# OBZORY

1/2015 (44)

*MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY*

# OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2015 ročník 44

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

# HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 1/2015 Volume 44

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2015 (44)

# Reálne čísla a Microsoft Excel

**Jozef Doboš**

**Abstract:** The aim of this article is to inform the teachers and students of secondary schools about the intricacies of internal computer workings with real numbers. It is surprising how many people think they found a bug in Microsoft Excel that ought to be promptly fixed by the developers. Experience shows, however, that it is not enough to tell these people they should read up on coding the real numbers in computers. In this article, alongside simple mathematics we have also chosen to represent the "computer numbers" on real axis which should help towards a better understanding.

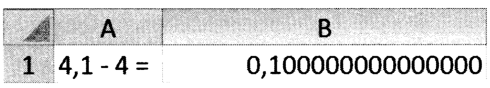
**Key words:** real numbers, Microsoft Excel

**Súhrn:** Cieľom tohto článku je priblížiť učiteľom a študentom strednej školy záludnosti práce počítača s reálnymi číslami. Je prekvapujúce, koľkí si myslia, že našli chybu v Microsoft Exceli, ktorú by mali vývojári urýchlene odstrániť. Skúsenosť ukazuje, že nestačí týmto ľuďom povedať, aby si prečítali niečo o kódovaní reálnych čísel v počítači. V tomto článku sme zvolili popri jednoduchej matematike aj znázorňovanie počítačových čísel na reálnej osi, čo by mohlo prispieť k lepšiemu porozumeniu.

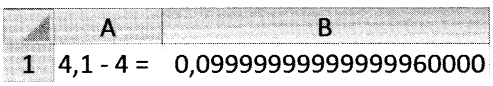
**Kľúčové slová:** reálne čísla, Microsoft Excel

**MESC:** N20

Pozrime sa na výpočet hodnoty rozdielu 4,1 – 4 v Microsoft Exceli. Ak nastavíme formátovanie bunky B1 tak, aby sa v nej uložené číslo zobrazovalo s presnosťou na 15 desatinných miest (obr. 1), dostávame očakávaný výsledok 0,1.

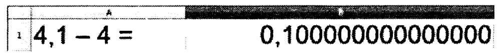



*Obrázok 1*

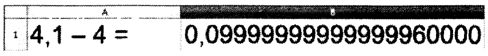



*Obrázok 2*

Ak však zvýšime zobrazovanú presnosť na 20 desatinných miest (obr. 2), potom namiesto očakávaného výsledku 0,1 dostávame 0,099 999 999 999 999 600 00. Stačilo zvýšenie na 16 desatinných miest, ale prišli by sme o pozorovanie, že presnosť čísel, ktoré sú zobrazované v Microsoft Exceli, je maximálne 15 platných cifier. Preto sú tie štyri nuly na konci. Podobné výpočty sa často objavujú na rôznych internetových fórach, pričom diskutujúci sú presvedčení, že našli chybu v Microsoft Exceli, ktorú by mali vývojári urýchlene odstrániť. Dokonca niektorí tvrdia, že Open Office to počíta správne. Pre týchto diskutujúcich sme na ten istý výpočet použili Calc (obr. 3 a 4) z balíka Open Office.




*Obrázok 3*

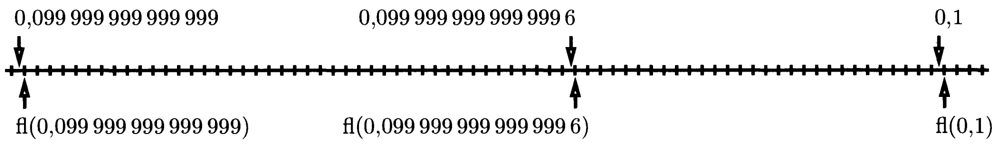



*Obrázok 4*

Treba si totiž uvedomiť, že tabuľkové kalkulátory menia spôsob zobrazovania čísel v bunke podľa nastavenia jej formátovania. Pritom číslo uložené v bunke sa jej formátovaním nemení[1]. Otázkou teda je, aké číslo je uložené v bunke B1. V skutočnosti Microsoft Excel aj Calc využívajú tú istú počítačovú reprezentáciu reálnych čísel – binárne kódovanie čísel v pohyblivej rádovej čiarke (z angl. floating point numbers). Konkrétne `binary64` (double precision), čo je jeden zo štandardných formátov podľa medzinárodnej normy IEEE-754. Z tohto dôvodu sa budeme zaoberať práve touto reprezentáciou reálnych čísel v počítači. Pomocou interaktívneho analyzátora na `babbage.cs.qc.cuny.edu/IEEE-754` možno zistiť, že číslo 0,1 je zakódované vo formáte `binary64` takto:

`0011111110111001100110011001100110011001100110011001100110011010`

Pretože binárne kódovanie je založené na dvojkovej číselnej sústave, v tomto kódovaní môžeme presne reprezentovať iba reálne čísla, ktoré sa dajú vyjadriť zlomkom, v ktorého čitateli je celé číslo a v menovateli je celočíselná mocnina čísla 2. Aj to nie všetky – vyplýva to z obmedzenia na 64 bitov. Reálne čísla, ktoré sa dajú presne reprezentovať uvedeným spôsobom, budeme pre potreby tohto článku nazývať *počítačové reálne čísla*. Číslo $0{,}1$ môžeme síce vyjadriť zlomkom (napríklad $\frac{1}{10}$), ale nie tak, aby v menovateli bola celočíselná mocnina čísla 2. Preto číslo $0{,}1$ nie je počítačovým reálnym číslom[2]. To znamená, že platí $\mathrm{fl}(0{,}1) \neq 0{,}1$, kde symbolom $\mathrm{fl}(x)$ označujeme počítačové reálne číslo, ktoré je na číselnej osi najblišśie k reálnemu číslu $x$. Vidíme to na obrázku 5, kde jednotlivé dieliky reprezentujú počítačové reálne čísla.




*Obrázok 5*

[1]Číslo môžeme vložiť do bunky aj ako reťazec alebo dátum, ale to je už o inom.

[2]Odtiaľ vyplýva, že v bunke B1 určite nie je uložené číslo $0{,}1$.

Teraz[3] vypočítame presnú hodnotu čísla fl(0,1). Vo formáte `binary64` máme k dispozícii 64 bitov. Tieto sú rozdelené do troch skupín takto:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{znamienko}}}{\mathtt{0}}\,\overbrace{\mathtt{01111111011}}^{\text{exponent}}\,\underbrace{\mathtt{1001100110011001100110011001100110011001100110011010}}_{\text{mantisa}}$$

Príslušné počítačové reálne číslo má potom tvar

$$(\text{znamienko})2^{\text{exponent}} \times \text{mantisa}. \tag{1}$$

Prvú skupinu tvorí jeden bit, v ktorom je uložené znamienko (pre záporné čísla je to `1`, inak je to `0`). Druhú skupinu tvorí 11 bitov, v ktorých je uložený exponent zväčšený o číslo 1023, čo je zapísané v binárnom kóde. Tento posun o číslo 1023 sa používa z dôvodu efektívnejšieho kódovania záporných hodnôt exponentu (nemusíme ukladať znamienko, čím sa ušetrí jeden bit). Keď teda chceme zistiť, aký exponent je zakódovaný v skupine `01111111011`, najskôr týchto 11 bitov prevedieme z binárneho kódu do desiatkovej sústavy a potom od výsledku odčítame číslo 1023.

$$\overset{\substack{2^{10}\\ |}}{0}\,\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{9}}}{1}\,\overset{\substack{2^{8}\\ \downarrow}}{1}\,\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{7}}}{1}\,\overset{\substack{2^{6}\\ \downarrow}}{1}\,\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{5}}}{1}\,\overset{\substack{2^{4}\\ \downarrow}}{1}\,\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{3}}}{1}\,\overset{\substack{2^{2}\\ |}}{0}\,\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{1}}}{1}\,\overset{\substack{2^{0}\\ \downarrow}}{1}$$

