

# OBSZORY

4/2013 (42)

*MATEMATIKY  
FYZIKY a  
INFORMATIKY*

**OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY  
A INFORMATIKY 4/2013 ročník 42**

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,  
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

**HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS  
AND COMPUTER SCIENCES 4/2013 Volume 42**

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and  
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

**Fundavit: Štefan Znárn, Beloslav Riečan et Daniel Klivanec**

**Editors in Chief:** Jozef Doboš (Mathematics and Computer Sciences)  
Daniel Klivanec (Physics)

**International Editorial Board:**

Giuliana Cavagioni (Italy)	Ján Pišút (Slovakia)
Anatolij Dvurečenskij (Slovakia)	Adam Plocki (Poland)
Gábor Galambos (Hungary)	Zdeněk Půlpán (Czech republic)
Juraj Hromkovič (Switzerland)	Ladislav Emanuel Roth (USA)
Hans Jordens (Netherland)	Ivo Volf (Czech republic)
László Nána (Hungary)	Lubomír Zelenický (Slovakia)

**Executive Editors:** Ján Guňa (Mathematics and Computer Sciences)  
Aba Teleki (Physics)

**Editorial Board:**

**Mathematics and Computer Sciences:**

Katarína Bachratá	Zbyněk Kubáček	Tomáš Lengyelfalusi	Milan Matejdes
Vojtech Bálint	Jozef Kuzma	Peter Maličský	Peter Vrábel
Jozef Fulier	Ladislav Kvasz	Mariana Marčoková	Milan Turčáni

**Physics:**

Jozef Beňuška	Ivan Červeň	Zuzana Ješková	Endre Szabó
Ivo Čáp	Stanislav Holec	Dalibor Krupa	Vladimír Šebeň
Peter Čerňanský	Anna Jankovychová	Viera Lapitková	Bohumil Vybíral

**Reviewers:**

**Mathematics and Computer Sciences:**

Ružena Blašková	Mária Kmeťová	Beloslav Riečan	Marián Trenkler
Radoslav Harman	Jaroslava Mikulecká	Štefan Solčan	Peter Vrábel

**Physics:**

Peter Demkanin	Árpád Kecskés	Miroslav Kolesík	Miroslava Ožvoldová
Peter Hanisko	Ján Klíma	Igor Medveď	Mária Rakovská

---

## Príbeh o skúške správnosti

Jozef Doboš

**Abstract:** The aim of this paper is to demonstrate that verification of a solution is possible even if the problem has infinitely many solutions.

**Key words:** checking a solution, radical equations and inequalities

**Súhrn:** Cieľom práce je ukázať, že skúšku správnosti môžeme robiť aj v prípade, keď úloha má nekonečne veľa riešení.

**Kľúčové slová:** skúška správnosti, iracionálne rovnice a nerovnice

**MESC:** H30, I20

Nedávno som sa z jednej učebnice matematiky dozvedel, že pri úlohách s nerovnicami namiesto skúšky správnosti robíme len akési overenie správnosti riešenia. Autorka dáva aj konkrétny návod: „Overenie robíme tak, že vyberieme jeden z koreňov nerovnice, dosadíme ho do ľavej a pravej strany nerovnice a zistujeme, či pre získané hodnoty platí uvedená nerovnosť.“ Taký istý návod môžeme nájsť aj v niektorých zahraničných materiáloch, napríklad v knihe [3] na strane 21.

Položme si teda otázku, či môžeme urobiť skúšku správnosti aj v prípade, keď riešenie nerovnice je nekonečne veľa. Ukážeme na príklade, že sa to dá.

Použijeme formu fiktívneho dialógu medzi osobami A a B. Takýto spôsob výkladu použil prof. Hutchings vo svojom študijnom materiáli [5] pri vysvetľovaní dôkazov.

**A:** Riešil som iracionálnu nerovnicu  $\sqrt{x+1} > x-1$  a zistil som, že jej oborom pravdivosti je interval  $\langle -1, 3 \rangle$ . Chcem urobiť skúšku správnosti. To znamená, že chcem dokázať nasledujúce tvrdenie:

Pre každé reálne číslo  $x$  z intervalu  $\langle -1, 3 \rangle$  platí  $\sqrt{x+1} > x-1$ .

**B:** Si si istý, že je to pravda? Naozaj si sa nepomýlil?

**A:** Dobre, tak skús vybrať nejaké číslo  $x$  z intervalu  $\langle -1, 3 \rangle$  a ja ti ukážem, že tvrdenie  $\sqrt{x+1} > x-1$  je pravdivé.

