

OBZORY

4/2016 (45)

*MATEMATIKY
FYZIKY a
INFORMATIKY*

**OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY
A INFORMATIKY 4/2016 ročník 45**

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

**HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS
AND COMPUTER SCIENCES 4/2016 Volume 45**

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

Fundavit: Štefan Zná m, Beloslav Riečan et Daniel Klivanec

Editors in Chief: Jozef D o b o š (Mathematics and Computer Sciences)
Daniel K l u v a n e c (Physics)

International Editorial Board:

Giuliana C a v a g g i o n i (Italy)	László N á n a y (Hungary)
Anatolij D v u r e č e n s k i j (Slovakia)	Ján P i š ú t (Slovakia)
Gábor G a l a m b o s (Hungary)	Adam P l o c k i (Poland)
Juraj H r o m k o v i č (Switzerland)	Zdeněk P ů l p á n (Czech republic)
Hans J o r d e n s (Netherland)	Ladislav Emanuel R o t h (USA)
Štefan L u b y (Slovakia)	Lubomír Z e l e n i c k ý (Slovakia)

Executive Editors: Štefan T k a č i k (Mathematics and Computer Sciences)
A b a T e l e k i (Physics)

Editorial Board:

Mathematics and Computer Sciences:

Katarína Bachratá	Zbyněk Kubáček	Tomáš Lengyelfalusi	Milan Matejdes
Vojtech Bálint	Jozef Kuzma	Peter Maličký	Peter Vrábel
Jozef Fulier	Ladislav Kvasz	Mariana Marčoková	Milan Turčáni

Physics:

Jozef Beňuška	Ivan Červeň	Zuzana Ješková	Endre Szabó
Ivo Čáp	Stanislav Holec	Dalibor Krupa	Vladimír Šebeň
Peter Čerňanský	Anna Jankovychová	Viera Lapitková	Bohumil Vybíral

Reviewers:

Mathematics and Computer Sciences:

Ružena Blašková	Mária Kmet'ová	Beloslav Riečan	Marián Trenkler
Radoslav Harman	Jaroslava Mikulecká	Štefan Solčan	Peter Vrábel

Physics:

Peter Demkanin	Marián Kireš	Miroslav Kolesík	Miroslava Ožvoldová
Peter Hanisko	Ján Klíma	Igor Medveď	Mária Rakovská

Poznámka o iracionálnych rovniciach s parametrom

Jozef Doboš

Abstract: Irrational equations with a parameter belong to rather a difficult group of problems. This is underpinned by the fact that some solutions in literature are unfinished or even outright wrong. The aim of this article is, therefore, to present this topic in a simple and understandable way to students as well as their teachers.

Key words: irrational equations, parameters

Súhrn: Iracionálne rovnice s parametrom patria k pomerne náročným úlohám. Svedčí o tom aj skutočnosť, že dokonca niektoré riešenia takýchto úloh uvádzané v literatúre sú chybné, resp. neúplné. Cieľom tohto článku je zrozumiteľným spôsobom priblížiť túto problematiku čitateľom z radov študentov a ich učiteľov.

Kľúčové slová: iracionálne rovnice, parametre

MESC: H30, I20

Nasledujúcu úlohu možno nájsť v prvom čísle časopisu Matematika a fyzika v strednej škole z roku 1934 (pozri [6]) v rubrike Úlohy (Задачи). V treťom čísle sú potom zverejnené dva spôsoby riešenia. Spolu aj s menami deviatich čitateľov, ktorí svoje riešenia zaslali do redakcie.

