OBZORY

4/2015 (44)

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2015 ročník 44

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 4/2015 Volume 44

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2015 (44)

VZDELÁVANIE V MATEMATIKE A INFORMATIKE

Poznámka o Vennových diagramoch

Jozef Doboš

Abstract: The purpose of this paper is to present an interesting proof technique of set identities by Venn diagrams, namely "Proving Set Identities with One Example", which is quite rarely found in textbooks.

Key words: Venn diagrams, proof technique

Súhrn: Cieľom práce je prezentovať zaujímavý spôsob dôkazu množinových identít pomocou Vennových diagramov, konkrétne „Dokazovanie množinových identít jedným príkladom", ktorý sa v učebniciach vyskytuje pomerne zriedkavo.

Kľúčové slová: Vennove diagramy, dôkazová technika

MESC: E50, E60

Na internete sa objavilo video[1] (zverejnené 13. 6. 2012), v ktorom je ukázané, ako možno na Vennovom diagrame[2] jednoduchým elegantným spôsobom vyznačiť množinu $A \setminus (B \setminus C)$, kde množiny A, B, C sú podmnožinami základnej množiny M. Rozdiel množín označujeme symbolom $\setminus$, t. j. $S \setminus T = \{x \in M \mid x \in S \wedge x \notin T\}$. Je to v súlade s príručkou [4], ako aj s normou (platnou v Európskej únii) ISO 80000-2 Veličiny a jednotky, časť 2: Matematické značky a symboly používané v prírodných vedách a v technike. V spomínamom videu sa rozdiel množín označuje „mínusom".

Na Vennovom diagrame (obr. 1) sú množiny A, B, C znázornené pomocou kruhov ležiacich v obdĺžniku, ktorý reprezentuje základnú množinu M. Tieto kruhy rozdelia daný obdĺžnik na osem neprekrývajúcich sa častí, ktoré sme označili číslami $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

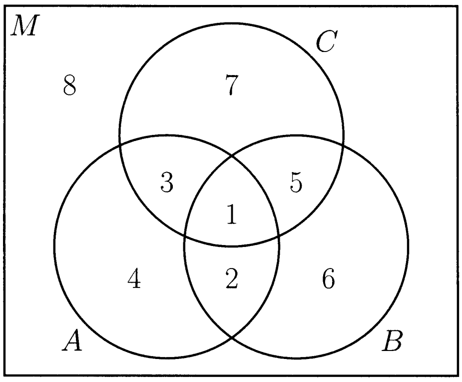
Autor videa najskôr ukáže, že $B \setminus C = \{1, 2, 5, 6\} \setminus \{1, 3, 5, 7\} = \{2, 6\}$, pomocou čoho dostáva, že $A \setminus (B \setminus C) = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{2, 6\} = \{1, 3, 4\}$. Nakoniec vyšrafuje časti označené číslami 1, 3 a 4 (obr. 2).

Na prvý pohľad sa zdá, že ide o nezmysel. Predsa A, B, C sú ľubovoľné množiny, nemusia obsahovať žiadne čísla. Napriek tomu, výsledný obrázok je správny. Ukážeme, že uvedený postup možno istým spôsobom obhájiť.

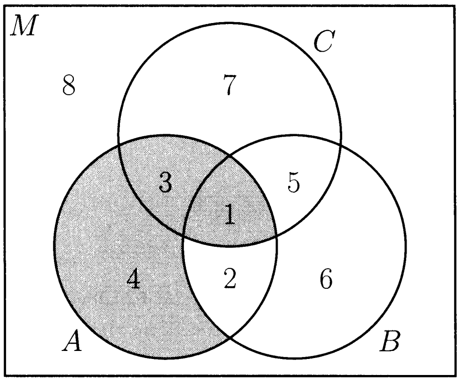
---

[1] `https://www.youtube.com/watch?v=wppVOrCKFOk`

[2] John Venn (pozri [8])



