadrenie inverznej funkcie k funkcii  $y = x^x$  definovanej na intervale  $[e^{-1}, \infty)$ .

Pretože funkcia  $y = xe^x$  nie je prostá (na intervale  $(-\infty, -1]$  je klesajúca, na intervale  $[-1, \infty)$  je rastúca), musíme vhodným spôsobom zúžiť jej definičný obor. Inverzná funkcia k funkcii  $y = xe^x$  definovanej na intervale  $[-1, \infty)$  sa volá hlavná vetva Lambertovej funkcie a označuje sa symbolom  $W_0$ . Inverzná funkcia k funkcii  $y = xe^x$  definovanej na intervale  $(-\infty, -1]$  sa volá druhá reálna vetva Lambertovej funkcie a označuje sa symbolom  $W_{-1}$ . Niektorí autori odporúčajú zaradiť Lambertovu funkciu medzi elementárne funkcie (pozri [8]).



Na obrázku vľavo sú znázornené obidve vetvy Lambertovej funkcie. Prítom hlavná vetva je znázornená čiarkovane.

Funkciu  $F$ , ktorá je inverznou funkciou k funkcii  $y = x/2^x$  definovanej na intervale  $[1/\ln 2, \infty)$ , chceme vyjadriť pomocou Lambertovej funkcie. Teda hľadáme riešenie  $x \geq 1/\ln 2$  rovnice  $y = x/2^x$  s parametrom  $y$ . Najskôr upravíme rovnicu  $y = x/2^x$  do tvaru

$$(-\ln 2)y = (-\ln 2)x \cdot e^{(-\ln 2)x}. \quad (2)$$

Pretože  $x \geq 1/\ln 2$ , platí  $(-\ln 2)x \leq -1$ . Rovnicu (2) môžeme teda prepísať do tvaru  $W_{-1}((-\ln 2)y) = (-\ln 2)x$ , odkiaľ

$$x = \frac{W_{-1}((-\ln 2)y)}{-\ln 2}.$$

Tým sme ukázali, že funkcia  $F$  je určená predpisom

$$F(x) = \frac{W_{-1}((-\ln 2)x)}{-\ln 2}. \quad (3)$$

Odtiaľ vyplýva, že ak  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ , potom prirodzené číslo  $n$  je riešením nerovnice (1) práve vtedy, keď

$$n > \frac{W_{-1}((-\ln 2)\varepsilon)}{-\ln 2}.$$

Hodnoty Lambertovej funkcie vieme získať pomocou vhodného softvéru. Na ukážku si uvedieme výpočet pre  $\varepsilon = 0.1$  v programe Maple:

$$\begin{aligned} F := x \rightarrow & \frac{\text{LambertW}(-1, (-\ln(2))x)}{-\ln(2)} \\ & x \rightarrow -\frac{\text{LambertW}(-1, -\ln(2)x)}{\ln(2)} \\ \text{evalf}(F(0.1), 30) & \\ & 5.87701059379213756001347046194 \end{aligned}$$

Podobne v programe MuPAD Light:

- $F:=x \rightarrow \text{lambertV}((-\ln(2))*x)/(-\ln(2))$   
 $x \rightarrow \text{lambertV}((-\ln(2))*x)/(-\ln(2))$
- $\text{DIGITS}:=30: \text{float}(F(0.1))$   
 $5.87701059379213756001347046194$

A naozaj, ako môžeme vidieť aj na obrázku, ak  $\varepsilon = 0.1$ , potom prirodzené číslo  $n$  je riešením nerovnice (1) práve vtedy, keď  $n \geq 6$ .