**B:** Tak vyskúšaj  $x = 2$ .

**A:** To je ľahké. Pretože  $\sqrt{2+1} = \sqrt{3}$  a  $2-1 = 1$ , zrejme platí  $\sqrt{2+1} > 2-1$ .

**B:** Teraz zvolím číslo  $x = -0,213$ , aby si to nemal také jednoduché.

**A:** Pretože  $\sqrt{-0,213 + 1} = \sqrt{0,787} > 0$  a  $-0,213 - 1 = -1,213 < 0$ , máme  $\sqrt{-0,213 + 1} > 0 > -0,213 - 1$ .

**B:** No dobre, ukázal si, že tvrdenie  $\sqrt{x + 1} > x - 1$  je pravdivé pre  $x = 2$  a pre  $x = -0,213$ . Ale interval  $\langle -1, 3 \rangle$  obsahuje nekonečne veľa čísel, ktoré by sme mali dosadiť za  $x$ . Ako ukážeš, že to môžeš urobiť pre každé z nich?

**A:** Nech teda  $x$  je pevne zvolené číslo z intervalu  $\langle -1, 3 \rangle$ .

**B:** Ktoré číslo?

**A:** Úplne ľubovoľné. Nezáleží na tom, ktoré. Idem ti ukázať, že pre toto číslo  $x$  platí  $\sqrt{x + 1} > x - 1$ , pričom využijem iba fakt, že číslo  $x$  leží v intervale  $\langle -1, 3 \rangle$ .

**B:** Tak to som zvedavý.

**A:** Najskôr si všimni, že pre každé reálne číslo  $r$  z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  platí  $\sqrt{r} \geq r$ . Potom pre  $r = x + 1$  platí  $\sqrt{x + 1} \geq x + 1$ . Pretože zrejme  $x + 1 > x - 1$ , máme  $\sqrt{x + 1} > x - 1$ . Nesmieme však zabudnúť, že to platí len pre  $r$  z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ , čiže pre  $x$  z intervalu  $\langle -1, 0 \rangle$ .

**B:** No, ale sľúbil si, že využiješ iba fakt, že číslo  $x$  leží v intervale  $\langle -1, 3 \rangle$ . To sa ti zatiaľ nepodarilo.

**A:** Ale ty zase musíš uznať, že mám aspoň čiastočný výsledok. Ukázal som, že platí  $\sqrt{x + 1} > x - 1$ , pričom som využil iba fakt, že číslo  $x$  leží v intervale  $\langle -1, 0 \rangle$ .

**B:** Dobre, dobre. Ale čo keď číslo  $x$  leží v intervale  $(0, 3)$ ?

**A:** Ukážem ti, že aj pre takéto  $x$  platí  $\sqrt{x + 1} > x - 1$ . Vlastne ukážem, že pre takéto  $x$  platí  $\sqrt{x + 1} - x + 1 > 0$ . Bude ti to stačiť?

**B:** Súhlasím, tieto dve nerovnosti hovoria to isté. Ale už začni!

**A:** Vydrž ešte chvíľku. Všimni si, že keď vo výraze  $\sqrt{x + 1} - x + 1$  nahradím číslo  $x$  číslom 3, dostanem  $\sqrt{3 + 1} - 3 + 1 = \sqrt{4} - 2 = 2 - 2 = 0$ . Ak sa teda dívam na výraz  $\sqrt{x + 1} - x + 1$  ako na výraz s premennou, môžem nerovnosť  $\sqrt{x + 1} - x + 1 > 0$  prepísať do tvaru  $f(x) > f(3)$ .

**B:** Už si ma úplne doplietol. Najskôr sme sa dohodli, že  $x$  je pevne zvolené číslo z intervalu  $\langle -1, 3 \rangle$ . A teraz zrazu chceš, aby  $x$  bola premenná.

**A:** Máš pravdu, musím ísť na teba opatrnejšie. Dohodnime sa, že symbolom  $f(r)$  budeme označovať výraz  $\sqrt{r+1} - r + 1$ , kde  $r$  je premenná. Tento výraz má zmysel pre každé reálne číslo  $r \geq -1$ . Pritom pre naše číslo  $x$  máme  $f(x) = \sqrt{x+1} - x + 1$  a pre číslo 3 máme  $f(3) = \sqrt{3+1} - 3 + 1 = 0$ . Už rozumieš?

**B:** Ako tak. Skús pokračovať, možno to bude potom jasnejšie.

**A:** Ukážem, že pre každé reálne číslo  $s > x$  platí  $f(x) > f(s)$ . Pretože naše číslo  $x$  leží v intervale  $(0, 3)$ , voľbou  $s = 3$  odtiaľ dostaneme  $f(x) > f(3)$ .

