OBZORY

4/2016 (45)

MATEMATIKY
FYZIKY a
INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2016 ročník 45

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 4/2016 Volume 45

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2016 (45)

VMI ZDELÁVANIE V MATEMATIKE A INFORMATIKE

Poznámka o iracionálnych rovniciach s parametrom

Jozef Doboš

Abstract: Irrational equations with a parameter belong to rather a difficult group of problems. This is underpinned by the fact that some solutions in literature are unfinished or even outright wrong. The aim of this article is, therefore, to present this topic in a simple and understandable way to students as well as their teachers.

Key words: irrational equations, parameters

Súhrn: Iracionálne rovnice s parametrom patria k pomerne náročným úlohám. Svedčí o tom aj skutočnosť, že dokonca niektoré riešenia takýchto úloh uvádzané v literatúre sú chybné, resp. neúplné. Cieľom tohto článku je zrozumiteľným spôsobom priblížiť túto problematiku čitateľom z radov študentov a ich učiteľov.

Kľúčové slová: iracionálne rovnice, parametre

MESC: H30, I20

Nasledujúcu úlohu možno nájsť v prvom čísle časopisu Matematika a fyzika v strednej škole z roku 1934 (pozri [6]) v rubrike Úlohy (Задачи). V treťom čísle sú potom zverejnené dva spôsoby riešenia. Spolu aj s menami deviatich čitateľov, ktorí svoje riešenia zaslali do redakcie.

Úloha 1. Riešte rovnicu

$$x^2 - \sqrt{a-x} = a. \tag{1}$$

Prvý spôsob riešenia, ktorý je uvedený v časopise [6], je založený na substitúcii $y = \sqrt{a-x}$, čo vedie k dvom kvadratickým rovniciam $x^2 - x + 1 - a = 0$, $x^2 + x - a = 0$. Odvolávajúc sa na skúšku správnosti, autori tohto riešenia tvrdia, že z koreňov týchto dvoch kvadratických rovníc, t.j. z čísel

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}, \qquad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4a-3}}{2},$$

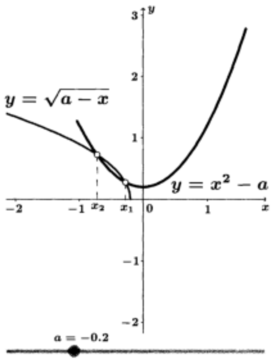
sú koreňmi rovnice (1) len čísla x_2 a x_3.

V poradí ako druhý je v časopise [6] uvedený klasický spôsob riešenia, pri ktorom najskôr osamostatníme výraz s odmocninou a potom rovnicu umocníme. To však často vedie k algebraickej rovnici vyššieho stupňa – v tomto konkrétnom prípade k rovnici štvrtého stupňa

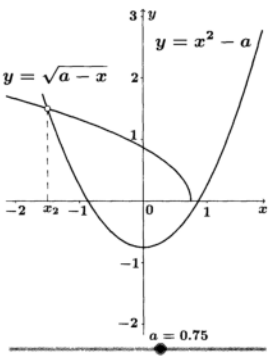
$$x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0. \tag{2}$$

Rozklad ľavej strany rovnice (2) na dva kvadratické trojčleny sa potom hľadá metódou neurčitých koeficientov v tvare $x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = (x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q')$. Po roznásobení výrazov na pravej strane a porovnaní koeficientov pri rovnakých mocninách premennej vznikne sústava rovníc, ktorej riešenie vedie k hľadanému rozkladu a následne k tým istým dvom kvadratickým rovniciam ako v predchádzajúcom riešení.

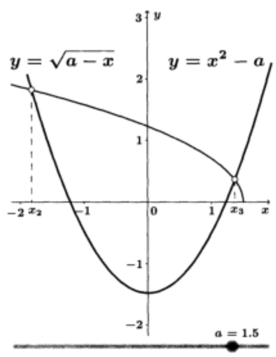
Napriek tomu, že korene uvedených kvadratických rovníc sú v časopise [6] vypočítané správne, záver riešenia úlohy je chybný. Ako sa môžeme ľahko presvedčiť dosadením, pre $a = \frac{3}{4}$ číslo $x_3 = \frac{1}{2}$ *nie je* koreňom rovnice (1), ale pre $a = 0$ číslo $x_1 = 0$ *je* koreňom rovnice (1). Odhaliť vplyv parametra na korene rovnice (1) nám umožňuje jej grafické znázornenie vytvorené v programe GeoGebra:



Obrázok 1



Obrázok 2



Obrázok 3

Korektné riešenie rovnice (1) môžeme nájsť v knihe [4] (existuje aj preklad do angličtiny [5]). Sú tu tiež prezentované dva spôsoby riešenia, pričom prvý sa zhoduje s druhým riešením podľa [6] až po rovnicu (2). Autori však namiesto metódy neurčitých koeficientov využívajú pozorovanie, že ľavá strana rovnice (2) je vlastne kvadratický trojčlen premennej a, teda na rovnicu (2) sa môžeme dívať ako na kvadratickú rovnicu s neznámou a. To nám umožní rozložiť ľavú stranu rovnice (2) na súčin. Druhé riešenie, založené na substitúcii $y = \sqrt{a - x}$, sa v podstate nelíši od prvého riešenia podľa [6]. Avšak namiesto odvolávania sa na skúšku správnosti autori knihy [4] používajú len ekvivalentné úpravy, čo dokonca zdôrazňujú slovami: „pozorně jsme sledovali definiční obory výrazů, umocňovali jen nezáporné výrazy“.

Metodicky dobre spracované riešenie rovnice (1) možno nájsť v nedávno publikovanom článku [8]. Aj toto riešenie využíva substitúciu $y = \sqrt{a-x}$. Žiadalo by sa tam iba doplniť argumentáciu, prečo je rovnica $(x+y)(x-y-1) = 0$ ekvivalentná s rovnicou (1).

Ďalšia úloha, pri ktorej sa zastavíme, pochádza zo zbierky úloh [7], v ktorej je označená hviezdičkou. Ako píše autor v úvode knihy, hviezdičkou sú označované úlohy, ktorých riešenie je náročnejšie (задачи повышенной трудности).

Úloha 2. Riešte rovnicu

$$\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x. \tag{3}$$

V knihe [7] riešenie tejto úlohy nenájdeme, iba vzadu na str. 492 je uvedená nasledujúca odpoveď: Ak $a < 1$, potom nemá rovnica korene, ak $a \geq 1$, potom rovnica má jeden koreň $x = \frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$. Pritom nie je ťažké nahliadnuť, že autorovi knihy [7] unikol koreň $x = 0$ (pre $a = 0$).

Podrobné riešenie rovnice (3) môžeme nájsť v knihe [9]. Autor najskôr prevedie rovnicu (3) na zmiešanú sústavu, ktorá je s danou rovnicou ekvivalentná. Pre rovnicu $\sqrt{f(x)} = g(x)$ to môžeme zapísať (pozri napr. [3]) takto:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = \big(g(x)\big)^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Teda pre rovnicu (3) dostávame

$$\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - \sqrt{a+x} = x^2, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

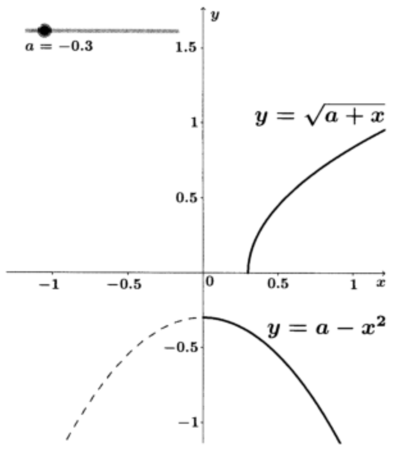
Autor knihy [9] v závere svojho riešenia rovnice (3) ponúka aj grafickú ilustráciu. Najskôr pomocou substitúcie $y = \sqrt{a+x}$ prevedie rovnicu (3) na zmiešanú sústavu

$$\begin{cases} \sqrt{a-y} = y^2 - a, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

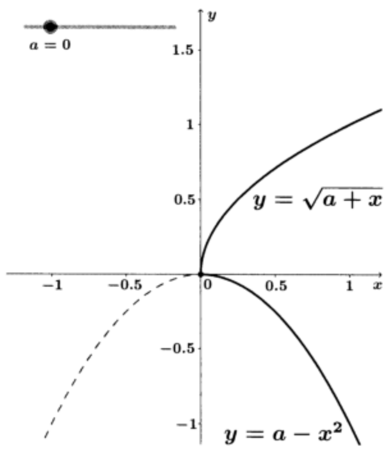
Potom v rovine yOz vykreslí grafy funkcií $z = \sqrt{a-y}$ a $z = y^2 - a$ (presnejšie, iba ich časti ležiace v pravej polrovine, aby bola splnená podmienka $y \geq 0$) pre tri rôzne hodnoty parametra a, ktoré postupne reprezentujú situácie $a \geq 1,\ a = 0,\ 0 < a < 1$. Pretože rovnica (3) je ekvivalentná s nasledujúcou zmiešanou sústavou:

$$\begin{cases} \sqrt{a+x} = a - x^2, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