Ako bolo spomenuté vyššie, pomocou Lambertovej funkcie vieme invertovať funkciu  $y = x^x$  (s ktorou sa môžeme podrobnejšie oboznámiť v článkoch [1] a [3], prípadne v knihe [2]). To nám pomôže pri dokazovaní toho, že platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

Podobne, ako v predchádzajúcej úlohe, budeme riešiť nerovnicu  $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ , (ktorá vznikla dosadením  $a_n = \sqrt[n]{n}$  a  $L = 1$  do nerovnice  $|a_n - L| < \varepsilon$ ). Túto nerovnicu s neznámou  $n \in \mathbb{N}$  a s parametrom  $\varepsilon > 0$  prepíšeme do ekvivalentného tvaru

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}. \quad (4)$$

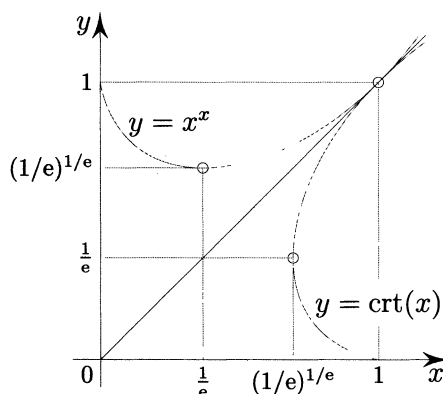
Zrejme  $n = 1$  je riešením nerovnice (4) pre každé  $\varepsilon > 0$ . Pretože  $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}}$ , stačí sa v ďalšom obmedziť na prirodzené čísla  $n \geq 3$ .

Pretože pre každé  $n \geq 3$  platí  $(1 + \frac{1}{n})^n < 3 \leq n$ , máme

$$\frac{(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}}{(\frac{1}{n+1})^{\frac{1}{n+1}}} = \left(\frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} < 1,$$

čo môžeme prepísať do tvaru

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} < \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} \quad \text{pre všetky } n \geq 3.$$



Aby sme mohli riešiť nerovnicu (4), potrebujeme inverznú funkciu k funkcii  $y = x^x$ . Pretože funkcia  $y = x^x$  nie je prostá (na intervale  $(0, 1/e]$  je klesajúca, na intervale  $[1/e, \infty)$  je rastúca), musíme vhodným spôsobom zúžiť jej definičný obor. Pretože pre každé prirodzené číslo  $n \geq 3$  leží číslo  $\frac{1}{n}$  v intervale  $(0, 1/e]$ , budeme pracovať s inverznou funkciou k funkcii  $y = x^x$  definovanej na intervale  $(0, 1/e]$ . Túto inverznú funkciu označíme symbolom  $\text{crt}$ . Teda pre každé  $x$  z intervalu  $(0, 1/e]$  platí  $\text{crt}(x^x) = x$ .

V literatúre sa najčastejšie nepoužíva žiadne špeciálne označenie pre funkciu  $y = x^x$ , ani pre funkciu k nej inverznú. Jednou z mála výnimiek je kniha [2], podľa ktorej funkcia  $y = x^x$  má označenie  $\text{cxt}$  a funkcia k nej inverzná má označenie  $\text{crt}$ .

Ako sme videli vyššie, výraz  $(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ , nadobúda svoju najmenšiu hodnotu pre  $n = 3$ . V prípade, že pre číslo  $\varepsilon$  platí  $\frac{1}{1+\varepsilon} < (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$  (t.j.  $\varepsilon > \sqrt[3]{3} - 1$ ), každé prirodzené číslo  $n$  je riešiteľným nerovnice (4). V ďalšom budeme predpokladať, že platí  $\varepsilon \leq \sqrt[3]{3} - 1$ . Pretože funkcia  $\text{crt}$  je klesajúca, pre každé prirodzené číslo  $n \geq 3$  platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\varepsilon} &< \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\Downarrow \\ \text{crt}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right) &> \text{crt}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva, že ak  $\varepsilon \leq \sqrt[3]{3} - 1$ , potom prirodzené číslo  $n \geq 3$  je riešením nerovnice (4) práve vtedy, keď

$$n > \frac{1}{\text{crt}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)}. \quad (5)$$

Funkciu  $\text{crt}$  vyjadríme pomocou Lambertovej funkcie:

$$\text{crt}(x) = \frac{\ln x}{W_{-1}(\ln x)} \quad \text{pre } \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \leq x < 1.$$

