

# OBZORY

4/2015 (44)

*MATEMATIKY  
FYZIKY a  
INFORMATIKY*

# OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2015 ročník 44

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,  
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

## HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 4/2015 Volume 44

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and  
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

**Fundavit: Štefan Zná m, Beloslav Riečan et Daniel Kluvanec**

**Editors in Chief:** Jozef D o b o š (Mathematics and Computer Sciences)  
Daniel K l u v a n e c (Physics)

### International Editorial Board:

Giuliana C a v a g g i o n i (Italy)	László N á n a y (Hungary)
Anatolij D v u r e č e n s k i j (Slovakia)	Ján P i š ú t (Slovakia)
Gábor G a l a m b o s (Hungary)	Adam P l o c k i (Poland)
Juraj H r o m k o v i č (Switzerland)	Zdeněk P ů l p á n (Czech republic)
Hans J o r d e n s (Netherland)	Ladislav Emanuel R o t h (USA)
Štefan L u b y (Slovakia)	Ľubomír Z e l e n i c k ý (Slovakia)

**Executive Editors:** Štefan T k a č i k (Mathematics and Computer Sciences)  
A b a T e l e k i (Physics)

### Editorial Board:

#### Mathematics and Computer Sciences:

Katarína Bachratá	Zbyněk Kubáček	Tomáš Lengyelfalusi	Milan Matejdes
Vojtech Bálint	Jozef Kuzma	Peter Maličký	Peter Vrábel
Jozef Fulier	Ladislav Kvasz	Mariana Marčoková	Milan Turčáni

#### Physics:

Jozef Beňuška	Ivan Červeň	Zuzana Ješková	Endre Szabó
Ivo Čáp	Stanislav Holec	Dalibor Krupa	Vladimír Šebeň
Peter Čerňanský	Anna Jankovychová	Viera Lapitková	Bohumil Vybíral

### Reviewers:

#### Mathematics and Computer Sciences:

Ružena Blašková	Mária Kmet'ová	Beloslav Riečan	Marián Trenkler
Radoslav Harman	Jaroslava Mikulecká	Štefan Solčan	Peter Vrábel

#### Physics:

Peter Demkanin	Árpád Kecskés	Miroslav Kolesík	Miroslava Ožvoldová
Peter Hanisko	Ján Klíma	Igor Medveď	Mária Rakovská

---

## Poznámka o metóde testovacích bodov

**Jozef Doboš**

**Abstract:** The purpose of this paper is to present the test point method on inequalities in two variables.

**Key words:** the test point method, graphing inequalities in two variables

**Súhrn:** Cieľom práce je prezentovať metódu testovacích bodov na nerovnicach s dvoma neznámymi.

**Kľúčové slová:** metóda testovacích bodov, grafické znázornenie nerovnic s dvoma neznámymi

**MESC:** H30, I20

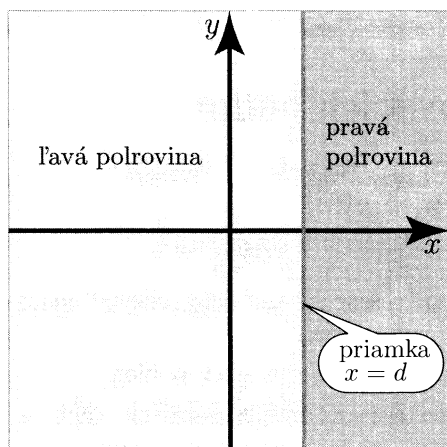
Lineárna nerovnica s dvoma neznámymi  $x$  a  $y$  má tvar  $ax + by + c > 0$ , alebo  $ax + by + c \geq 0$  (kde  $a, b, c$  sú konštanty). Pritom predpokladáme, že aspoň jedno z čísel  $a, b$  je nenulové. Riešením nerovnice je taká usporiadaná dvojica reálnych čísel, dosadením ktorých do danej nerovnice vznikne pravdivá nerovnosť. Pretože lineárna nerovnica má nekonečne veľa riešení, jej obor pravdivosti zvykneme znázorňovať graficky.

