OBZORY

4/2014 (43)

# HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES

04/2014 Volume 43

REPRINT

# *MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY*

# OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2014 ročník 43

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

# HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 4/2014 Volume 43

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2014 (43)

# Rozklady

**Jozef Doboš**

**Abstract:** The aim of this work is to introduce the reader into the problem of partitions. Gradually, on isolated examples of models of this concept, we show its importance in Mathematics. In conclusion, we formulate a sufficiently general definition of a partition, which then will no longer be only a formal knowledge of a student. The impulse to write this article were some mistakes in study materials published on the Internet by teachers of Mathematics. This article is intended for prospective teachers of Mathematics as well as their teachers.

**Key words:** partitions, sets of numbers

**Súhrn:** Cieľom práce je uviesť čitateľa do problematiky rozkladov. Postupne na jednotlivých ukážkach izolovaných modelov tohto pojmu ukážeme jeho dôležitosť pre matematiku. V závere sformulujeme dostatočne všeobecnú definíciu rozkladu, ktorá potom už nebude pre študenta len formálnym poznatkom. Impulzom k napísaniu tohto článku boli niektoré chyby v študijných materiáloch, ktoré zverejnili na internete učitelia matematiky. Článok je určený študentom učiteľstva matematiky, ako aj ich učiteľom.

**Kľúčové slová:** rozklady, číselné množiny

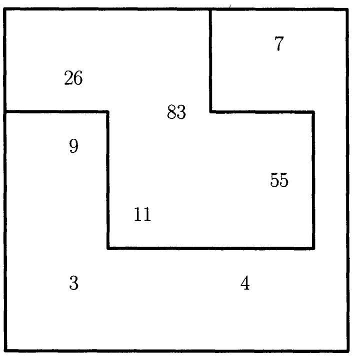
**MESC:** F40, F50

S rozkladmi sa stretávame pri rozdeľovaní objektov do skupín podľa pevne stanovených pravidiel. Začneme jednoduchými ukážkami rozkladov na jednej konkrétnej konečnej množine $X = \{3, 4, 7, 9, 11, 26, 55, 83\}$.

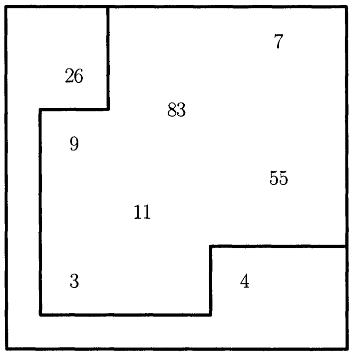
*Ukážka 1.* Do skupiny $A$ zaradíme všetky jednociferné čísla z množiny $X$ a do skupiny $B$ zaradíme všetky dvojciferné čísla z množiny $X$. Tým sme rozdelili prvky množiny $X$ do dvoch jej podmnožín $A = \{3, 4, 7, 9\}$, $B = \{11, 26, 55, 83\}$, pričom každý prvok množiny $X$ patrí práve do jednej z nich. To znamená, že platí: $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$. V takomto prípade budeme hovoriť, že množiny $A$, $B$ tvoria rozklad množiny $X$. Tento rozklad môžeme znázorniť graficky, ako vidíme na obrázku 1.

*Ukážka 2.* Do skupiny $C$ zaradíme všetky párne čísla z množiny $X$ a do skupiny $D$ zaradíme všetky nepárne čísla z množiny $X$. Ľahko vidieť, že každý prvok množiny $X$

patrí práve do jednej z množín $C = \{4, 26\}$, $D = \{3, 7, 9, 11, 55, 83\}$. Teda množiny $C$, $D$ tvoria ďalší rozklad množiny $X$. Grafické znázornenie tohto rozkladu je na obrázku 2.