Teda nerovnosť (5) môžeme prepísať do tvaru

$$n > \frac{W_{-1}\left(\ln\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)}.$$

Na ukážku si uvedieme výpočet pre  $\varepsilon = 0.1$  a pre  $\varepsilon = 0.01$  v programe Maple:

$$crt := x \rightarrow \frac{\text{LambertW}\left(-1, \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}$$

$$x \rightarrow \frac{\text{LambertW}\left(-1, \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}$$

evalf(crt(0.1), 30) 38.2287328514240711541463731821

evalf(crt(0.01), 30) 651.100335344407821370199205463

A podobne v programe MuPAD Light:

- crt:=x->lambertV(ln(1/(1+x)))/(ln(1/(1+x)))  
x -> lambertV(ln(1/(1+x)))/ln(1/(1+x))
- DIGITS:=30: float(crt(0.1))  
38.2287328514240711541463731821
- float(crt(0.01))  
651.100335344407821370199205464

Definícia limity postupnosti však nevyžaduje ku každému  $\varepsilon > 0$  najšť najmenšiu možnú hodnotu  $N_\varepsilon$  s požadovanou vlastnosťou. Preto sa pri takýchto úlohách využívajú rôzne odhady, ktoré podstatným spôsobom tieto úlohy zjednodušujú. Môžeme to nájsť v každej solídnej učebnici (napríklad [5] a [6], ale aj mnoho iných).

Na záver uvedieme istú charakterizáciu limity postupnosti, ktorá môže byť užitočná z metodického hľadiska. Inšpiráciou bol článok [9], kde je podobným spôsobom charakterizovaná limita funkcie.

**Tvrdenie 1.** Postupnosť reálnych čísel  $a_1, a_2, a_3, \dots$  konverguje k reálnemu číslu  $L$  práve vtedy, keď existuje funkcia  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  s vlastnosťou

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} : (n > f(\varepsilon)) \Rightarrow (|a_n - L| < \varepsilon).$$

*Dôkaz.* Jedným smerom: funkciu  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definujeme predpisom  $f(\varepsilon) = N_\varepsilon$  pre každé reálne číslo  $\varepsilon > 0$ . Opačným smerom: pre dané reálne číslo  $\varepsilon > 0$  položíme  $N_\varepsilon = f(\varepsilon)$ . Jednotlivé detaily dôkazu si premyslite samostatne.

Táto charakterizácia limity postupnosti nám uľahčuje dôkazy ďalších tvrdení. Napríklad:



**Tvrdenie 2.** Postupnosť reálnych čísel  $a_1, a_2, a_3, \dots$  konverguje k reálnemu číslu  $L$  práve vtedy, keď existuje funkcia  $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  s vlastnosťou

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} : (n > g(\varepsilon)) \Rightarrow (|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

*Dôkaz.* Funkciu  $g$  definujeme predpisom  $g(x) = f(x/2)$  pre každé  $x \in (0, \infty)$ , pričom  $f$  je funkcia z Tvrdenia 1.

#### Literatúra – References

- [1] Dusl, K.: *K teorii exponenciální funkce  $x^x$* , Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, Vol. 54 No. 3 (1925), 214–225.
- [2] Fantini, J. A., Kloepfer, G. C.: *The Coupled Exponential*, 1998. [http://eretrandre.org/rb/files/JayFantini1998\\_203.pdf](http://eretrandre.org/rb/files/JayFantini1998_203.pdf).
- [3] González-Santander, J. L., Martín, G.: *Some Remarks on the Self-Exponential Function: Minimum Value, Inverse Function, and Indefinite Integral*, International Journal of Analysis (2014), Article ID 195329, 7 pages, 2014. doi:10.1155/2014/195329.
- [4] Koliha, J.: *Axiomatické zavedení reálných čísel*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 14 No. 1 (1969), 1–14.
- [5] Lay, S. R.: *Analysis: with an introduction to proof*, Pearson Prentice Hall, 2005.
- [6] Moreno, L. F.: *An Invitation to Real Analysis*, The Mathematical Association of America, 2015.
- [7] Petr, K.: *Počer diferenciální. Část analytická*, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1923.
- [8] Stewart, S.: *A new elementary function for our curricula?*, Australian Senior Mathematics Journal, Vol. 19 No. 2 (2005), 8–26.
- [9] Viswanath, K.: *Teaching The Limit Concept*, Resonance – Journal of Science Education, Vol. 3, No. 7 (1998), 74–77. <http://www.ias.ac.in/describe/article/reso/003/07/0074-0077>

