

Postupnosť $(x, x^2, x^3, \dots)$ nie je Cauchyovská v priestore $C[0, 1]$

Pre každé prirodzené číslo n definujeme funkciu $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ predpisom $f_n(x) = x^n$ pre každé $x \in [0, 1]$. Ukážeme, že postupnosť $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ nie je Cauchyovská.

Pripomeňme si, že norma funkcie $f \in C[0, 1]$ je definovaná predpisom

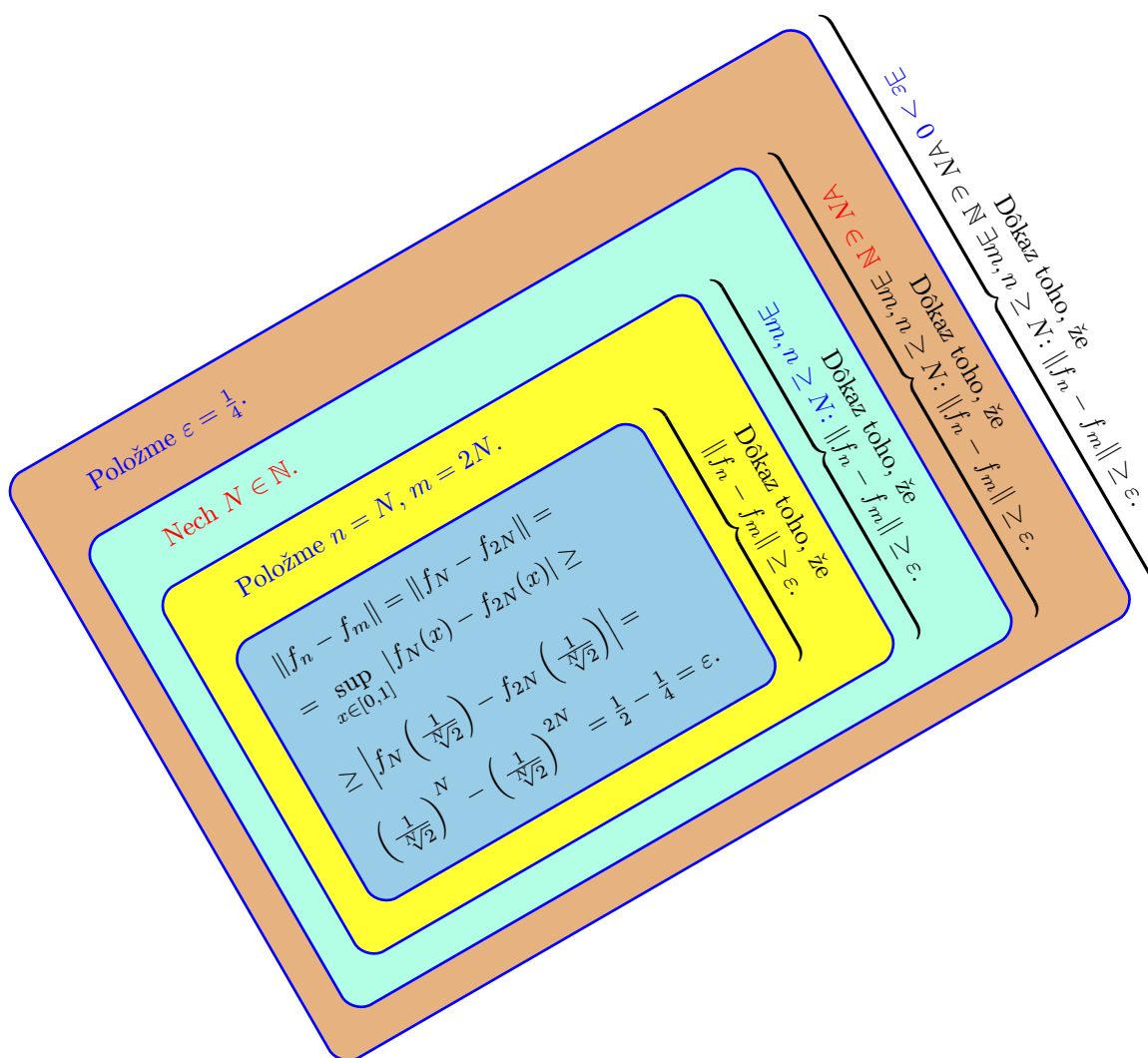
$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}.$$

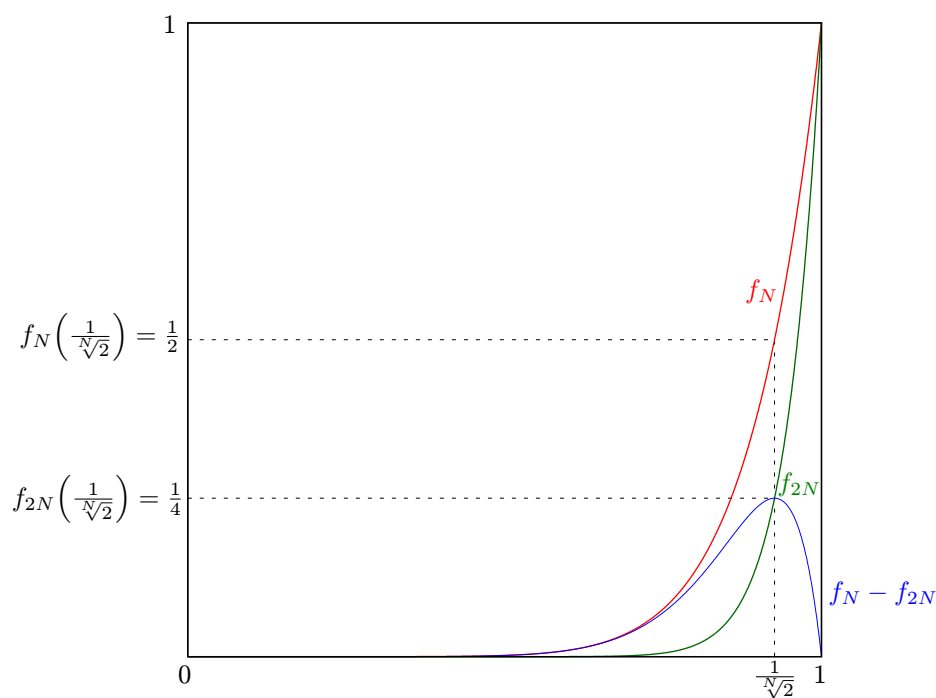
Postupnosť $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ je Cauchyovská, ak

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N : \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Postupnosť $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ nie je Cauchyovská, ak

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists m, n \geq N : \|f_n - f_m\| \geq \varepsilon.$$





Na záver ukážeme, že postupnosť $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ konverguje bodovo k funkcii f , ktorá je definovaná pre každé $x \in [0, 1]$ predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Konvergenca je zrejmá pre $x = 0$ a pre $x = 1$.

Predpokladajme, že $x \in (0, 1)$. Pre každé prirodzené číslo n položíme $a_n = x^n$.

Postupnosť $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ je klesajúca a zdola ohraničená, preto má limitu.

Položíme

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Potom z rovnosti $a_{n+1} = a_n \cdot x$, ktorá platí pre každé prirodzené číslo n , dostávame $a = a \cdot x$, odkiaľ $a = 0$.

Pretože $x \in (0, 1)$ bolo ľubovoľné, konvergenca postupnosti $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ k funkcii f je dokázaná.