Teda exponent zakódovaný v skupine `01111111011` je

$$2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 - 1023 = -4.$$

Tretiu skupinu tvorí 52 bitov, v ktorých je uložená mantisa. Konkrétne ide o binárny kód tej časti mantisy, ktorá sa nachádza za rádovou čiarkou. Mantisa má totiž pred rádovou čiarkou číslicu 1, ktorú teda nemusíme ukladať, čím sa ušetrí jeden bit. Keď chceme zistiť, aká mantisa je zakódovaná v skupine

`1001100110011001100110011001100110011001100110011010`,

najskôr týchto 52 bitov prevedieme z binárneho kódu do desiatkovej sústavy a potom k výsledku pripočítame číslo 1. Nezabúdajme, že ide o cifry stojace napravo od rádovej čiarky, preto príslušné mocniny dvojky sú záporné.

$$\overset{\substack{2^{-1}\\ \downarrow}}{1}00\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{-4}}}{1}\overset{\substack{2^{-5}\\ \downarrow}}{1}00\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{-8}}}{1}\overset{\substack{2^{-9}\\ \downarrow}}{1}00\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{-12}}}{1}\overset{\substack{2^{-13}\\ \downarrow}}{1}00\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{-16}}}{1}\overset{\substack{2^{-17}\\ \downarrow}}{1}00\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{-20}}}{1}\overset{\substack{2^{-21}\\ \downarrow}}{1}00\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{-24}}}{1}\overset{\substack{2^{-25}\\ \downarrow}}{1}00\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{-28}}}{1}\overset{\substack{2^{-29}\\ \downarrow}}{1}00\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{-32}}}{1}\overset{\substack{2^{-33}\\ \downarrow}}{1}00\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{-36}}}{1}\overset{\substack{2^{-37}\\ \downarrow}}{1}00\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{-40}}}{1}\overset{\substack{2^{-41}\\ \downarrow}}{1}00\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{-44}}}{1}\overset{\substack{2^{-45}\\ \downarrow}}{1}00\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{-48}}}{1}\overset{\substack{2^{-49}\\ \downarrow}}{1}0\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{-51}}}{1}0$$

[3]Pri prvom čítaní možno tento odsek preskočiť.

Teda hľadaná mantisa je

$$\begin{aligned}
&2^{-1}+2^{-4}+2^{-5}+2^{-8}+2^{-9}+2^{-12}+2^{-13}+2^{-16}+2^{-17}+\\
&\quad+2^{-20}+2^{-21}+2^{-24}+2^{-25}+2^{-28}+2^{-29}+2^{-32}+2^{-33}+2^{-36}+\\
&\quad+2^{-37}+2^{-40}+2^{-41}+2^{-44}+2^{-45}+2^{-48}+2^{-49}+2^{-51}+1=\\
&\quad=\frac{3\,602\,879\,701\,896\,397}{2\,251\,799\,813\,685\,248}=\\
&\quad=1{,}600\,000\,000\,000\,000\,088\,817\,841\,970\,012\,523\,233\,890\,533\,447\,265\,625.
\end{aligned}$$

Teraz už máme všetko potrebné, aby sme mohli zistiť presnú hodnotu čísla $\mathrm{fl}(0{,}1)$. Podľa (1) máme

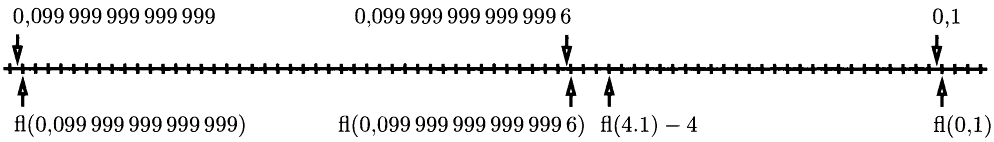
$$\begin{aligned}
&\mathrm{fl}(0{,}1)=\\
&=2^{-4}\cdot 1{,}600\,000\,000\,000\,000\,088\,817\,841\,970\,012\,523\,233\,890\,533\,447\,265\,625=\\
&=0{,}100\,000\,000\,000\,000\,005\,551\,115\,123\,125\,782\,702\,118\,158\,340\,454\,101\,562\,5.
\end{aligned}$$