Lineárna nerovnica, či už v tvare  $ax + by + c > 0$ , alebo v tvare  $ax + by + c \geq 0$ , úzko súvisí s rovnicou  $ax + by + c = 0$ . Obor pravdivosti nerovnice  $ax + by + c \geq 0$  je zjednotením dvoch disjunktných množín, konkrétne: oboru pravdivosti nerovnice  $ax + by + c > 0$  a oboru pravdivosti rovnice  $ax + by + c = 0$ . Pritom obor pravdivosti rovnice  $ax + by + c = 0$  je hranicou oboru pravdivosti nerovnice  $ax + by + c > 0$ .

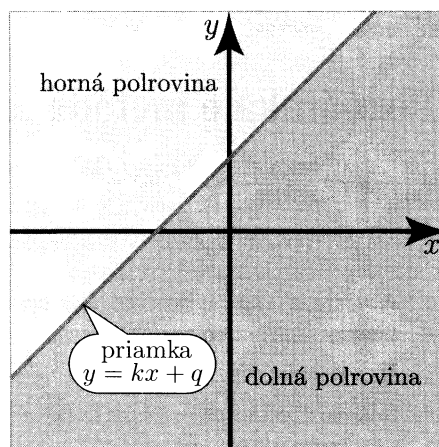
Grafickým znázornením oboru pravdivosti rovnice  $ax + by + c = 0$  je priamka v rovine. Táto priamka rozdelí rovinu na dve polroviny. V prípade zvislej priamky sú to ľavá a pravá polrovina (obrázok 1), v ostatných prípadoch sú to horná a dolná polrovina (obrázok 2).

Ak  $b = 0$ , rovnicu  $ax + by + c = 0$  možno upraviť do tvaru  $x = d$ , kde  $d$  je konštanta. Potom ľavá polrovina (bez hraničnej priamky) je grafickým znázornením oboru pravdivosti nerovnice  $x < d$  a pravá polrovina (bez hraničnej priamky) je grafickým znázornením oboru pravdivosti nerovnice  $x > d$ .

Ak  $b \neq 0$ , rovnicu  $ax + by + c = 0$  možno upraviť do tvaru  $y = kx + q$ , kde  $k, q$  sú konštanty. Potom horná polrovina (bez hraničnej priamky) je grafickým znázornením



Obrázok 1



Obrázok 2

oboru pravdivosti nerovnice  $y > kx + q$  a dolná polrovina (bez hraničnej priamky) je grafickým znázornením oboru pravdivosti nerovnice  $y < kx + q$ .

Na týchto skutočnostiach je založená metóda testovacích bodov. V rovine  $xy$  nakreslíme priamku  $ax + by + c = 0$  (pritom nie je nutné, aby sme jej rovnicu upravovali do tvaru  $x = d$ , prípadne do tvaru  $y = kx + q$ ). Táto priamka rozdelí rovinu na dve polroviny. Ako testovací bod vyberieme ľubovoľný bod neležiaci na tejto priamke. Ak jeho súradnice spĺňajú nerovnicu  $ax + by + c > 0$ , potom grafickým znázornením oboru pravdivosti nerovnice  $ax + by + c > 0$  je polrovina (bez hraničnej priamky) obsahujúca tento testovací bod. V opačnom prípade týmto grafickým znázornením je polrovina (bez hraničnej priamky), ktorá tento testovací bod neobsahuje. (Pozri [1], str. 746–748; [2], str. 185–186.) Niektorí autori používajú metódu testovacích bodov iba ako skúšku správnosti (pozri [4], str. 266). Čitateľovi odporúčame tiež elektronický študijný materiál RNDr. B. Vavrinčíkovej [5]. Použitie tejto metódy si ukážeme na príkladoch.