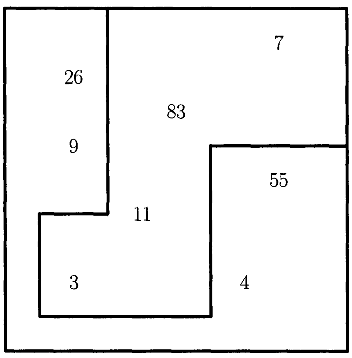



*Obrázok 1*

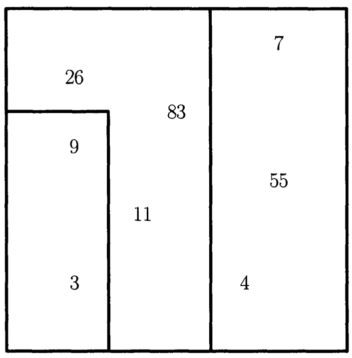



*Obrázok 2*

*Ukážka 3.* Do skupiny $E$ zaradíme tie čísla z množiny $X$, ktoré sú prvočíslami a do skupiny $F$ zaradíme tie čísla z množiny $X$, ktoré sú zloženými číslami. Ľahko vidieť, že každý prvok množiny $X$ patrí práve do jednej z množín $E = \{3, 7, 11, 83\}$, $F = \{4, 9, 26, 55\}$. Teda množiny $E$, $F$ tvoria ďalší rozklad množiny $X$. Grafické znázornenie tohto rozkladu je na obrázku 3.




*Obrázok 3*




*Obrázok 4*

*Ukážka 4.* Do skupiny $K$ zaradíme tie čísla z množiny $X$, ktoré sú deliteľné tromi, do skupiny $L$ zaradíme tie čísla z množiny $X$, ktorých zvyšok po delení číslom tri sa rovná 1 a do skupiny $M$ zaradíme tie čísla z množiny $X$, ktorých zvyšok po delení číslom tri sa rovná 2. Ľahko vidieť, že každý prvok množiny $X$ patrí práve do jednej z množín $K = \{3, 9\}$, $L = \{4, 7, 55\}$, $M = \{11, 26, 83\}$. Teda množiny $K$, $L$, $M$ tvoria ďalší rozklad množiny $X$. Grafické znázornenie tohto rozkladu je na obrázku 4. Platí teda: $X = K \cup L \cup M$, pričom množiny $K$, $L$, $M$ sú po dvoch disjunktné.

Predchádzajúce ukážky môžeme po istej modifikácii zmeniť na zaujímavé úlohy. Stačí študentom predložiť konkrétny rozklad a pýtať sa na pravidlo, pomocou ktorého bol vytvorený.

**Úloha**
Zistite, podľa akého pravidla vznikol rozklad $X = \{7, 11, 26, 55\} \cup \{3, 4, 9, 83\}$.

Všimnime si, že v predchádzajúcich ukážkach konečnosť množiny $X$ nebola vôbec podstatná. V ďalšej časti sa zameriame na niektoré ukážky rozkladov nekonečných množín, ako sú napríklad množina všetkých prirodzených čísel, alebo množina všetkých racionálnych čísel.

Ukážka 4 priamo súvisí so zvyškovými triedami modulo 3. Namiesto pôvodnej konečnej množiny $X$ budeme uvažovať množinu $\mathbb{N}$ všetkých prirodzených čísel.

*Ukážka 5.* Do množiny $S_0$ zaradíme tie prirodzené čísla, ktoré sú deliteľné tromi, do množiny $S_1$ zaradíme tie prirodzené čísla, ktorých zvyšok po delení číslom tri sa rovná 1 a do množiny $S_2$ zaradíme tie prirodzené čísla, ktorých zvyšok po delení číslom tri sa rovná 2. Tieto množiny zapíšeme pod seba takýmto spôsobom:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,\dots\}\\
S_0 &= \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24,\dots\}\\
S_1 &= \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, \dots\}\\
S_2 &= \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \dots\}
\end{aligned}
$$

Ľahko vidieť, že každý prvok množiny $\mathbb{N}$ patrí práve do jednej z množín $S_0$, $S_1$, $S_2$. Preto množiny $S_0$, $S_1$, $S_2$ tvoria rozklad množiny $\mathbb{N}$. Teda platí: $\mathbb{N} = S_0 \cup S_1 \cup S_2$, pričom množiny $S_0$, $S_1$, $S_2$ sú po dvoch disjunktné.

V nasledovnej ukážke uvidíme, že počet skupín v rozklade môže byť nekonečný.

*Ukážka 6.* Položme

$$
\begin{aligned}
T_0 &= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,\dots\}\\
T_1 &= \{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30,\dots\}\\
T_2 &= \{4, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60,\dots\}\\
T_3 &= \{8, 24, 40, 56, 72, 88, 104, 120,\dots\}\\
T_4 &= \{16, 48, 80, 112, 144, 176, 208, 240,\dots\}\\
T_5 &= \{32, 96, 160, 224, 288, 352, 416, 480,\dots\}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Do množiny $T_k$ sme zaradili tie prirodzené čísla, ktoré sú nepárnymi násobkami čísla $2^k$. Nie je ťažké overiť, že každý prvok množiny $\mathbb{N}$ patrí práve do jednej z množín

$T_0, T_1, T_2, \dots$ Preto množiny $T_0, T_1, T_2, \dots$ tvoria rozklad množiny $\mathbb{N}$. Teda platí: $\mathbb{N} = \bigcup_{k=0}^{\infty} T_k$, pričom tieto množiny $T_k$ sú po dvoch disjunktné.