Úloha 1. Riešte rovnicu

$$x^2 - \sqrt{a-x} = a. \quad (1)$$

Prvý spôsob riešenia, ktorý je uvedený v časopise [6], je založený na substitúcii $y = \sqrt{a-x}$, čo vedie k dvom kvadratickým rovniciam $x^2 - x + 1 - a = 0$, $x^2 + x - a = 0$. Odvolávajúc sa na skúšku správnosti, autori tohto riešenia tvrdia, že z koreňov týchto dvoch kvadratických rovníc, t.j. z čísel

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4a-3}}{2},$$

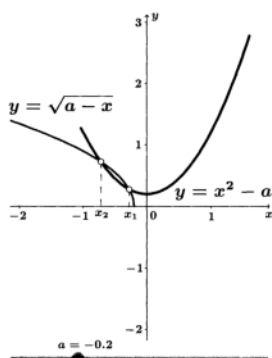
sú koreňmi rovnice (1) len čísla x_2 a x_3 .

V poradí ako druhý je v časopise [6] uvedený klasický spôsob riešenia, pri ktorom najskôr osamostatníme výraz s odmocninou a potom rovnicu umocníme. To však často vedie k algebraickej rovnici vyššieho stupňa – v tomto konkrétnom prípade k rovnici štvrtého stupňa

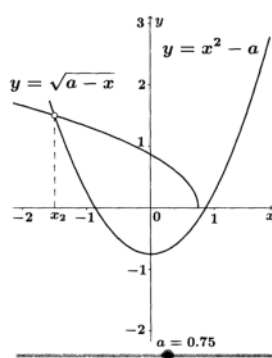
$$x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0. \quad (2)$$

Rozklad ľavej strany rovnice (2) na dva kvadratické trojčleny sa potom hľadá metódou neurčitých koeficientov v tvare $x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = (x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q')$. Po roznásobení výrazov na pravej strane a porovnaní koeficientov pri rovnakých mocninách premennej vznikne sústava rovníc, ktorej riešenie vedie k hľadanému rozkladu a následne k tým istým dvom kvadratickým rovniciam ako v predchádzajúcom riešení.

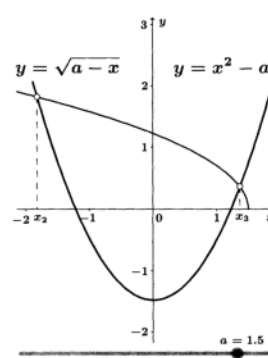
Napriek tomu, že korene uvedených kvadratických rovníc sú v časopise [6] vypočítané správne, záver riešenia úlohy je chybný. Ako sa môžeme ľahko presvedčiť dosadením, pre $a = \frac{3}{4}$ číslo $x_3 = \frac{1}{2}$ *nie je* koreňom rovnice (1), ale pre $a = 0$ číslo $x_1 = 0$ *je* koreňom rovnice (1). Odhaliť vplyv parametra na korene rovnice (1) nám umožňuje jej grafické znázornenie vytvorené v programe GeoGebra:



Obrázok 1



Obrázok 2



Obrázok 3

Korektné riešenie rovnice (1) môžeme nájsť v knihe [4] (existuje aj preklad do angličtiny [5]). Sú tu tiež prezentované dva spôsoby riešenia, pričom prvý sa zohoduje s druhým riešením podľa [6] až po rovnicu (2). Autori však namiesto metódy neurčitých koeficientov využívajú pozorovanie, že ľavá strana rovnice (2) je vlastne kvadratický trojčlen premennej a , teda na rovnicu (2) sa môžeme dívať ako na kvadratickú rovnicu s neznámou a . To nám umožní rozložiť ľavú stranu rovnice (2) na súčin. Druhé riešenie, založené na substitúcii $y = \sqrt{a - x}$, sa v podstate nelíši od prvého riešenia podľa [6]. Avšak namiesto odvolávania sa na skúšku správnosti autori knihy [4] používajú len ekvivalentné úpravy, čo dokonca zdôrazňujú slovami: „pozorně jsme sledovali definiční obory výrazů, umocňovali jen nezáporné výrazy“.

Metodicky dobre spracované riešenie rovnice (1) možno nájsť v nedávno publikovanom článku [8]. Aj toto riešenie využíva substitúciu $y = \sqrt{a-x}$. Žiadalo by sa tam iba doplniť argumentáciu, prečo je rovnica $(x+y)(x-y-1) = 0$ ekvivalentná s rovnicou (1).