**Pod'akovanie:** Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/0265/17 Formatívne hodnotenie vo výučbe prírodných vied, matematiky a informatiky.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: [jozef.dobos@upjs.sk](mailto:jozef.dobos@upjs.sk)

Jednota slovenských matematikov a fyzikov  
Matematický ústav SAV

---

**Adresa redakcie**

**Matematická a informatická časť**

Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok  
(e-mail: obzory@ku.sk)

**Fyzikálna časť**

Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra  
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

**Objednávky a predplatné vybavuje**

JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava  
(e-mail: kalina@math.sk)

**OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**  
**1/2018 ročník 47**

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov s finančným príspevím  
Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky

Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Klivanec

Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki

Technická redakcia: Martin Papčo, Ivo Klivanec

Zástupca vydavateľa: Martin Kalina

Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou

Náklad: 500 kusov

Periodicita vydávania: štvrt'ročník

IČO vydavateľa: 00 178 705

Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava

Dátum vydania periodickej tlače: máj 2018

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANET

Podávanie novinových zásielok povolené  
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava  
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences"  
 is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe  
 (<http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/>).

## OBSAH

Oldřich Odvárko, Jarmila Robová: Cesty k důkazům matematických vět .....	1
Mariana Marčoková: 49. Konferencia slovenských matematikov .....	8
Jozef Doboš: Poznámka o postupnostiach .....	11
Pozvánka na seminár Rady skúseného matikára (Martin Papčo).....	18
Július Rebo: Pytagorejské trojice v obore celých komplexných čísel.....	19
Martina Štěpánová: Embedded Regular Polygons [Vnořené pravidelné mnohoúhelníky] .....	27
Klára Velmovská: Vyhodnotenie faktorov ovplyvňujúcich študentov pri rozhodovaní o štúdiu na FMFI UK .....	37
Ladislav E. Roth: Georg Joachim Rheticus, prvý Kopernikán .....	49
Texty úloh I. kola 59. ročníka Fyzikálnej olympiády v školskom roku 2017/2018 (úlohy 5. – 7.).....	62
INFORMÁCIA	
Celoštátne kolo 59. ročníka Fyzikálnej olympiády (Ivo Čáp) .....	68
RECENZIA	
Výnimočné dielo mimoriadneho človeka (Tomáš Lengyelfalusy) .....	70

## CONTENTS

Oldřich Odvárko, Jarmila Robová: Paths to Proofs of Mathematical Theorems .....	1
Mariana Marčoková: 49 <sup>th</sup> Conference of Slovak Mathematicians .....	8
Jozef Doboš: On Sequences .....	11
Invitation to the Seminar: Advise of an Experienced Mathematics Teacher (Martin Papčo) .....	18
Július Rebo: Pythagorean Triples in the Domain of Complex Integers) .....	19
Martina Štěpánová: Embedded Regular Polygons .....	27
Klára Velmovská: Assessment of Factors Determining Students' Preferences to Study at FMFI UK (Faculty of Mathematics, Physics and Informatics of Comenius University) .....	37
Ladislav E. Roth: Georg Joachim Rheticus, the First Copernican .....	49
Tasks of the First Round of the 59 <sup>th</sup> Physics Olympiad, School Year 2017 – 2018, Problems 5 -7 .....	62
INFORMATION	
National Round of the 59 <sup>th</sup> Year of the Physics Olympiad (Ivo Čáp).....	68
REVIEW	
Extraordinary Work of an Extraordinary Man (Tomáš Lengyelfalusy) .....	70