Obrázok 1

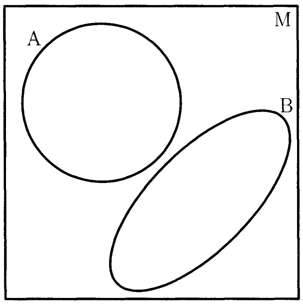


Obrázok 2

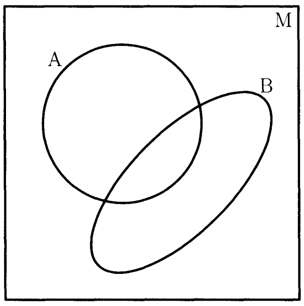
Ešte predtým sa pozrieme do študijných materiálov, aby sme mali predstavu o tom, ako sa Vennove diagramy prezentujú žiakom a študentom. S pojmom Vennovho diagramu sa žiaci môžu stretnúť v aktuálnej učebnici pre gymnáziá [3], konkrétne v odseku *5.5 Množiny, Vennove diagramy a negácia.* Bohužiaľ, jediný Vennov diagram pre tri množiny je iba na reprodukcii fotografie vitráže v Cambridgeskej univerzite. Chýba tu tiež akákoľvek zmienka o tom, že Vennove diagramy sú vlastne priehradkové schémy. Pritom sa stačí pozrieť do študijného materiálu z obdobia zavádzania množinovej matematiky do základných škôl [6], kde sa píše:

> „Vennove diagramy sú grafické priehradkové schémy, ktoré vznikajú prekrížením uzatvorených čiar. Príslušnosť objektu do množiny vyznačujeme zakreslením jeho značky do vnútornej oblasti čiary, ktorá znázorňuje množinu (značku neumiestňujeme na žiadnu nakreslenú čiaru). Pri kreslení dvoch (troch, štyroch) uzatvorených čiar musíme vytvoriť štyri priehradky (osem, šestnásť priehradok).“

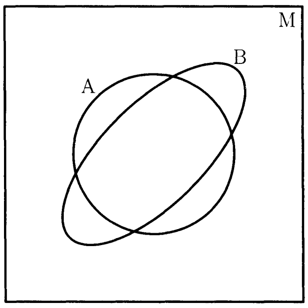
Niektorí autori učebníc (pozri napr. [5]) explicitne neuvádzajú dôležitú požiadavku, aby Vennov diagram pre n množín obsahoval 2^n priehradok. Touto požiadavkou sa dosahuje univerzálnosť Vennovho diagramu – obsahuje priehradky pre všetky teoreticky možné situácie. A práve tým sa Vennove diagramy líšia od Eulerových diagramov, ktoré vznikli zhruba o dvesto rokov skôr. Eulerov diagram obsahuje iba priehradky, ktoré sú neprázdne. Napríklad na obrázku 3 máme Eulerov diagram pre dve neprázdne disjunktné množiny. Nie je to však Vennov diagram. Na obrázku 4 máme Vennov diagram pre dve množiny. A nakoniec sa pozrime na obrázok 5. Nie je to ani Eulerov diagram pre dve množiny, ani Vennov diagram pre dve množiny.



Obrázok 3



Obrázok 4



Obrázok 5

Vráťme sa k metóde zo spomínaného videa. Ako konštatuje prof. Swanson vo svojom príspevku [7], táto hodnotná technika sa v študijných materiáloch objavuje zriedkavo. Jedným z nich je učebnica [1], ktorá je dostupná aj na internete. Na s. 83 autori touto technikou dokazujú rovnosť $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Najskôr nahradia množiny A, B, C množinami im odpovedajúcich regiónov z Vennovho diagramu. Potom overia platnosť dokazovanej množinovej identity pre takto získané množiny, čo je podstatne jednoduchšie, pretože každá z nich má najviac osem prvkov. Nakoniec prehlásia (bez akejkoľvek argumentácie), že tým je vyššie uvedená rovnosť dokázaná. Táto technika je tiež prezentovaná v knihe [2] na s. 143, avšak tam je výklad vágnejší: hovorí sa iba o regiónoch, nie o množinách regiónov. Ešte si všimnime jeden dôležitý aspekt tejto metódy: ako poznamenal prof. Swanson v [7], v skutočnosti dokazujeme rovnosti množín ich overovaním na jedinom príklade.

Pre ďalší výklad je dôležité si uvedomiť, že na obrázku 1 sú čísla použité ako mená jednotlivých regiónov. Aby sme sa vyhli nedorozumeniu, budeme pre tieto regióny používať nasledujúce označenie (použili sme font `bbold`):

$\mathbb{1}$ – pre región číslo 1, čiže $\mathbb{1} = \{x \in M\colon (x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C)\}$,
$\mathbb{2}$ – pre región číslo 2, čiže $\mathbb{2} = \{x \in M\colon (x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C)\}$,
$\mathbb{3}$ – pre región číslo 3, čiže $\mathbb{3} = \{x \in M\colon (x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \in C)\}$,
$\mathbb{4}$ – pre región číslo 4, čiže $\mathbb{4} = \{x \in M\colon (x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \notin C)\}$,
$\mathbb{5}$ – pre región číslo 5, čiže $\mathbb{5} = \{x \in M\colon (x \notin A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C)\}$,
$\mathbb{6}$ – pre región číslo 6, čiže $\mathbb{6} = \{x \in M\colon (x \notin A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C)\}$,
$\mathbb{7}$ – pre región číslo 7, čiže $\mathbb{7} = \{x \in M\colon (x \notin A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \in C)\}$,
$\mathbb{8}$ – pre región číslo 8, čiže $\mathbb{8} = \{x \in M\colon (x \notin A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \notin C)\}$.