**B:** Rozumiem, takže teraz povieš: Nech  $s$  je pevne zvolené reálne číslo, ktoré je väčšie ako  $x$ .

**A:** Presne tak. Pretože  $s > x > 0$ , výrazy  $f(x)$  a  $f(s)$  majú zmysel. Ukážem, že platí  $f(x) - f(s) > 0$ . Rozumieš?

**B:** Áno, nerovnosť  $f(x) - f(s) > 0$  hovorí presne to isté, ako nerovnosť  $f(x) > f(s)$ . Pokračuj!

**A:** Tak sleduj tieto úpravy:

$$\begin{aligned} f(x) - f(s) &= (\sqrt{x+1} - x + 1) - (\sqrt{s+1} - s + 1) = \\ &= \sqrt{x+1} - \sqrt{s+1} + s - x = \\ &= \frac{(x+1) - (s+1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{s+1}} + s - x = \\ &= \frac{x-s}{\sqrt{x+1} + \sqrt{s+1}} + s - x = \\ &= (s-x) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{s+1}} \right). \end{aligned}$$

**B:** To sa mi vôbec nepáči! Kde si vzal lomený výraz?

**A:** Ale veď to som len použil známy vzorec  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ . V prípade, že  $a+b \neq 0$ , môžeme ho prepísať do tvaru

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}.$$

Teraz stačí dosadiť  $a = \sqrt{x+1}$  a  $b = \sqrt{s+1}$ .

**B:** To si mal hneď povedať, že budeš používať takéto finty!

**A:** A ako som vybral pred zátvorku výraz  $s - x$ , to ti nerobilo problémy?

**B:** Až taký nechápavý nie som! To predsa zvládne každý.

**A:** Nemusíš sa hneď urážať. Veď už sme takmer hotoví. Zostáva iba overiť, že obidva činitele sú kladné. Pretože  $s > x$ , zrejme  $s - x > 0$ . Pretože  $x > 0$ , zrejme  $\sqrt{x+1} > 1$ . Teda (s prihliadnutím na fakt, že  $\sqrt{s+1} \geq 0$ ) platí

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{s+1}} < 1.$$

Teraz už ľahko vidieť, že

$$1 - \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{s+1}} > 0.$$

A to je všetko.

**B:** No, znelo to presvedčivo. Ale ja sa aj tak budem musieť ešte raz na to pozrieť. Nedá sa ti vo všetkom veriť, už ťa natoľko poznám.

V druhej časti článku sa pozrieme na to, ako treba doplniť „overenie“ (spomínané v úvode) tak, aby z toho bola korektná skúška správnosti. Budeme sa odvolávať na Bolzanovu vetu, ktorá hovorí, že ak spojitá reálna funkcia definovaná na uzavretom ohraničenom intervale nadobúda v krajných bodoch tohto intervalu nenulové hodnoty majúce rôzne znamienka, potom vo vnútri tohto intervalu musí nadobúdať nulovú hodnotu.

Budeme uvažovať nerovnicu v tvare

$$f(x) > 0, \tag{1}$$

kde  $f$  je nejaká elementárna funkcia. Pretože elementárna funkcia je spojitá v každom bode svojho definičného oboru, z Bolzanovej vety vyplýva, že platí: Ak  $I$  je interval, na ktorom je funkcia  $f$  definovaná a na ktorom nadobúda len nenulové hodnoty, potom

buď  $f(x) > 0$  pre všetky  $x \in I$ , alebo  $f(x) < 0$  pre všetky  $x \in I$ .

Na základe toho môžeme odporúčať takýto postup:

a) Nájďme všetky korene rovnice  $f(x) = 0$  a v prípade potreby urobíme skúšku správnosti.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Riešeniu rovníc sme sa v tomto článku podrobne nevenovali. Pripomeňme si iba, že pri úpravách rovnice vlastne prechádzame k novej rovnici, pričom používame ekvivalentné a dôsledkové úpravy. Z tohto dôvodu obor pravdivosti pôvodnej rovnice je podmnožinou oboru pravdivosti novej rovnice. Preto pri použití dôsledkových úprav robíme skúšku správnosti. Logicko-množinový rámec riešenia rovníc je podrobne vysvetlený v študijnom materiáli [6], str. 110–116. Pre ďalšie štúdium tiež odporúčame učebnicu [1], Lesson 13–3: Solving Equations as Proofs.

