Úloha. Máme zistiť, pre ktoré reálne čísla x existuje limita $\lim_{n\to\infty} \cos(nx)$.

Riešenie. Potrebujeme tieto vzorce zo stredoškolskej matematiky:

$$\cos\varphi\cos\psi = \tfrac{1}{2}[\cos(\varphi+\psi) + \cos(\varphi-\psi)], \tag{1}$$
$$\cos(2\vartheta) = 2\cos^2\vartheta - 1. \tag{2}$$

Predpokladajme, že x je také reálne číslo, že existuje limita $\lim_{n\to\infty} \cos(nx)$.
Položme $\ell = \lim_{n\to\infty} \cos(nx)$.
Podľa (1) máme (symbolom n označujeme ľubovoľné prirodzené číslo)

$$\cos(nx)\cos(x) = \tfrac{1}{2}[\cos(nx+x) + \cos(nx-x)],$$

odkiaľ prechodom k limite pre $n \to \infty$ dostávame[1]

$$\ell\cos(x) = \tfrac{1}{2}(\ell+\ell) = \ell.$$

Ukážeme, že $\cos(x) = 1$. Sporom. Predpokladajme, že platí $\cos(x) \neq 1$. Potom z rovnosti $\ell\cos(x) = \ell$ vyplýva, že $\ell = 0$. Pretože podľa (2) platí (symbolom n označujeme ľubovoľné prirodzené číslo)

$$\cos(2nx) = 2\cos^2(nx) - 1,$$

prechodom k limite pre $n \to \infty$ odtiaľ dostávame

$$\ell = 2\ell^2 - 1,$$

čo je spor s tým, že $\ell = 0$. Tento spor ukazuje, že musí platiť $\cos(x) = 1$.
Riešením rovnice $\cos(x) = 1$ sú čísla tvaru $x = 2k\pi$, kde k je ľubovoľné celé číslo.

Pretože pre každé celé číslo k platí $\cos[n(2k\pi)] = 1$ (symbolom n označujeme ľubovoľné prirodzené číslo), limita $\lim_{n\to\infty} \cos(nx)$ existuje práve vtedy, keď $x = 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

---

[1] pretože $nx \pm x = (n \pm 1)x$