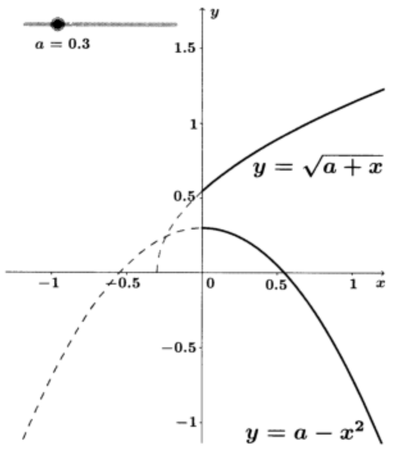
stačilo v rovine xOy vykresliť grafy funkcií $y = \sqrt{a+x}$ a $y = a - x^2$ (presnejšie, iba ich časti ležiace v pravej polrovine, aby bola splnená podmienka $x \geq 0$). Okľuka cez substitúciu bola úplne zbytočná, ako môžeme vidieť na nasledujúcich obrázkoch:



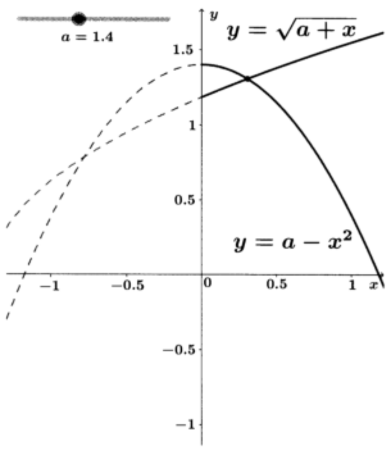
Obrázok 4



Obrázok 5



Obrázok 6



Obrázok 7

Na záver ukážeme, ako možno previesť iracionálnu rovnicu $\sqrt{a+x} = a - x^2$ na dve jednoduchšie iracionálne rovnice s tým istým definičným oborom. Stačí vyriešiť každú z nich úplne samostatne – takto získame všetky korene pôvodnej rovnice. Inšpiráciu nájdeme vo vyššie uvedenej substitúcii $y = \sqrt{a+x}$. Pretože $a + x = y^2$, máme $a + x = \left(\sqrt{a+x}\,\right)^2$, čo využijeme v nasledujúcich ekvivalentných úpravách:

$$
\begin{aligned}
a - x^2 &= \sqrt{a+x}, \\
a + x - x^2 &= \sqrt{a+x} + x, \\
\left(\sqrt{a+x}\right)^2 - x^2 &= \sqrt{a+x} + x, \\
\left(\sqrt{a+x} - x\right)\left(\sqrt{a+x} + x\right) &= \sqrt{a+x} + x, \\
\left(\sqrt{a+x} - x - 1\right)\left(\sqrt{a+x} + x\right) &= 0.
\end{aligned}
$$

Pretože súčin sa rovná nule práve vtedy, keď niektorý z činiteľov sa rovná nule, posledná rovnica sa rozpadne na dve rovnice

$$\sqrt{a+x} - x - 1 = 0, \tag{5}$$

$$\sqrt{a+x} + x = 0. \tag{6}$$

Pretože iracionálne rovnice (5) a (6) majú ten istý definičný obor ako rovnica $\sqrt{a+x} = a - x^2$, obor pravdivosti rovnice $\sqrt{a+x} = a - x^2$ je tvorený všetkými koreňmi rovnice (5), spolu so všetkými koreňmi rovnice (6). Teda každú z rovníc (5) a (6) môžeme riešiť úplne samostatne. Na ich riešenie môžeme použiť schému (4).