- b) Ak po vynechaní koreňov rovnice  $f(x) = 0$  z definičného oboru funkcie  $f$  zostanú intervaly, pre každý z nich stačí urobiť „overenie“ tak, ako bolo uvedené v úvode článku. Obor pravdivosti nerovnice  $f(x) > 0$  bude potom zjednotením tých intervalov, ktoré úspešne prešli „overením“.

Ukážeme si to na príklade. Na štvrtej Medzinárodnej matematickej olympiáde v roku 1962 žiaci riešili nasledujúcu úlohu (pozri [4]).

### Úloha

Nájdite všetky reálne čísla  $x$ , pre ktoré platí:  $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$ .

*Riešenie.* Pretože musí platiť  $3-x \geq 0$  a  $x+1 \geq 0$ , definičným oborom danej nerovnice je interval  $\langle -1, 3 \rangle$ .

Teraz vyriešime rovnicu  $f(x) = 0$ , kde  $f(x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} - \frac{1}{2}$ . Túto časť (vrátane skúšky správnosti) prenecháme čitateľovi. Len prezradíme, že táto rovnica má jediný koreň

$$x = \frac{8 - \sqrt{31}}{8}.$$

Keď z definičného oboru danej nerovnice vynecháme túto hodnotu, zostanú nám dva intervaly:

$$\left\langle -1, \frac{8-\sqrt{31}}{8} \right\rangle \text{ a } \left( \frac{8-\sqrt{31}}{8}, 3 \right).$$

Z prvého intervalu vyberieme napr.  $x = -1$  a z druhého napr.  $x = 3$ . Pretože

$$f(-1) = \sqrt{3 - (-1)} - \sqrt{-1 + 1} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} > 0,$$

$$f(3) = \sqrt{3 - 3} - \sqrt{3 + 1} - \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2} < 0,$$

oborom pravdivosti danej nerovnice je interval  $\left\langle -1, \frac{8-\sqrt{31}}{8} \right\rangle$ .

Poznamenajme, že namiesto krajných bodov intervalov sme mohli vybrať body na overenie naozaj ľubovoľným spôsobom, napr.  $x = 0$  pre prvý interval a  $x = 1$  pre druhý interval. Museli by sme však najskôr ukázať, že platí

$$0 < \frac{8-\sqrt{31}}{8} < 1.$$

V literatúre sa pre túto metódu zaužívali názvy *metóda intervalov*, príp. *metóda nulových bodov* (pozri napr. [2]).

Na záver uvedieme niečo pre skalných zástancov skúšky správnosti. V prvej ukážke môžeme vidieť autentické riešenie jedného študenta. Ak študent vykoná skúšku správnosti, utvrdí sa v tom, že počítal správne. Je to však naozaj tak?

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 1 \quad / \text{ " }^2 \\
 x+5 + 2x+8 = 1 \\
 3x+13 = 1 \\
 3x = -12 \\
 x = -4
 \end{array}$$

V druhej ukážke (ktorá je prevzatá z knihy [2]) vidieť, že niekedy študentovi aj pri nesprávnom výsledku skúška správnosti vyjde:

„Riešenie“      „Skúška správnosti“

$$\begin{array}{ll}
 \sqrt{x^2+4} = 5 & \sqrt{3^2+4} = 5 \\
 x+2 = 5 & 3+2 = 5 \\
 x = 3 & 5 = 5
 \end{array}$$

Podobný príklad možno nájsť aj v knihe [7], str. 81 – 82.

## L i t e r a t ú r a

- [1] Susan A. Brown, et al.: *UCSMP Algebra*, Volume 2: Chapters 7–13, Wright Group/McGraw-Hill, 2004.
- [2] Doboš, J.: *Rovnice a nerovnice*. Bolchazy-Carducci Publishers, Inc. Wauconda, Illinois, USA, 2003. <http://web.science.upjs.sk/jozefdobos/wp-content/uploads/2012/02/2003b.pdf>
- [3] Gloag, A., Farbizio, A., Gloag, A., Kramer, M.: *Basic Algebra*. CK-12 Foundation, 2011. <http://www.ck12.org/book/Basic-Algebra/>
- [4] Horák, K., Müller, V., Vrba, A.: *Úlohy mezinárodných matematických olympiád*. SPN, Praha, 1986.
- [5] Hutchings, M.: *Introduction to mathematical arguments*. University of California, Berkeley, 2003. <http://math.berkeley.edu/~hutching/teach/proofs.pdf>
- [6] Šedivý, J.: *Vybrané kapitoly z modernej matematiky*, zošit 1. Študijný text pre učiteľov 6.-9. ročníka základnej deväťročnej školy, SPN, Bratislava, 1972.
- [7] White, W. F.: *A Scrap-Book of Elementary Mathematics*. The Open Court Publishing Company, Chicago, 1908. <http://archive.org/details/cu31924064186657>