S týmto rozkladom sa môžeme stretnúť pri dôkaze tvrdenia, že množiny $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$ majú rovnakú mohutnosť. Stačí overiť, že predpisom

$$f(n, k) = 2^{k-1}(2n - 1)$$

je definované zobrazenie $f\colon\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktoré je bijekciou.

*Ukážka 7.* Hľadáme rozklad množiny $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísel na intervaly s celočíselnými krajnými bodmi. Pretože $\mathbb{R} \neq \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k, k+1)$, otvorené intervaly netvoria hľadaný rozklad. Pre uzavreté intervaly síce platí $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\langle k, k+1\rangle$, tieto intervaly však nie sú po dvoch disjunktné. Teda ani uzavreté intervaly netvoria hľadaný rozklad. Nie je ťažké overiť, že jedným z možných rozkladov je

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle k, k+1),$$

kde $\langle k, k+1) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ k \leq x < k+1\}$.

Tento rozklad priamo súvisí s pojmom celá časť reálneho čísla, s ktorým sa môžeme stretnúť aj v učebnici pre stredné školy [5]. Označenie $[x]$ pre celú časť čísla $x$ zaviedol v roku 1808 Karol Fridrich Gauss v práci [2] takto:

> *Porro existente $x$ quantitate quacunque non integra, per signum $[x]$ exprimemus integrum ipsa $x$ proxime minorem, ita ut $x - [x]$ semper fiat quatitas positiva intra limites 0 et 1 sita.*

Dnes sa stále častejšie namiesto označenia $[x]$ pre celú časť čísla $x$ používa označenie $\lfloor x \rfloor$, ktoré v roku 1962 zaviedol Kenneth E. Iverson vo svojej učebnici [3].

*Ukážka 8.* Bude sa týkať Dedekindových rezov, s ktorými sa môžeme stretnúť pri konštrukcii reálnych čísel.

Najskôr uvedieme jednu z možných definícií tohto pojmu.

**Definícia**

Usporiadanú dvojicu $(A, B)$ nazveme Dedekindovým rezom, ak

(1) $\emptyset \neq A \subset \mathbb{Q}$ a $\emptyset \neq B \subset \mathbb{Q}$,
(2) $A \cup B = \mathbb{Q}$,
(3) $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a < b)$,
(4) $A$ nemá maximum, t. j. ku každému $a \in A$ existuje $a' \in A$ tak, že $a < a'$.

Z vlastností (2) a (3) bezprostredne vyplýva, že množiny $A$, $B$ tvoria rozklad množiny $\mathbb{Q}$. Ľahko sa tiež overí, že každému racionálnemu číslu $r$ môžeme priradiť Dedekindov rez $(A_r, B_r)$, kde

$$A_r = \{x \in \mathbb{Q}\colon\ x < r\}, \quad B_r = \{x \in \mathbb{Q}\colon\ x \geq r\}.$$

Ďalej je zvykom ukázať (skôr, ako sa začne budovať ucelená teória), že existujú aj iné Dedekindove rezy. Väčšinou sa na ilustráciu zvolia množiny $A'$ a $B'$, ktoré môžeme definovať napríklad takto: do množiny $A'$ dáme všetky záporné racionálne čísla, pričom z nezáporných racionálnych čísel tam dáme len tie, ktorých štvorec je menší než 2; do množiny $B'$ dáme všetky kladné racionálne čísla, ktorých štvorec je väčší než 2. Niektorí autori však chybne za Dedekindov rez prehlasujú usporiadanú dvojicu $(A'', B'')$, kde

$$A'' = \{x \in \mathbb{Q}\colon\ x^2 < 2\}, \quad B'' = \{x \in \mathbb{Q}\colon\ x^2 > 2\}.$$

Množiny $A''$, $B''$ síce tvoria rozklad množiny $\mathbb{Q}$, ale Dedekindov rez nie. Pretože nie je splnená vlastnosť (3). Naozaj, napríklad $0 \in A''$, $-2 \in B''$. Elegantne sa tejto chybe vyhli autori učebnice [1], ktorí dali prednosť množinám

$$A^* = \{x \in \mathbb{Q}\colon\ x^3 < 2\}, \quad B^* = \{x \in \mathbb{Q}\colon\ x^3 > 2\}.$$