Pre rovnicu (5) potom máme

$$\sqrt{a+x} = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + x = (x+1)^2, \\ x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

Kvadratická rovnica $a + x = (x+1)^2$ má reálne korene

$$x_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{a - \tfrac{3}{4}} \quad \text{pre } a \geq \tfrac{3}{4}.$$

Pretože $x_1 + 1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}} + 1 = \frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}} \geq \frac{1}{2} > 0$, číslo x_1 je koreňom rovnice (5) pre každé $a \geq \frac{3}{4}$. Zostáva nám zistiť, pre ktoré hodnoty parametra a platí $x_2 + 1 \geq 0$. Pretože $x_2 + 1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{a - \frac{3}{4}} + 1 = \frac{1}{2} - \sqrt{a - \frac{3}{4}}$, riešime nerovnicu $\frac{1}{2} - \sqrt{a - \frac{3}{4}} \geq 0$ pre neznámu a. Pretože

$$\sqrt{a - \tfrac{3}{4}} \leq \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{matrix} a - \frac{3}{4} \leq \frac{1}{4} \\ a \geq \frac{3}{4} \end{matrix} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{matrix} a \leq 1 \\ a \geq \frac{3}{4} \end{matrix} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{3}{4} \leq a \leq 1,$$

číslo x_2 je koreňom rovnice (5) práve vtedy, keď platí $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$.

Tým sme ukázali, že pre korene rovnice (5) platí:

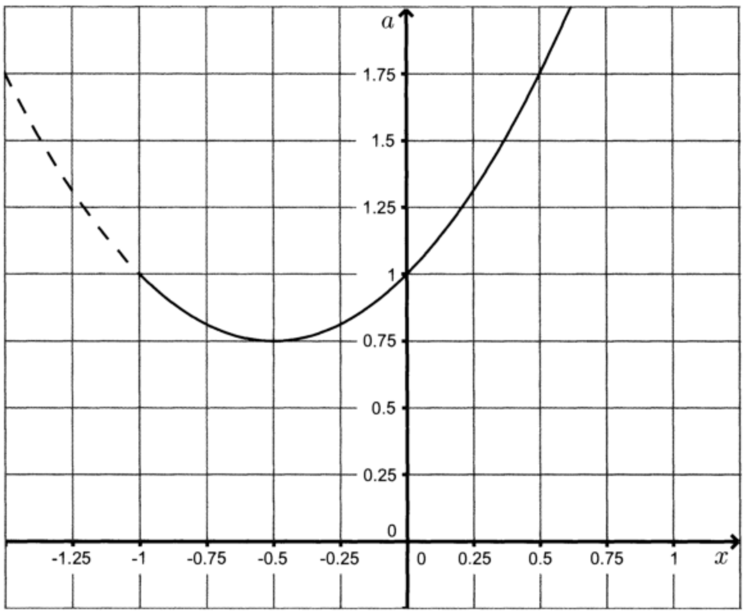
- Ak $a < \frac{3}{4}$, rovnica (5) nemá korene.
- Ak $a = \frac{3}{4}$, rovnica (5) má jediný koreň $x = -\frac{1}{2}$.
- Ak $\frac{3}{4} < a \leq 1$, rovnica (5) má dva korene $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4}}$.
- Ak $a > 1$, rovnica (5) má jediný koreň $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}$.

V poslednej dobe je pri riešení rovníc a nerovníc s parametrom venovaná veľká pozornosť ich grafickému znázorňovaniu v tzv. *(variable, parameter) – plane* (pozri [1], [2]), čo pre našu úlohu znamená grafické znázornenie v rovine xOa.

Ako sme ukázali vyššie, rovnica (5) je ekvivalentná so zmiešanou sústavou

$$\begin{cases} a = (x+1)^2 - x, \\ x \geq -1. \end{cases}$$

Grafickým znázornením tejto zmiešanej sústavy v rovine xOa je časť paraboly určenej rovnicou $a = (x+1)^2 - x$, ktorá leží napravo od priamky $x = -1$. Pretože platí $(x+1)^2 - x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, táto parabola má vrchol v bode $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ (pozri obr. 8).