Ďalšia úloha, pri ktorej sa zastavíme, pochádza zo zbierky úloh [7], v ktorej je označená hviezdíčkou. Ako píše autor v úvode knihy, hviezdíčkou sú označované úlohy, ktorých riešenie je náročnejšie (задачи повышенной трудности).

Úloha 2. Riešte rovnicu

$$\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x. \quad (3)$$

V knihe [7] riešenie tejto úlohy nenájdeme, iba vzadu na str. 492 je uvedená nasledujúca odpoveď: Ak $a < 1$, potom nemá rovnica korene, ak $a \geq 1$, potom rovnica má jeden koreň $x = \frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$. Pritom nie je ťažké nahliadnuť, že autorovi knihy [7] unikol koreň $x = 0$ (pre $a = 0$).

Podrobné riešenie rovnice (3) môžeme nájsť v knihe [9]. Autor najskôr prevedie rovnicu (3) na zmiešanú sústavu, ktorá je s danou rovnicou ekvivalentná. Pre rovnicu $\sqrt{f(x)} = g(x)$ to môžeme zapísať (pozri napr. [3]) takto:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Teda pre rovnicu (3) dostávame

$$\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x \Leftrightarrow \begin{cases} a - \sqrt{a+x} = x^2, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

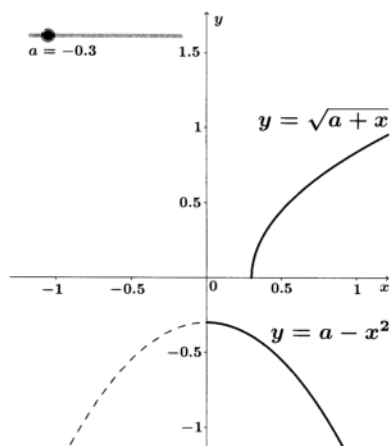
Autor knihy [9] v závere svojho riešenia rovnice (3) ponúka aj grafickú ilustráciu. Najskôr pomocou substitúcie $y = \sqrt{a+x}$ prevedie rovnicu (3) na zmiešanú sústavu

$$\begin{cases} \sqrt{a-y} = y^2 - a, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

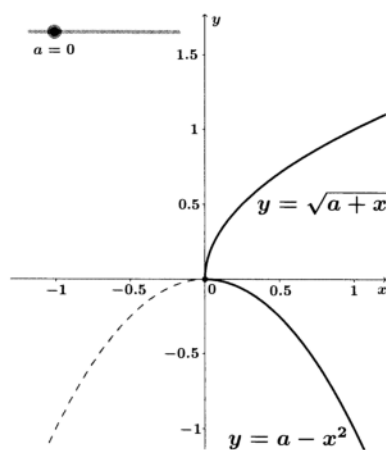
Potom v rovine yOz vykreslí grafy funkcií $z = \sqrt{a-y}$ a $z = y^2 - a$ (presnejšie, iba ich časti ležiace v pravej polrovine, aby bola splnená podmienka $y \geq 0$) pre tri rôzne hodnoty parametra a , ktoré postupne reprezentujú situácie $a \geq 1$, $a = 0$, $0 < a < 1$. Pretože rovnica (3) je ekvivalentná s nasledujúcou zmiešanou sústavou:

$$\begin{cases} \sqrt{a+x} = a - x^2, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

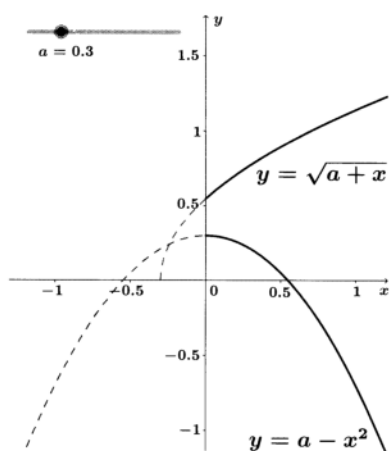
stačilo v rovine xOy vykresliť grafy funkcií $y = \sqrt{a+x}$ a $y = a-x^2$ (presnejšie, iba ich časti ležiace v pravej polrovine, aby bola splnená podmienka $x \geq 0$). Okľuka cez substitúciu bola úplne zbytočná, ako môžeme vidieť na nasledujúcich obrázkoch:



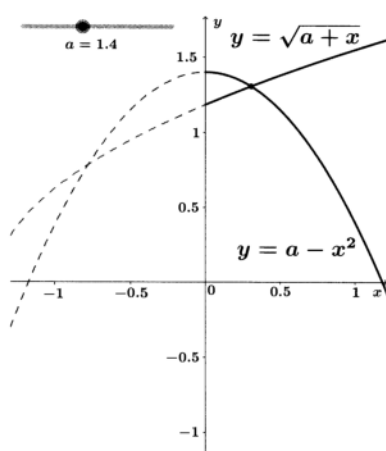
Obrázok 4



Obrázok 5



Obrázok 6



Obrázok 7

Na záver ukážeme, ako možno previesť iracionálnu rovnicu $\sqrt{a+x} = a-x^2$ na dve jednoduchšie iracionálne rovnice s tým istým definičným oborom. Stačí vyriešiť každú z nich úplne samostatne – takto získame všetky korene pôvodnej rovnice. Inšpiráciu nájdeme vo vyššie uvedenej substitúcii $y = \sqrt{a+x}$. Pretože $a+x = y^2$, máme $a+x = (\sqrt{a+x})^2$, čo využijeme v nasledujúcich ekvivalentných úpravách:

$$\begin{aligned}
a - x^2 &= \sqrt{a+x}, \\
a + x - x^2 &= \sqrt{a+x} + x, \\
(\sqrt{a+x})^2 - x^2 &= \sqrt{a+x} + x, \\
(\sqrt{a+x} - x)(\sqrt{a+x} + x) &= \sqrt{a+x} + x, \\
(\sqrt{a+x} - x - 1)(\sqrt{a+x} + x) &= 0.
\end{aligned}$$

Pretože súčin sa rovná nule práve vtedy, keď niektorý z činiteľov sa rovná nule, posledná rovnica sa rozpadne na dve rovnice

$$\sqrt{a+x} - x - 1 = 0, \quad (5)$$

$$\sqrt{a+x} + x = 0. \quad (6)$$

Pretože iracionálne rovnice (5) a (6) majú ten istý definičný obor ako rovnica $\sqrt{a+x} = a - x^2$, obor pravdivosti rovnice $\sqrt{a+x} = a - x^2$ je tvorený všetkými koreňmi rovnice (5), spolu so všetkými koreňmi rovnice (6). Teda každú z rovníc (5) a (6) môžeme riešiť úplne samostatne. Na ich riešenie môžeme použiť schému (4).

Pre rovnicu (5) potom máme

$$\sqrt{a+x} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} a+x = (x+1)^2, \\ x+1 \geq 0. \end{cases}$$

Kvadratická rovnica $a+x = (x+1)^2$ má reálne korene

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4}} \text{ pre } a \geq \frac{3}{4}.$$

Pretože $x_1 + 1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}} + 1 = \frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}} \geq \frac{1}{2} > 0$, číslo x_1 je koreňom rovnice (5) pre každé $a \geq \frac{3}{4}$. Zostáva nám zistiť, pre ktoré hodnoty parametra a platí $x_2 + 1 \geq 0$. Pretože $x_2 + 1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{a - \frac{3}{4}} + 1 = \frac{1}{2} - \sqrt{a - \frac{3}{4}}$, riešime nerovnicu $\frac{1}{2} - \sqrt{a - \frac{3}{4}} \geq 0$ pre neznámu a . Pretože

$$\sqrt{a - \frac{3}{4}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{3}{4} \leq \frac{1}{4} \\ a \geq \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 1 \\ a \geq \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq a \leq 1,$$

číslo x_2 je koreňom rovnice (5) práve vtedy, keď platí $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$.