**Príklad 1.** Riešte nerovnicu

$$2xy < x^2 - y^2 \quad (1)$$

a znázorníte jej obor pravdivosti graficky.

*Riešenie:*

Najskôr budeme riešiť rovnicu

$$2xy = x^2 - y^2. \quad (2)$$

Použijeme nasledovné ekvivalentné úpravy:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= 2xy \\x^2 - 2xy - y^2 &= 0 \\x^2 - 2xy + y^2 - 2y^2 &= 0 \\(x - y)^2 - 2y^2 &= 0 \\(x - y + \sqrt{2}y)(x - y - \sqrt{2}y) &= 0\end{aligned}$$

Pretože súčin sa rovná nule práve vtedy, keď aspoň jeden z činiteľov sa rovná nule, dostávame odtiaľ dve rovnice:

$$x - y + \sqrt{2}y = 0, \quad x - y - \sqrt{2}y = 0,$$

čo môžeme prepísať do ekvivalentného tvaru:

$$x = (1 - \sqrt{2})y, \quad x = (1 + \sqrt{2})y.$$

Preto grafickým znázornením oboru pravdivosti rovnice (2) sú dve priamky, ktoré rozdeľujú rovinu na štyri regióny (obrázok 3).

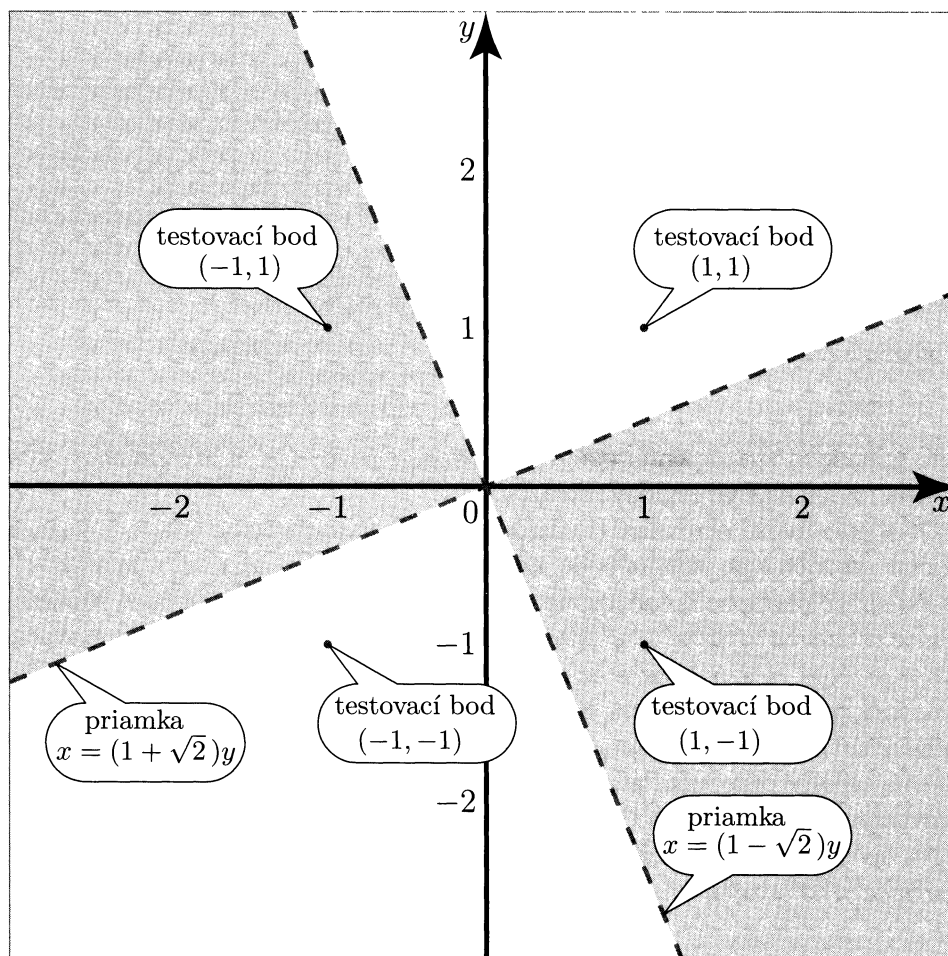
Obor pravdivosti nerovnice (1) nájdeme metódou testovacích bodov. Z každého regiónu vyberieme po jednom bode, konkrétne:  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$  a  $(1, -1)$ . Ich súradnice postupne dosadzujeme do nerovnice (1). Pretože na pravej strane nerovnice (1) máme výraz  $x^2 - y^2$ , po dosadení súradníc každého z našich testovacích bodov do tohto výrazu dostaneme nulu. Pretože na ľavej strane nerovnice (1) máme výraz  $2xy$ , po dosadení súradníc bodov  $(1, 1)$  a  $(-1, -1)$  do tohto výrazu dostaneme kladné číslo a po dosadení súradníc bodov  $(-1, 1)$  a  $(1, -1)$  do tohto výrazu dostaneme záporné číslo, obor pravdivosti nerovnice (1) je tvorený regiónmi určenými testovacími bodmi  $(-1, 1)$  a  $(1, -1)$ .