Ľahko vidieť, že

$$A = \mathbb{1} \cup \mathbb{2} \cup \mathbb{3} \cup \mathbb{4}, \quad B = \mathbb{1} \cup \mathbb{2} \cup \mathbb{5} \cup \mathbb{6}, \quad C = \mathbb{1} \cup \mathbb{3} \cup \mathbb{5} \cup \mathbb{7}.$$

Namiesto množín A, B, C použijeme odpovedajúce systémy množín

$$\mathbb{A} = \{\mathbb{1}, \mathbb{2}, \mathbb{3}, \mathbb{4}\}\,, \ \mathbb{B} = \{\mathbb{1}, \mathbb{2}, \mathbb{5}, \mathbb{6}\}\,, \ \mathbb{C} = \{\mathbb{1}, \mathbb{3}, \mathbb{5}, \mathbb{7}\}\,.$$

Pretože $\mathbb{B} \setminus \mathbb{C} = \{\mathbb{2}, \mathbb{6}\}$, máme $\mathbb{A} \setminus (\mathbb{B} \setminus \mathbb{C}) = \{\mathbb{1}, \mathbb{3}, \mathbb{4}\}$. Systému množín $\mathbb{A} \setminus (\mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$ potom odpovedá množina $A \setminus (B \setminus C) = \mathbb{1} \cup \mathbb{3} \cup \mathbb{4}$.

Naozaj, nech E, F sú také podmnožiny množiny M, ktoré sa dajú vyjadriť v tvare konečného zjednotenia po dvoch disjunktných množín patriacich do systému množín $\mathbb{M} = \{\mathbb{1}, \mathbb{2}, \mathbb{3}, \mathbb{4}, \mathbb{5}, \mathbb{6}, \mathbb{7}, \mathbb{8}\}$. Ukážeme, že platí

$$E \setminus F = \bigcup (\mathbb{E} \setminus \mathbb{F})\,.$$

Symbolom $\mathbb{E}$ sme označili systém po dvoch disjunktných množín zo systému $\mathbb{M}$, ktorých zjednotením je množina E. Symbolom $\mathbb{F}$ sme označili systém po dvoch disjunktných množín zo systému $\mathbb{M}$, ktorých zjednotením je množina F.

Ešte sme použili operátor $\bigcup$, pomocou ktorého zapisujeme zjednotenie všetkých množín patriacich do daného systému množín. Ak napríklad $\mathbb{L} = \{L_1, \ldots, L_m\}$, potom $\bigcup \mathbb{L} = L_1 \cup \cdots \cup L_m$.

Najskôr ukážeme, že platí $E \setminus F \subseteq \bigcup (\mathbb{E} \setminus \mathbb{F})$. Nech $x \in E \setminus F$. Pretože $x \in E$, existuje také $\mathbb{k} \in \mathbb{E}$, že $x \in \mathbb{k}$. Ukážeme, že $\mathbb{k} \notin \mathbb{F}$. Sporom. Predpokladajme, že $\mathbb{k} \in \mathbb{F}$. Potom $x \in \mathbb{k} \subseteq \bigcup \mathbb{F} = F$. To je však spor s tým, že $x \notin F$. Tento spor ukazuje, že $\mathbb{k} \notin \mathbb{F}$. Tým sme overili, že $\mathbb{k} \in \mathbb{E} \setminus \mathbb{F}$. Preto $x \in \mathbb{k} \subseteq \bigcup (\mathbb{E} \setminus \mathbb{F})$. Inklúzia $E \setminus F \subseteq \bigcup (\mathbb{E} \setminus \mathbb{F})$ je tým dokázaná.