Tým sme ukázali, že pre korene rovnice (5) platí:

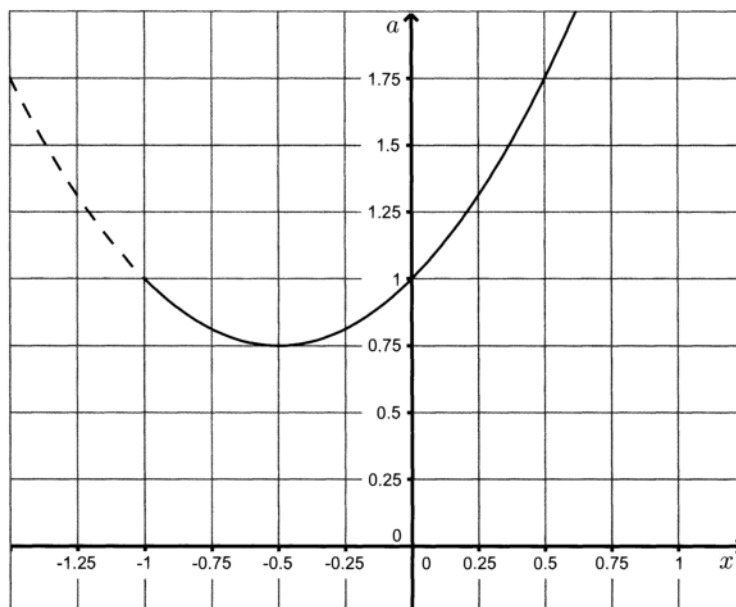
- Ak $a < \frac{3}{4}$, rovnica (5) nemá korene.
- Ak $a = \frac{3}{4}$, rovnica (5) má jediný koreň $x = -\frac{1}{2}$.
- Ak $\frac{3}{4} < a \leq 1$, rovnica (5) má dva korene $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4}}$.
- Ak $a > 1$, rovnica (5) má jediný koreň $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}$.

V poslednej dobe je pri riešení rovníc a nerovníc s parametrom venovaná veľká pozornosť ich grafickému znázorňovaniu v tzv. (*variable, parameter*)-*plane* (pozri [1], [2]), čo pre našu úlohu znamená grafické znázornenie v rovine xOa .

Ako sme ukázali vyššie, rovnica (5) je ekvivalentná so zmiešanou sústavou

$$\begin{cases} a = (x + 1)^2 - x, \\ x \geq -1. \end{cases}$$

Grafickým znázornením tejto zmiešanej sústavy v rovine xOa je časť paraboly určenej rovnicou $a = (x + 1)^2 - x$, ktorá leží napravo od priamky $x = -1$. Pretože platí $(x + 1)^2 - x = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, táto parabola má vrchol v bode $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ (pozri obr. 8).