Obrázok 8

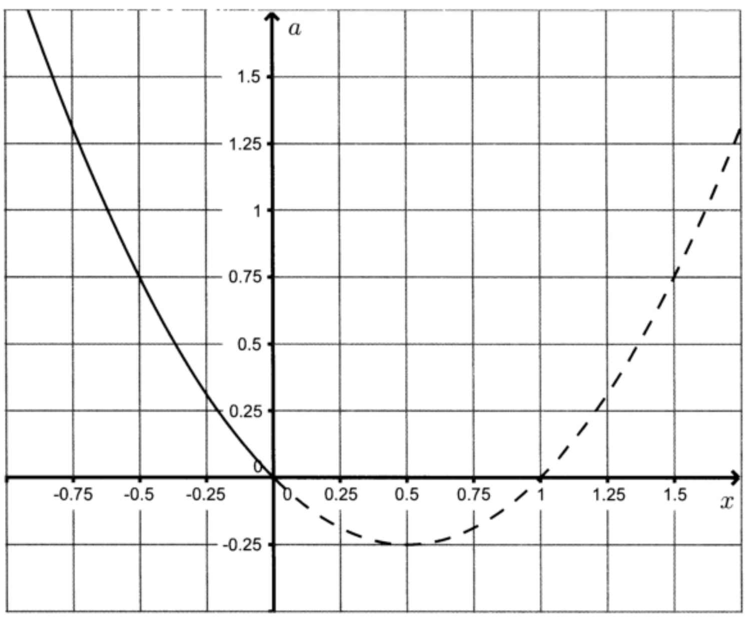
Priamo z grafu na obrázku 8 vidíme, že

a) pre $a < \frac{3}{4}$ rovnica (5) nemá korene,
b) pre $a = \frac{3}{4}$ rovnica (5) má jediný koreň $x = -\frac{1}{2}$,
c) pre $\frac{3}{4} < a \leq 1$ rovnica (5) má dva rôzne korene, konkrétne: obidva korene kvadratickej rovnice $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = a$,
d) pre $a > 1$ rovnica (5) má jediný koreň, konkrétne: väčší z koreňov kvadratickej rovnice $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = a$.

Teraz sa pozrime na rovnicu (6), ktorá je ekvivalentná s nasledujúcou zmiešanou sústavou:

$$\begin{cases} a + x = x^2, \\ -x \geq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Grafickým znázornením zmiešanej sústavy (7) v rovine xOa je časť paraboly určenej rovnicou $a = x^2 - x$, ktorá leží naľavo od priamky $x = 0$ (pozri obr. 9).



Obrázok 9

Priamo na obrázku 9 vidíme, že

a) pre $a < 0$ rovnica (6) nemá korene,
b) pre $a \geq 0$ rovnica (6) má jediný koreň, konkrétne: menší z koreňov kvadratickej rovnice $x^2 - x - a = 0$.
   Už zostáva iba tento koreň vypočítať. Je ním číslo $x = \frac{1}{2} - \sqrt{a + \frac{1}{4}}$.

Ďalšie vhodné úlohy môže čitateľ nájsť v literatúre, ktorá je uvedená nižšie.

Literatúra

[1] Abramovich, S.: *Computational Experiment Approach to Advanced Secondary Mathematics Curriculum.* Springer Science+Business Media, 2014.

[2] Колесникова, С. И.: *Графики в задачах с параметрами.* Потенциал. Математика. Физика. Информатика №1, 121 (2015), 19–29.

[3] Колесникова, С. И.: *Иррациональные уравнения.* Азбука 2000, Москва, 2010, ISBN 978-5-91333-008-6 .

[4] Herman, J., Kučera, R., Šimša, J.: *Metody řešení matematických úloh I.* Masarykova univerzita, Brno, 1996, dotisk 2001.

[5] Herman, J., Kučera, R., Šimša, J.: *Equations and Inequalities: Elementary Problems and Theorems in Algebra and Number Theory*, Canadian Mathematical Society Books in Mathematics 1, Springer-Verlag, 2000.

[6] Математика и физика в средней школе. Методический сборник, (1934) №1, стр. 92; №3, стр. 138–139.

[7] Моденов, П. С.: *Сборник задач по специальному курсу элементарной математики.* Государственное издательство «ВЫСШАЯ ШКОЛА», Москва, 1960.

[8] Поставничий, Ю. С.: *Методы решения иррациональных уравнений с параметром.* Электронный научно-практический журнал «Современные научные исследования и инновации», (2015), №10. `http://web.snauka.ru/issues/2015/10/58207`

[9] Ястребинецкий, Г. А.: *Уравнения и неравенства, содержащие параметры. Пособие для учителей.* Издательство «Просвещение», Москва, 1972.

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou grantu APVV-0715-12 Výskum efektívnosti metód inovácie výučby matematiky, fyziky a informatiky.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

Objednávky a predplatné vybavuje
JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
4/2016 ročník 45

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov s finančným prispením
Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Ivo Kluvanec
Zástupca vydavateľa: Martin Kalina
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 600 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 00 178 705
Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
Dátum vydania periodickej tlače: november 2016

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANET

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences" is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe (http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

OBSAH

CONTENTS