Na záver si ukážeme, ako možno jednoduchým spôsobom nájsť obor pravdivosti nerovnice (1). Použijeme nasledujúce ekvivalentné úpravy:

$$\begin{aligned}2xy &< x^2 - y^2 \\x^2 + 2xy + y^2 &< 2x^2 \\(x + y)^2 &< 2x^2 \\|x + y| &< \sqrt{2}|x| \\-\sqrt{2}|x| &< x + y < \sqrt{2}|x| \\x - \sqrt{2}|x| &< y < x + \sqrt{2}|x|\end{aligned}$$

Teda oborom pravdivosti nerovnice (1) je množina

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x - \sqrt{2}|x| < y < x + \sqrt{2}|x|\}.$$



Obrázok 3

V nasledujúcom príklade ukážeme, že metódu testovacích bodov môžeme využiť aj pri riešení nerovnic s parametrom.

**Príklad 2.** Riešte nerovnicu s parametrom

$$\frac{2}{x+a} - \frac{x}{x^2 - a^2} < \frac{1}{a-x}. \quad (3)$$

**Riešenie:** Pomocou ekvivalentných úprav môžeme prepísať nerovnicu (3) do tvaru

$$\frac{2x - a}{(x + a)(x - a)} < 0. \quad (4)$$

Pritom na nerovnicu (4) sa budeme dívať ako na nerovnicu s dvoma neznámymi.

Hranicu oboru pravdivosti nerovnice (4) tvoria priamky  $2x - a = 0$ ,  $x + a = 0$ ,  $x - a = 0$ . Tieto priamky rozdeľujú rovinu na šesť regiónov (obrázok 4). Z každého regiónu vyberieme po jednom bode, konkrétne:  $(1, 0)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(-3, -2)$ ,  $(0, -1)$ .

Súradnice testovacích bodov dosadíme do nerovnice (4):

$$\begin{aligned} (a, x) = (1, 0) : & \quad \frac{2 \cdot 0 - 1}{(0 + 1)(0 - 1)} < 0, \text{ čo nie je pravda;} \\ (a, x) = (3, 2) : & \quad \frac{2 \cdot 2 - 3}{(2 + 3)(2 - 3)} < 0, \text{ čo je pravda;} \\ (a, x) = (0, 1) : & \quad \frac{2 \cdot 1 - 0}{(1 + 0)(1 - 0)} < 0, \text{ čo nie je pravda;} \\ (a, x) = (-1, 0) : & \quad \frac{2 \cdot 0 - (-1)}{(0 + (-1))(0 - (-1))} < 0, \text{ čo je pravda;} \\ (a, x) = (-3, -2) : & \quad \frac{2 \cdot (-2) - (-3)}{((-2) + (-3))((-2) - (-3))} < 0, \text{ čo nie je pravda;} \\ (a, x) = (0, -1) : & \quad \frac{2 \cdot (-1) - 0}{((-1) + 0)((-1) - 0)} < 0, \text{ čo je pravda.} \end{aligned}$$