Vráťme sa ešte k množine $A'$. Overenie toho, že množina $A'$ spolu s množinou $B'$ tvorí Dedekindov rez, ponechávajú autori učebných textov na čitateľa bez akéhokoľvek návodu. Overenie vlastnosti (4) by si však návod zaslúžilo: Pretože množina $A'$ obsahuje aj niektoré kladné čísla (napr. číslo 1), stačí ukázať, že pre každé kladné $a \in A'$ existuje $a' \in A'$ také, že $a < a'$. Nech $a \in A'$ je kladné racionálne číslo. Potom $a = p/q$, kde $p$ a $q$ sú také prirodzené čísla, pre ktoré platí $p^2/q^2 < 2$. Položme

$$a' = \frac{3p + 4q}{2p + 3q}.$$

Overenie toho, že $a'$ má požadované vlastnosti, je už rutinná záležitosť.

Posledná ukážka sa bude týkať množiny všetkých racionálnych čísel. Inšpiráciou nám bude jeden konkrétny materiál z internetu. Autor (stredoškolský učiteľ) uvádza takúto definíciu racionálneho čísla. Citujem:

> „Racionálnym číslom $x$ budeme nazývať taký zlomok $p/q$, ktorého čitateľ $p$ je celé číslo a menovateľ $q$ prirodzené číslo, a ktorý sa dá zapísať v základnom tvare, t. j. $p$ a $q$ sú nesúdeliteľné čísla.“

Bezprostredne za touto definíciou nasleduje text písaný kurzívou. Citujem:

> *„Z toho teda vyplýva, že racionálne číslo $x$ je vlastne množina rôznych zlomkov, ktoré sa dajú napísať v tom istom základnom tvare."*

Potom nasledujú *Poznámky*, z ktorých vyberám:

> „Prvok množiny racionálneho čísla budeme nazývať predstaviteľ množiny."
>
> „Všetci predstavitelia toho istého racionálneho čísla sú rovnocenní."

Za tým nasleduje *Niekolko ukážok*:

$$\begin{aligned} 1/2 &= \{1/2, 2/4, 3/6, 4/8, \dots, 12/24, \dots, 50/100, \dots\} \\ 3/4 &= \{3/4, 6/8, 9/12, \dots, 30/40, \dots, 75/100, \dots\} \\ -5/4 &= \{-5/4, -10/8, -15/24, \dots\} \end{aligned}$$

Je tu niekoľko vecí na zamyslenie sa. Racionálne číslo je podľa autora množina racionálnych čísel, medzi ktorými je aj toto číslo samotné. Ak však ideme definovať nejakú množinu, pri tomto akte už musia byť známe všetky objekty, ktoré chceme prehlásiť za jej prvky. Preto predchádzajúce rovnosti musíme interpretovať inak. Autor tu v skutočnosti používa rovnaké označenie pre dva rôzne objekty. To však môže viesť k nedorozumeniu. Je poľutovaniahodné, že takéto zápisy sa objavujú v materiáloch pre študentov.

Ďalej za povšimnutie stojí skutočnosť, že v predchádzajúcich rovnostiach sú (podľa autora) všetky zlomky navzájom rôzne.

Ukážeme, ako možno tento materiál upraviť tak, aby bol matematicky korektný.

*Ukážka 9.* Konštrukcia modelu racionálnych čísel začína vytvorením množiny symbolov, ktoré voláme zlomky a ktoré zapisujeme v tvare

$$\frac{m}{n}, \quad \text{alebo} \quad m/n, \tag{1}$$

kde $m$ je celé číslo a $n$ je prirodzené číslo (pozri [4]). Rovnosť zlomkov definujeme takto:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \text{ práve vtedy, keď } \quad (m = p \text{ a súčasne } n = q).$$

Všimnime si, že túto definíciu môžeme vyjadriť pomocou usporiadaných dvojíc: $m/n = p/q$ práve vtedy, keď platí $(m, n) = (p, q)$. Zlomky sme v skutočnosti mohli definovať ako usporiadané dvojice, len namiesto zápisu $(m, n)$ by sme používali zápis (1).

Racionálne čísla môžeme reprezentovať pomocou zlomkov. Zámerne sme nepovedali „definovať", pretože rôzne zlomky môžu reprezentovať to isté racionálne číslo. Napríklad zlomky $1/2$ a $2/4$ reprezentujú to isté racionálne číslo $0,5$. Vytvoríme teda taký rozklad množiny zlomkov, aby každá skupina tohto rozkladu reprezentovala práve jedno racionálne číslo. Členy tohto rozkladu potom budeme pokladať za model racionálnych čísel.