Teraz ukážeme, že $\bigcup (\mathbb{E} \setminus \mathbb{F}) \subseteq E \setminus F$. Nech $x \in \bigcup (\mathbb{E} \setminus \mathbb{F})$. Potom existuje $\mathbb{i} \in \mathbb{E} \setminus \mathbb{F}$ také, že $x \in \mathbb{i}$. Pretože $\mathbb{i} \in \mathbb{E}$, máme $x \in \mathbb{i} \subseteq \bigcup \mathbb{E} = E$, odkiaľ $x \in E$. Ukážeme, že $x \notin F$. Sporom. Predpokladajme, že $x \in F$. Potom existuje $\mathbb{j} \in \mathbb{F}$ také, že $x \in \mathbb{j}$. Teda $x \in \mathbb{i} \cap \mathbb{j}$. Tým sme ukázali, že $\mathbb{i} \cap \mathbb{j} \neq \emptyset$. Pretože $\mathbb{i}, \mathbb{j} \in \mathbb{M}$, pričom množiny zo systému $\mathbb{M}$ sú po dvoch disjunktné, platí $\mathbb{i} = \mathbb{j}$. To je spor, pretože $\mathbb{i} \in \mathbb{E} \setminus \mathbb{F}$, ale $\mathbb{j} \in \mathbb{F}$. Tento spor ukazuje, že $x \notin F$. Tým sme overili, že $x \in E \setminus F$. Inklúzia $\bigcup (\mathbb{E} \setminus \mathbb{F}) \subseteq E \setminus F$ je tým dokázaná.

Prípad, keď niektorá z množín E, F je prázdna, si premyslite samostatne. Z dokázaného vyplýva, že predchádzajúce úvahy vedúce k vyjadreniu množiny $A \setminus (B \setminus C)$ boli korektné. Podobným spôsobom sa dá pracovať aj s množinovým prienikom a množinovým zjednotením. Ukážeme to pre prienik.

Najskôr ukážeme, že platí $\mathbb{E} \cap \mathbb{F} \subseteq \bigcup(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})$. Nech $x \in E \cap F$. Pretože $x \in E$, existuje také $\mathbb{i} \in \mathbb{E}$, že $x \in \mathbb{i}$. Pretože $x \in F$, existuje také $\mathbb{j} \in \mathbb{F}$, že $x \in \mathbb{j}$. Pretože $x \in \mathbb{i} \cap \mathbb{j}$, máme $\mathbb{i} \cap \mathbb{j} \neq \emptyset$. Pretože $\mathbb{i}, \mathbb{j} \in \mathbb{M}$, pričom množiny zo systému $\mathbb{M}$ sú po dvoch disjunktné, platí $\mathbb{i} = \mathbb{j}$. Tým sme ukázali, že $\mathbb{i} \in \mathbb{F}$. Teda $\mathbb{i} \in \mathbb{E} \cap \mathbb{F}$. Odtiaľ $x \in \mathbb{i} \subseteq \bigcup(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})$. Inklúzia $E \cap F \subseteq \bigcup(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})$ je tým dokázaná.

Teraz ukážeme, že platí $\bigcup(\mathbb{E} \cap \mathbb{F}) \subseteq E \cap F$. Nech $x \in \bigcup(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})$. Potom existuje také $\mathbb{k} \in \mathbb{E} \cap \mathbb{F}$, že $x \in \mathbb{k}$. Odtiaľ máme $x \in E \cap F$. Inklúzia $\bigcup(\mathbb{E} \cap \mathbb{F}) \subseteq E \cap F$ je takto dokázaná.

Pre zjednotenie je dôkaz analogický, prenechávame ho čitateľovi.

Podobným spôsobom možno pristúpiť aj k vyjadreniu množiny $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$. Naozaj, keď postupujeme podľa návodu z videa, máme

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{1,2,3,4\} \setminus \{1,2,5,6\} = \{3,4\}, \\ A \cap C &= \{1,2,3,4\} \cap \{1,3,5,7\} = \{1,3\}, \\ (A \setminus B) \cup (A \cap C) &= \{3,4\} \cup \{1,3\} = \{1,3,4\}. \end{aligned}$$

Alebo tiež môžeme postupovať podľa našej úpravy, čo dáva

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \setminus \mathbb{B} &= \{\mathbb{1},\mathbb{2},\mathbb{3},\mathbb{4}\} \setminus \{\mathbb{1},\mathbb{2},\mathbb{5},\mathbb{6}\} = \{\mathbb{3},\mathbb{4}\}, \\ \mathbb{A} \cap \mathbb{C} &= \{\mathbb{1},\mathbb{2},\mathbb{3},\mathbb{4}\} \cap \{\mathbb{1},\mathbb{3},\mathbb{5},\mathbb{7}\} = \{\mathbb{1},\mathbb{3}\}, \\ (\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \cup (\mathbb{A} \cap \mathbb{C}) &= \{\mathbb{3},\mathbb{4}\} \cup \{\mathbb{1},\mathbb{3}\} = \{\mathbb{1},\mathbb{3},\mathbb{4}\}. \end{aligned}$$