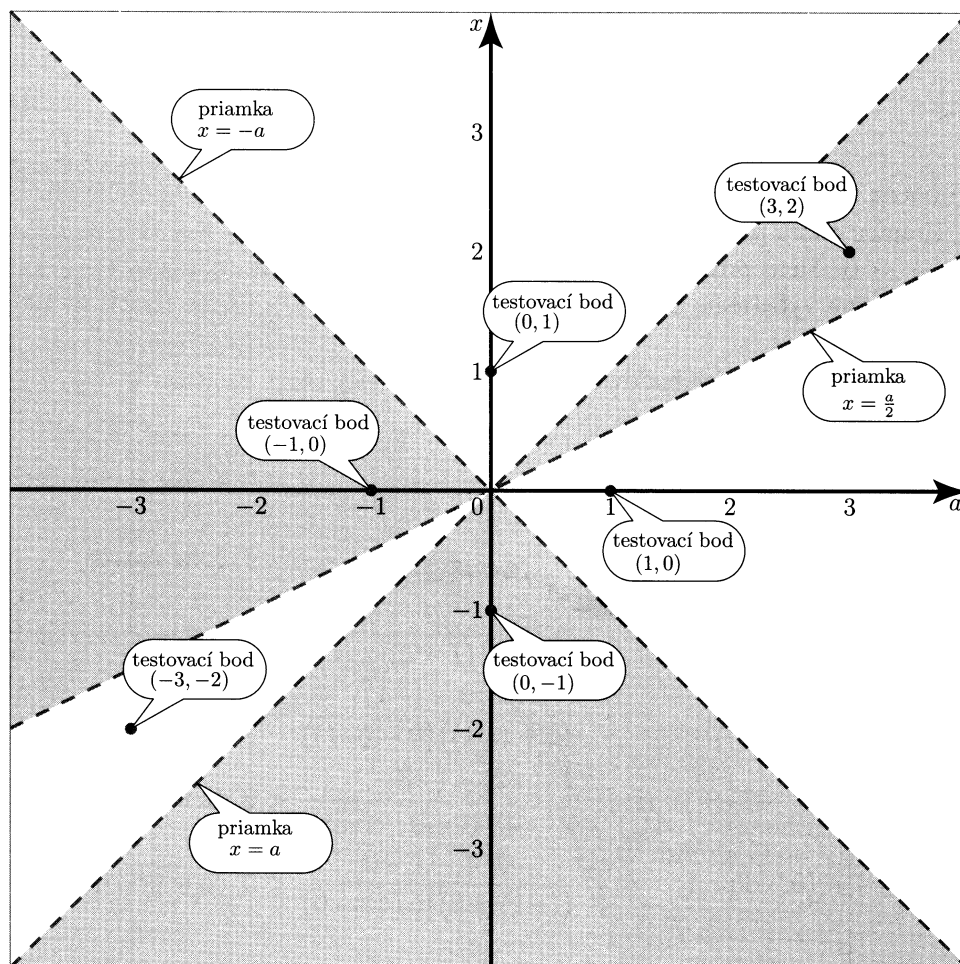
Teda oborom pravdivosti nerovnice (3) je množina

$$P = (-\infty, -|a|) \cup \left(\frac{a}{2}, |a|\right).$$

Posledná ukážka sa týka definičného oboru funkcie dvoch premenných.