K tomu budeme potrebovať dve veci: definovať pojem zlomku v základnom tvare a dosiahnuť, aby v tomto modeli množina racionálnych čísel obsahovala v nejakom zmysle všetky celé čísla.

Ľubovoľné celé číslo $k$ môžeme reprezentovať pomocou zlomku $k/1$, ktorý budeme zároveň pokladať za zlomok v základnom tvare. Pre všetky ostatné zlomky definujeme tento pojem takto: hovoríme, že zlomok $p/q$ je v základnom tvare, ak čísla $p$ a $q$ sú nesúdeliteľné.

Označme symbolom $X$ množinu všetkých zlomkov a symbolom $I$ množinu všetkých zlomkov v základnom tvare. Pre každé $i \in I$ položme

$$[i] = \{x \in X\colon \text{ zlomky } i \text{ a } x \text{ reprezentujú to isté racionálne číslo}\}.$$

Potom $X = \bigcup\limits_{i \in I} [i]$ je hľadaný rozklad množiny $X$.

Pretože niektorí autori ešte stále používajú označenie $[x]$ pre celú časť reálneho čísla $x$, je namieste istá dávka opatrnosti. Odporúčame prejsť na modernejšie označenie celej časti v tvare $\lfloor x \rfloor$. Hranaté zátvorky sa vo vyššej matematike často používajú práve v súvislosti s rozkladmi, napríklad pri faktorizácii vektorového priestoru vzhľadom na jeho podpriestor.

Keď sa vrátime k vyššie spomínanému materiálu z internetu, tam uvedené ukážky budú mať po úprave tvar:

$$\begin{aligned}
[1/2] &= \{1/2, 2/4, 3/6, 4/8, \dots, 12/24, \dots, 50/100, \dots\}\\
[3/4] &= \{3/4, 6/8, 9/12, \dots, 30/40, \dots, 75/100, \dots\}\\
[-5/4] &= \{-5/4, -10/8, -15/24, \dots\}
\end{aligned}$$

Článok ukončíme definíciou rozkladu. Rozklad množiny $X$ je taký (neprázdny) systém jej neprázdnych podmnožín $\mathscr{P} = \{P_i\}_{i \in I}$, že každý prvok množiny $X$ leží práve v jednej z množín tohto systému. To znamená, že rozklad množiny $X$ je taký (neprázdny) systém jej neprázdnych podmnožín $\mathscr{P} = \{P_i\}_{i \in I}$, pre ktorý platí

$$X = \bigcup_{i \in I} P_i,$$

pričom tieto množiny sú po dvoch disjunktné, t. j. $P_k \cap P_n = \emptyset$ pre $k \neq n$.

Množina $I$ sa volá množina indexov a môže byť konečná alebo nekonečná.

## Literatúra

[1] Buck, R. C., Buck, E. F.: *Advanced Calculus*, McGraw-Hill, Inc., 1978.
[2] Gauss, C. F.: *Theorematis arithmetici demonstratio nova*, Comment. Soc. Regiae Sci. Göttingen, (16) (1808), 1 – 8.
[3] Iverson, K. E.: *A Programming Language*, John Wiley & Sons, Inc., 1962.
[4] Lazebnik, F.: *Notes on Rational and Real Numbers*, University of Delaware, Newark, 2010, `http://www.math.udel.edu/~lazebnik`.
[5] Odvárko, O., Ryšánková, M.: *Matematika pre 2. ročník gymnázia. Funkcie II*, SPN, Bratislava, 1985.

**Poďakovanie:** Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/1331/12.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

## Adresa redakcie

**Matematická a informatická časť**
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: jan.guncaga@ku.sk)

**Fyzikálna časť**
Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

**Objednávky a predplatné vybavuje**
Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: press@protonit.com)

**OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**
**4/2014 ročník 43**

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným prispením
Ministerstva školstva Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Ján Gunčaga, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Vladimír Kutnár
Zástupca vydavateľa: Ivo Kluvanec
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 600 kusov
Periodicita vydávania: štvrťročník
IČO vydavateľa: 36 521 582
Sídlo vydavateľa: Pod Sokolom 6, 951 01 Nitrianske Hrnčiarovce
Dátum vydania periodickej tlače: november 2014

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences"
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

# OBSAH



# CONTENTS