Môže to byť problém? Pre bežného užívateľa určite nie. Programátori by však mali o tejto problematike vedieť viac (pozri [1] a [3]). Asi najznámejšia udalosť, pri ktorej (okrem iného) zohralo úlohu uloženie čísla 0,1 v počítači, je opísaná v [2]. Dňa 25. februára 1991, uprostred operácie Púštna búrka, zlyhal americký protiraketový systém Patriot. Iracká raketa Scud zničila kasárne americkej armády, usmrtila 28 vojakov a zranila ďalších 100. Systém Patriot sleduje svoj cieľ meraním času, ktorý odrazené radarové pulzy potrebujú na návrat od cieľa. Čas zaznamenávaný systémovými hodinami v desatinách sekundy sa vynásobí číslom 0,1, čím sa vypočíta čas v sekundách. Systém Patriot bol v prevádzke približne 100 hodín. Počas tejto doby dosiahla akumulovaná chyba hodnotu 0,34 sekundy. To spôsobilo posun predpokladanej polohy rakety Scud o 687 metrov.

Vráťme sa však k našej pôvodnej otázke: Aké číslo je uložené v bunke B1? Číslo 4 je síce počítačové reálne číslo, ale číslo 4,1 nie je. Preto Microsoft Excel pri výpočte rozdielu $4{,}1-4$ v skutočnosti počíta hodnotu $\mathrm{fl}(4{,}1)-4$. Konkrétne

$$\begin{aligned}
\mathrm{fl}(4{,}1)-4&=\frac{4\,616\,189\,618\,054\,758}{1\,125\,899\,906\,842\,624}-4=\\
&=0{,}099\,999\,999\,999\,999\,644\,728\,632\,119\,949\,907\,064\,437\,866\,210\,937\,5,
\end{aligned}$$

čo je počítačové reálne číslo (lebo $1\,125\,899\,906\,842\,624=2^{50}$). Jeho polohu môžeme znázorniť na číselnej osi, ako ukazuje obr. 6.




*Obrázok 6*

Počítačové reálne číslo $\mathrm{fl}(0{,}099\,999\,999\,999\,999\,6)$ je zakódované vo formáte `binary64` takto:

`0011111110111001100110011001100110011001100110011001100101111101`

Počítačové reálne číslo, ktoré vznikne výpočtom $\mathrm{fl}(4{,}1) - 4$, je zakódované vo formáte `binary64` takto:

`0011111110111001100110011001100110011001100110011001100110000000`

Medzi týmito počítačovými reálnymi číslami ležia ešte ďalšie dve počítačové reálne čísla (pozri obr. 6). Ako môžeme vidieť na obr. 7, Microsoft Excel sa nás pokúša presvedčiť, že platí $4{,}1 - 4 = 0{,}099\,999\,999\,999\,999\,6$. Súvisí to so zobrazovanou presnosťou Microsoft Excelu. Ako sme uviedli vyššie, je to maximálne na 15 platných cifier. Jednoduchou úpravou testovacej podmienky však môžeme prinútiť Microsoft Excel k inej odpovedi. Vidíme to na obr. 8.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 4,1 - 4 = | 0,09999999999999960000 |
| 2 | 0,099 999 999 999 999 6 = | 0,09999999999999960000 |
| 3 | B1 - B2 = | 0,00000000000000000000 |
| 4 | IF(B1=B2;TRUE;FALSE) = | TRUE |

*Obrázok 7*

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 4,1 - 4 = | 0,09999999999999960000 |
| 2 | 0,099 999 999 999 999 6 = | 0,09999999999999960000 |
| 3 | B1 - B2 = | 0,00000000000000000000 |
| 4 | IF(B1-B2=0;TRUE;FALSE) = | FALSE |

*Obrázok 8*

Možno ešte presvedčivejšie bude pozrieť si obr. 9 a 10.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 4,1 - 4 = | 0,09999999999999960000 |
| 2 | 0,099 999 999 999 999 6 = | 0,09999999999999960000 |
| 3 | B1 - B2 = | 0,00000000000000000000 |
| 4 | 2*(B1-B2) = | 8,32667268468867000000E-17 |