Obrázok 8

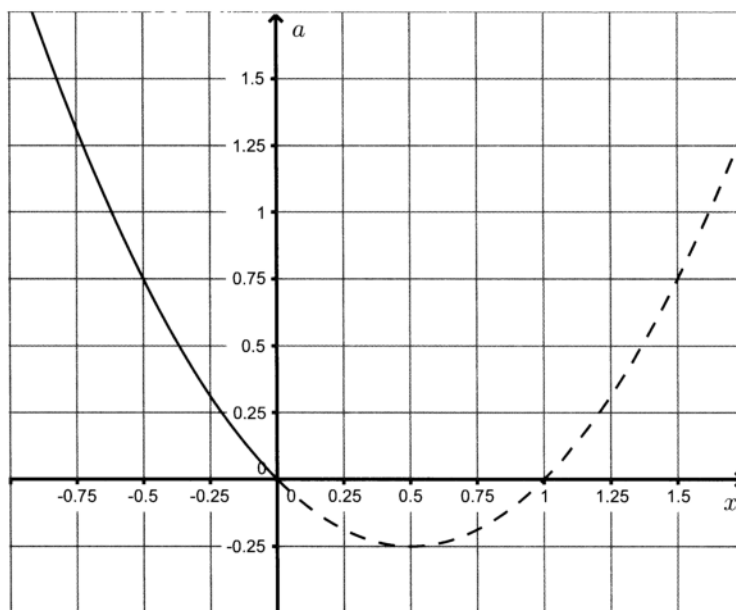
Priamo z grafu na obrázku 8 vidíme, že

- a) pre $a < \frac{3}{4}$ rovnica (5) nemá korene,
- b) pre $a = \frac{3}{4}$ rovnica (5) má jediný koreň $x = -\frac{1}{2}$,
- c) pre $\frac{3}{4} < a \leq 1$ rovnica (5) má dva rôzne korene, konkrétne: obidva korene kvadratickej rovnice $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = a$,
- d) pre $a > 1$ rovnica (5) má jediný koreň, konkrétne: väčší z koreňov kvadratickej rovnice $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = a$.

Teraz sa pozrime na rovnicu (6), ktorá je ekvivalentná s nasledujúcou zmiešanou sústavou:

$$\begin{cases} a + x = x^2, \\ -x \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Grafickým znázornením zmiešanej sústavy (7) v rovine xOa je časť paraboly určenej rovnicou $a = x^2 - x$, ktorá leží naľavo od priamky $x = 0$ (pozri obr. 9).



Obrázok 9

Priamo na obrázku 9 vidíme, že

- a) pre $a < 0$ rovnica (6) nemá korene,
- b) pre $a \geq 0$ rovnica (6) má jediný koreň, konkrétne: menší z koreňov kvadratickej rovnice $x^2 - x - a = 0$.

Už zostáva iba tento koreň vypočítať. Je ním číslo $x = \frac{1}{2} - \sqrt{a + \frac{1}{4}}$.

Ďalšie vhodné úlohy môže čitateľ nájsť v literatúre, ktorá je uvedená nižšie.

L i t e r a t ú r a

- [1] Abramovich, S.: *Computational Experiment Approach to Advanced Secondary Mathematics Curriculum*. Springer Science+Business Media, 2014.
- [2] Колесникова, С. И.: *Графики в задачах с параметрами*. Потенциал. Математика. Физика. Информатика №1, 121 (2015), 19–29.
- [3] Колесникова, С. И.: *Иррациональные уравнения*. Азбука 2000, Москва, 2010, ISBN 978-5-91333-008-6 .
- [4] Herman, J., Kučera, R., Šimša, J.: *Metody řešení matematických úloh I*. Masarykova univerzita, Brno, 1996, dotisk 2001.
- [5] Herman, J., Kučera, R., Šimša, J.: *Equations and Inequalities: Elementary Problems and Theorems in Algebra and Number Theory*, Canadian Mathematical Society Books in Mathematics 1, Springer-Verlag, 2000.
- [6] Математика и физика в средней школе. Методический сборник, (1934) №1, стр. 92; №3, стр. 138–139.
- [7] Моденов, П. С.: *Сборник задач по специальному курсу элементарной математики*. Государственное издательство «ВЫСШАЯ ШКОЛА», Москва, 1960.
- [8] Поставничий, Ю. С.: *Методы решения иррациональных уравнений с параметром*. Электронный научно-практический журнал «Современные научные исследования и инновации», (2015), №10.
<http://web.snauka.ru/issues/2015/10/58207>
- [9] Ястребинецкий, Г. А.: *Уравнения и неравенства, содержащие параметры. Пособие для учителей*. Издательство «Просвещение», Москва, 1972.