Systému množín $(\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \cup (\mathbb{A} \cap \mathbb{C})$ potom odpovedá množina

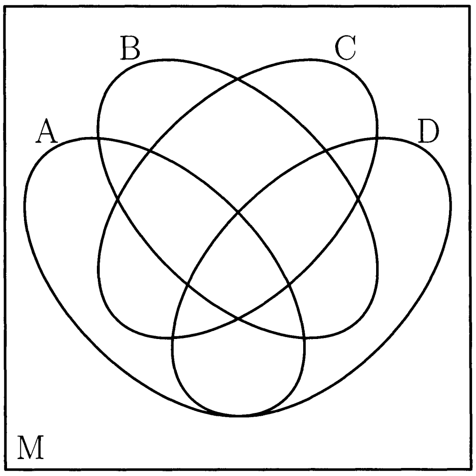
$$(A \setminus B) \cup (A \cap C) = \mathbb{1} \cup \mathbb{3} \cup \mathbb{4}.$$

Dostali sme rovnaký výsledok, ako pri vyjadrení množiny $A \setminus (B \setminus C)$. Tým sme vlastne dokázali množinovú rovnosť

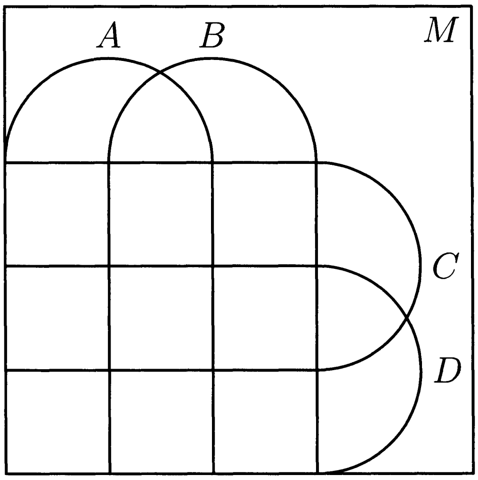
$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C),$$

ktorá platí pre ľubovoľné množiny A, B, C (ktoré sú podmnožinami základnej množiny M).

Úplne na záver poznamenajme, že Vennov diagram pre štyri množiny nie je možné realizovať pomocou štyroch kružníc. Na obrázku 6 vidíme pôvodný diagram pre štyri množiny, ako ho navrhol John Venn. Na obrázku 7 vidíme diagram používaný v študijnom materiáli [6].



Obrázok 6



Obrázok 7

Literatúra

[1] Bender, E. A., Williamson, S. G.: *A Short Course in Discrete Mathematics*. Dover Publications, Inc., 2005.

[2] Grimaldi, R. P.: *A review of discrete and combinatorial mathematics*. Pearson Education, Inc., 2004.

[3] Kubáček, Z.: *Matematika pre 1. ročník gymnázií, 1. časť*. SPN, Bratislava, 2009.

[4] Medek, V. a kol.: *Matematická terminológia*. SPN, Bratislava, 1977.

[5] Rosen, K. H.: *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill, 2012.

[6] Šedivý, J.: *Vybrané kapitoly z modernej matematiky. Zošit 1. Študijný text pre učiteľov 6. – 9. ročníka základnej deväťročnej školy*. SPN, Bratislava, 1972.

[7] Swanson, Ch. N.: *Proving Set Identities with One Example*. Fall Meeting of the MAA, Ohio Section, Ashland University, Ashland, Ohio, October 21–22, 2005.

[8] Venn, J.: *On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science [Fifth Series.] **10** (1880), 1 – 18.

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou grantu APVV-0715-12 Výskum efektívnosti metód inovácie výučby matematiky, fyziky a informatiky.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice,

e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Univerzita Konštantína Filozofa

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: obzory@ku.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

Objednávky a predplatné vybavuje
OMFI, Protonit s.r.o., Pod sokolom 6, 951 01 Nitrianske Hrnčiarovce
(e-mail: press@protonit.com)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
4/2015 ročník 44

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným prispením
Ministerstva školstva Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Vladimír Kutnár
Zástupca vydavateľa: Ivo Kluvanec
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 900 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 36 521 582
Sídlo vydavateľa: Pod Sokolom 6, 951 01 Nitrianske Hrnčiarovce
Dátum vydania periodickej tlače: november 2015

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences" is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe (http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

CONTENTS