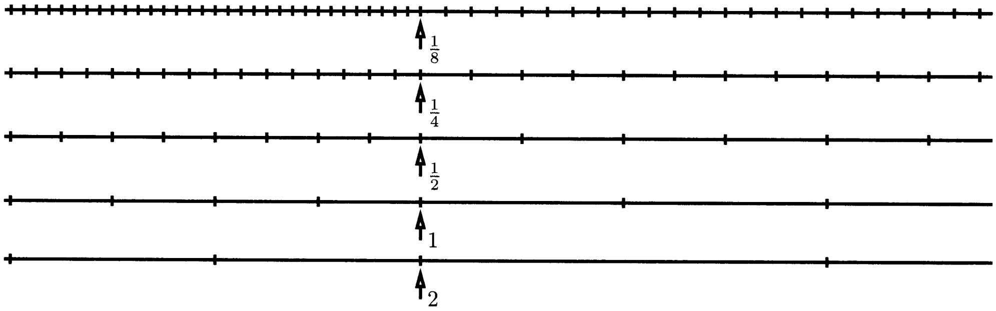
*Obrázok 9*

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 4,1 - 4 = | 0,09999999999999960000 |
| 2 | 0,099 999 999 999 999 6 = | 0,09999999999999960000 |
| 3 | B1 - B2 = | 0,00000000000000000000 |
| 4 | (B1-B2)/2 = | 2,08166817117217000000E-17 |

*Obrázok 10*

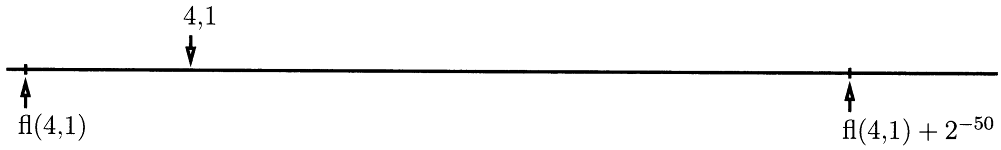
Vysvetlenie týchto javov by si však vyžadovalo hlbšie poznanie algoritmov Microsoft Excelu.

Na záver sa ešte zamyslíme nad otázkou, prečo je číslo $\mathrm{fl}(4{,}1) - 4$ bližšie k číslu $\mathrm{fl}(0{,}099\,999\,999\,999\,999\,6)$, a nie k číslu $\mathrm{fl}(0{,}1)$, ako by sme očakávali (pozri obr. 6). Musíme si uvedomiť, že počítačové reálne čísla nie sú na číselnej osi rozložené rovnomerne. Ich hustota sa mení v tých počítačových reálnych číslach, ktoré sú celočíselnými mocninami dvojky (pozri obr. 11).




*Obrázok 11*

Jednoducho, rozdiel $4{,}1 - \mathrm{fl}(4{,}1)$ je príliš veľký vzhľadom na hustotu počítačových reálnych čísel v okolí čísla $\mathrm{fl}(0{,}1)$; porovnaj obr. 6 a 12.




*Obrázok 12*

## Literatúra


[1] Goldberg, D.: *What Every Computer Scientist Should Know About Floating Point Arithmetic*, ACM Computing Surveys, 23 (1991), 5 – 48.

[2] Lam, B.: *The Patriot Missile Failure: Roundoff Error Kills 28*, `http://stanford.edu/~brianlam/work/wim_paper.pdf`.

[3] Overton, M. L.: *Numerical Computing with IEEE Floating Point Arithmetic*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.



**Poďakovanie:** Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/1331/12.



Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice

e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Univerzita Konštantína Filozofa

## Adresa redakcie

**Matematická a informatická časť**
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: stefan.tkacik@ku.sk)

**Fyzikálna časť**
Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

**Objednávky a predplatné vybavuje**
OMFI, Protonit s.r.o., Pod sokolom 6, 951 01 Nitrianske Hrnčiarovce
(e-mail: press@protonit.com)

## OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
## 1/2015 ročník 44

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným prispením
Ministerstva školstva Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Štefan Tkačik, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Vladimír Kutnár
Zástupca vydavateľa: Ivo Kluvanec
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 600 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 36 521 582
Sídlo vydavateľa: Pod Sokolom 6, 951 01 Nitrianske Hrnčiarovce
Dátum vydania periodickej tlače: máj 2015

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences"
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

# OBSAH



# CONTENTS