**Príklad 3.** Nájdite a graficky znázornite definičný obor funkcie

$$z = \sqrt{\frac{4x - x^2 - y^2}{x^2 - 2y}}.$$



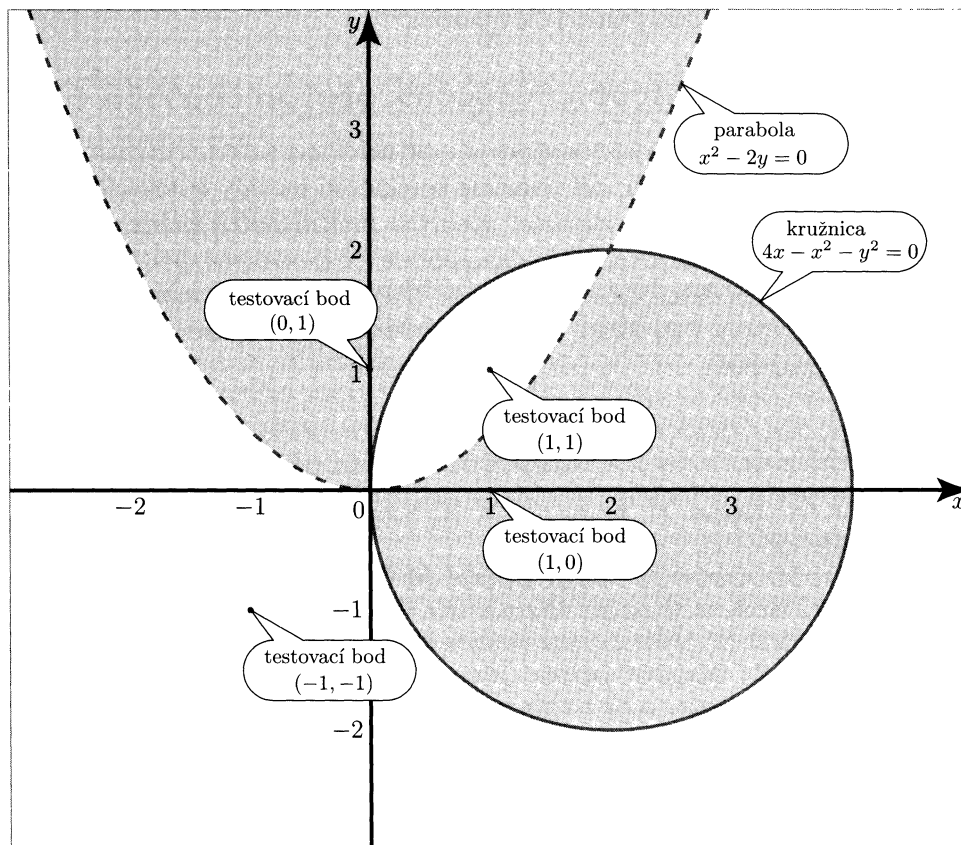
Obrázok 4

*Riešenie:* Definičným oborom našej funkcie je obor pravdivosti nerovnice

$$\frac{4x - x^2 - y^2}{x^2 - 2y} \geq 0. \quad (5)$$

Hranica oboru pravdivosti nerovnice (5) je tvorená kružnicou  $4x - x^2 - y^2 = 0$  a parabolou  $x^2 - 2y = 0$ . Tieto krivky rozdelia rovinu na štyri regióny (obrázok 5). Z každého regiónu vyberieme po jednom bode, konkrétne:  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, -1)$ .