**PodĎakovanie:** Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/1331/12.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta,  
Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: [jozef.dobos@upjs.sk](mailto:jozef.dobos@upjs.sk)



Jednota slovenských matematikov a fyzikov  
Matematický ústav SAV  
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

---

### **Adresa redakcie**

#### **Matematická a informatická časť**

Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok  
(e-mail: jan.guncaga@ku.sk)

#### **Fyzikálna časť**

Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra  
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

#### **Objednávky a predplatné vybavuje**

Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra  
(e-mail: press@protonit.com)

## **OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2013 ročník 42**

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci  
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným príspevom

Ministerstva školstva Slovenskej republiky

Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Klivanec

Výkonní redaktori: Ján Gunčaga, Aba Teleki

Technická redakcia: Martin Papčo, Vladimír Kutnár

Zástupca vydavateľa: Ivo Klivanec

Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou

Náklad: 1000 kusov

Podávanie novinových zásielok povolené  
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava  
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences"  
 is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe  
 (<http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/>).

## OBSAH

Soňa Čeretková : Nové rubriky: Vzdelávanie v matematike a informatike Vzdelávanie vo fyzike.....	1
Soňa Čeretková : Projekt 7RP PRIMAS .....	4
Roman Kluvanec : Letný tábor Trojsten .....	6
Jozef Doboš : Príbeh o skúške správnosti .....	9
Anna K. Žeromská : What is the connection between a theorem and its proof as perceived by higher-secondary school students? .....	15
Úlohová komisia Matematickej olympiády : Zadania a návodné úlohy 63. ročníka Matematickej olympiády (spracoval Peter Novotný).....	23
Árpád Kecskés : Galileo Galilei a jeho úloha pri vytváraní fyzikálneho obrazu sveta.....	35
Viera Lapitková : Konceptné východiská vyučovania fyziky na základnej škole.....	41
János BOLYAI (15.12.1802 – 27.1.1860) (zostavil Dušan Jedinák).....	52
Texty úloh 1. kola 55. ročníka fyzikálnej olympiády (šk. r. 2013 – 2014) kategória A a kategórie B, C (1.- 3. úloha) (Ivo Čáp).....	53
<b>INFORMÁCIE</b>	
54. Medzinárodná matematická olympiáda (Santa Marta, Kolumbia, 18. – 28. júla 2013 ( <a href="http://imo-official.org/">http://imo-official.org/</a> ) (Vojtech Bálint) .....	63
Výsledky stredoškôľakov na Stredo európskej olympiáde v informatike CEOI 2013 (Gabriela Andrejková) .....	67
<b>RECENZIA</b>	
Kuřina F.: Elementární matematika a kultura. Hradec Králové, Gaudeamus 2012. Kultura v matematike, matematika v kultúre (Beloslav Riečan).....	71

## CONTENTS

Soňa Čeretková: New Sections: Education in Mathematics and Computer Science, Education in Physics.....	1
Soňa Čeretková: Project 7RP PRIMAS .....	4
Roman Kluvanec: Summer Camp Trihedron .....	6
Jozef Doboš: The Story about the Verification of Solution.....	9
Anna K. Žeromska: What is the connection between a theorem and its proof as perceived by higher-secondary school students? .....	15
The Task Committee of the Mathematical Olympiad: Tasks and Instructional Tasks of the 63 <sup>rd</sup> Mathematical Olympiad (prepared by Peter Novotný) .....	23
Árpád Kecskés: Galileo Galilei and his Role in Creating a Physical Image of the World .....	35
Viera Lapitková: Concepts for Teaching Physics in Primary School .....	41
János BOLYAI (15 December. 1802 – 27. January 1860) (compiled by Dušan Jedinák).....	52
Tasks of the First Cycle of the 55 <sup>th</sup> Physics Olympiad (2013 – 2014) Category A and Categories B, C (Problems 1 – 3) .....	53
<b>INFORMATION</b>	
54 <sup>th</sup> International Mathematical Olympiad (Santa Maria, Colombia 18 – 28 July 2013 ( <a href="http://imo-official.org/">http://imo-official.org/</a> ) (Vojtech Bálint).....	63
Results of Secondary School Students at the Central European Olympiad in Informatics CEOI 2013 (Gabriela Andrejková) .....	67
<b>REVIEW</b>	
Kuřina, F.: Elementary Mathematics and Culture. Hradec Kralove, Gaudeamus 2012. Culture in Mathematics, Mathematics in Culture (Beloslav Riečan).....	71