Pod'akovanie: Článok vznikol s podporou grantu APVV-0715-12 Výskum efektívnosti metód inovácie výučby matematiky, fyziky a informatiky.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: jozef.dobos@upjs.sk

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť

Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť

Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

Objednávky a predplatné vybavuje

JSMF (OMFI), Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava
(e-mail: kalina@math.sk)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
4/2016 ročník 45

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov s finančným príspevím

Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky

Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Klivanec

Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki

Technická redakcia: Martin Papčo, Ivo Klivanec

Zástupca vydavateľa: Martin Kalina

Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou

Náklad: 600 kusov

Periodicita vydávania: štvrťročník

IČO vydavateľa: 00 178 705

Sídlo vydavateľa: Mlynská dolina F1, 842 48 Bratislava

Dátum vydania periodickej tlače: november 2016

Distribúciu zabezpečuje LK PERMANET

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences"
 is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
 (<http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/>).

OBSAH

Jozef Doboš: Poznámka o iracionálnych rovniciach s parametrom	1
Miroslav Repovský, Tatiana Košinárová, Ingrid Alföldyová: Celoslovenské testovanie z matematiky – T5, T9 a EC MS	9
Július Rebo: Vyhľadávajúce prvočísla v obore celých komplexných čísel.....	21
48. konferencia slovenských matematikov v Jasnej pod Chopkom	30
Martina Hodosyová: Rozvíjanie spôsobilosti plánovať experiment na vyučovaní fyziky na ZŠ.....	31
Daniel Klivanec: Konferencie DIDFYZ ako historická súčasť didaktiky fyziky a vyučovania fyziky v Česko – Slovensku	41
Texty úloh 1. kola 58. ročníka fyzikálnej olympiády (šk. r. 2016 – 2017) kategória A (Ivo Čáp).....	59
INFORMÁCIE	
Dva dni s didaktikou matematiky (Iveta Kohanová)	66
Soňa Čerťková: Svetový kongres o vyučovaní matematiky ICME 13	68
Študentská vedecká a odborná činnosť Didaktika matematiky 2017 (Štefan Tkačík).....	72
JUBILEUM	
Profesor Belo Riečan osemdesiatročný	74
Doc. RNDr. Mária Rakovská, CSc. (Tibor Gál).....	77
Doc. RNDr. Ladislav Morvay, CSc. (Daniel Klivanec).....	79
SPOMÍNANIE	
Zomrel prof. RNDr. Jozef Ďurček, CSc. (Štefan Tkačík)	81
RECENZIA	
Recenzia na knihu Vlastimila Dlabu, Jindřicha Bečvářa: Od aritmetiky k abstraktní algebře, Karolinum, Praha 2016 (Vojtech Bálint)	83

CONTENTS

Jozef Doboš: A note on the irrational equations with parameter	1
Miroslav Repovský, Tatiana Košinárová, Ingrid Alföldyová: Nationwide testing in Mathematics – T5, T9 and EC MS	9
Július Rebo: Finding primes in the domain of complex integers	21
48 th Conference of Slovak Mathematicians in Jasná pod Chopkom	30
Martina Hodosyová: How to plan an experiment in Physics lessons at primary school.....	31
Daniel Klivanec: DIDFYZ conferences as a historic part of didactics and teaching Physics in Slovakia and in the Czech Republic ...	41
Tasks of the first round of the 58 th Physics Olympiad (School Year 2016 – 2017) Category A (Ivo Čáp).....	59
INFORMATION	
Two days with didactics of Mathematics (Iveta Kohanová).....	66
World Congress on Mathematics Education ICME 13 (Soňa Čerťková) ...	68
Student's research conference Didactics of Mathematics 2017 (Štefan Tkačík)	72
JUBILEE	
Professor Belo Riečan's 80th birthday (Miroslav Haviar).....	74
Doc. RNDr. Mária Rakovská, CSc. (Tibor Gál).....	77
Doc. RNDr. Ladislav Morvay, CSc. (Daniel Klivanec)	79
REMEMBRANCE	
Professor RNDr. Jozef Ďurček, CSc. has died (Štefan Tkačík)	81
REVIEW	
A book review: Vlastimil Dlab, Jindřich Bečvář: From arithmetic to abstract algebra, Karolinum, Prague 2016 (Vojtech Bálint).....	83