Obrázok 5

Súradnice testovacích bodov dosadíme do nerovnice (5):

$$\begin{aligned}
 (x, y) = (1, 0) : & \quad \frac{4 \cdot 1 - 1^2 - 0^2}{1^2 - 2 \cdot 0} \geq 0, \text{ čo je pravda;} \\
 (x, y) = (1, 1) : & \quad \frac{4 \cdot 1 - 1^2 - 1^2}{1^2 - 2 \cdot 1} \geq 0, \text{ čo nie je pravda;} \\
 (x, y) = (0, 1) : & \quad \frac{4 \cdot 0 - 0^2 - 1^2}{0^2 - 2 \cdot 1} \geq 0, \text{ čo je pravda;} \\
 (x, y) = (-1, -1) : & \quad \frac{4 \cdot (-1) - (-1)^2 - (-1)^2}{(-1)^2 - 2 \cdot (-1)} \geq 0, \text{ čo nie je pravda.}
 \end{aligned}$$

Definičným oborom danej funkcie je množina

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left( y < \frac{x^2}{2} \wedge (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \right) \vee \left( y > \frac{x^2}{2} \wedge (x-2)^2 + y^2 \geq 4 \right) \right\}.$$

Poznamenajme že ak hranica oboru pravdivosti nerovnice s dvoma neznámymi nie je tvorená výlučne priamkami, zdôvodnenie korektnosti metódy testovacích bodov musíme oprieť o nasledujúcu vlastnosť spojitých funkcií dvoch premenných: Ak funkcia dvoch premenných je spojitá na danej oblasti (čo je otvorená súvislá množina), pričom v niektorom bode tej oblasti má hodnotu kladnú a v nejakom inom zas hodnotu zápornú, potom existuje v tej oblasti bod (aspoň jeden), v ktorom je hodnota tej funkcie nula (pozri [3], str. 606).

#### L i t e r a t ú r a

- [1] Barnett, R. A., Ziegler, M. R., Byleen, K. E., Sobceki, D.: *Precalculus: Graphs and Models*. McGraw-Hill, 2009.
- [2] Dugopolski, M.: *Algebra for College Students*. McGraw-Hill, 2009.
- [3] Kluvánek, I., Mišík, L., Švec, M.: *Matematika I*. Alfa, Bratislava, 1971.
- [4] Miller, J., O'Neill, M., Hyde, N.: *Intermediate Algebra*. McGraw-Hill Companies, 2011.
- [5] Vavrínčiková, B.: *Grafické riešenie sústav lineárnych rovníc a nerovníc*, 2013.  
<http://www.sportgymke.sk/mvd/ElementarneFunkcie/GrafickeRiesenieSustav.pdf>

**PodĎakovanie:** Článok vznikol s podporou grantu APVV-0715-12 Výskum efektívnosti metód inovácie výučby matematiky, fyziky a informatiky.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta,  
Jesenná 5, 040 01 Košice  
e-mail: [jozef.dobos@upjs.sk](mailto:jozef.dobos@upjs.sk)

Jednota slovenských matematikov a fyzikov  
Matematický ústav SAV  
Univerzita Konštantína Filozofa

---

### **Adresa redakcie**

#### **Matematická a infromatická časť**

Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok  
(e-mail: [obzory@ku.sk](mailto:obzory@ku.sk))

#### **Fyzikálna časť**

Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra  
(e-mail: [ateleki@ukf.sk](mailto:ateleki@ukf.sk))

#### **Objednávky a predplatné vybavuje**

OMFI, Protonit s.r.o., Pod sokolom 6, 951 01 Nitrianske Hrnčiarovce  
(e-mail: [press@protonit.com](mailto:press@protonit.com))

## **OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY** **4/2015 ročník 44**

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci  
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným príspevom  
Ministerstva školstva Slovenskej republiky  
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Klivanec  
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki  
Technická redakcia: Martin Papčo, Vladimír Kutnár  
Zástupca vydavateľa: Ivo Klivanec

Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou

Náklad: 900 kusov

Periodicita vydávania: štvrt'ročník

IČO vydavateľa: 36 521 582

Sídlo vydavateľa: Pod Sokolom 6, 951 01 Nitrianske Hrnčiarovce

Dátum vydania periodickej tlače: november 2015

Podávanie novinových zásielok povolené  
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava  
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences"  
 is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe  
 (<http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/>).

Jozef Doboš : Poznámka o Vennových diagramoch.....	1
Lucia Csachová : Stereológia (takmer) pre laikov .....	7
Renáta Zemanová : Osobní pohled na monografii <i>Komparativní analýza primárního matematického vzdělávání</i> .....	15
Pozvánka na 47. Konferenciu slovenských matematikov v Jasnej pod Chopkom (Mariana Marčoková, Zuzana Sedliačková).....	20
Jozef Doboš : Poznámka o metóde testovacích bodov .....	21
Bohumil Vybíral : O užívaní pojmu <i>energie</i> ve fyzice i mimo ní (dokončenie z čísla 3/2015(44)) .....	29
Jana Útla : Gravitácia a rast rastlín .....	39
21. konferencia slovenských fyzikov, Nitra 7. – 10. sept. 2015 (Július Círák) .....	49
Rozhovor s Dr. h. c. Prof. RNDr. Alexandrom Feherom, DrSc., riaditeľom Ústavu fyzikálnych vied Prírodovedeckej fakulty UPJŠ Košice (Monika Hanáková) .....	53
Albert Einstein : Die Feldgleichungen der Gravitation (100. výročie prezentácie slávnej rovnice pred Pruskou akadémiou vied v novembri 1915) Texty úloh 1. kola 57. ročníka fyzikálnej olympiády (šk. r. 2015 – 2016) kategórie A, B, C, D, G .....	56
RECENZIA	
Štefan Luby Pohľady do nanosveta (Ivan Červeň).....	77
JUBILEUM	
Svedok rozkvetu slovenskej matematiky (prof. RNDr. Blanka Kolibiarová, CSc.) (Beloslav Riečan) .....	79
SPOMÍNANIE	
Jubileum i spomienka na Prof. RNDr. Arpáda Kecskésa, CSc. (Daniel Klivanec).....	81
Za docentom Štefanom Černákom (Danica Jakubíková-Studenovská) .....	83

## CONTENTS

Jozef Doboš: A few notes on the Venn diagrams.....	1
Lucia Csachová: Stereology in a nutshell .....	7
Renáta Zemanová: Personal view on the monograph <i>Comparative analysis of primary mathematics education</i> .....	15
Invitation to the 47 <sup>th</sup> Conference of Slovak Mathematicians in Jasna pod Chopkom (Mariana Marčoková, Zuzana Sedliačková).....	20
Jozef Doboš: A few notes on the test point method.....	21
Bohumil Vybíral: Concerning the use of the term <i>energy</i> in physics and other fields (continuation of the article published in the issue 3/2015 (44))	29
Jana Útla: Gravitation and plant growth .....	39
21 <sup>st</sup> Conference of Slovak Physicists, Nitra 7 - 10 September 2015 (Július Círák) .....	49
Interview with Dr. h. c. Prof. RNDr. Alexander Feher, DrSc., director of the Institute of Physics Sciences of the Faculty of Natural Sciences at UPJŠ Košice (Monika Hanáková) .....	53
Albert Einstein: Die Feldgleichungen der Gravitation (100th anniversary of the famous equation presented at the Prussian Academy of Sciences in November 1915).....	56
Tasks of the First Round of the 57 <sup>th</sup> Physics Olympiad (School Year 2015 – 2016) Categories A, B, C, D, G.....	57
REVIEW	
Štefan Luby Exploring the nanoworld (Ivan Červeň).....	77
JUBILEE	
A witness to the blossoming of the Slovak mathematics (Professor RNDr. Blanka Kolibiarová, CSc.) (Beloslav Riečan) .....	79
REMEMBRANCE	
In remembrance of Professor RNDr. Arpád Kecskés, CSc. (Daniel Klivanec).....	81
In remembrance of Associate Professor Štefan Černák (Danica Jakubíková- Studenovská).....	83