OBZORY

4/2013 (42)

MATEMATIKY
FYZIKY a
INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2013 ročník 42

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 4/2013 Volume 42

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2013 (42)

Príbeh o skúške správnosti

Jozef Doboš

Abstract: The aim of this paper is to demonstrate that verification of a solution is possible even if the problem has infinitely many solutions.

Key words: checking a solution, radical equations and inequalities

Súhrn: Cieľom práce je ukázať, že skúšku správnosti môžeme robiť aj v prípade, keď úloha má nekonečne veľa riešení.

Kľúčové slová: skúška správnosti, iracionálne rovnice a nerovnice

MESC: H30, I20

Nedávno som sa z jednej učebnice matematiky dozvedel, že pri úlohách s nerovnicami namiesto skúšky správnosti robíme len akési overenie správnosti riešenia. Autorka dáva aj konkrétny návod: „Overenie robíme tak, že vyberieme jeden z koreňov nerovnice, dosadíme ho do ľavej a pravej strany nerovnice a zisťujeme, či pre získané hodnoty platí uvedená nerovnosť." Taký istý návod môžeme nájsť aj v niektorých zahraničných materiáloch, napríklad v knihe [3] na strane 21.

Položme si teda otázku, či môžeme urobiť skúšku správnosti aj v prípade, keď riešení nerovnice je nekonečne veľa. Ukážeme na príklade, že sa to dá.

Použijeme formu fiktívneho dialógu medzi osobami A a B. Takýto spôsob výkladu použil prof. Hutchings vo svojom študijnom materiáli [5] pri vysvetľovaní dôkazov.

A: Riešil som iracionálnu nerovnicu $\sqrt{x+1} > x-1$ a zistil som, že jej oborom pravdivosti je interval $\langle -1,\, 3)$. Chcem urobiť skúšku správnosti. To znamená, že chcem dokázať nasledujúce tvrdenie:

Pre každé reálne číslo x z intervalu $\langle -1,\, 3)$ platí $\sqrt{x+1} > x-1$.

B: Si si istý, že je to pravda? Naozaj si sa nepomýlil?

A: Dobre, tak skús vybrať nejaké číslo x z intervalu $\langle -1,\, 3)$ a ja ti ukážem, že tvrdenie $\sqrt{x+1} > x-1$ je pravdivé.

B: Tak vyskúšaj $x = 2$.

A: To je ľahké. Pretože $\sqrt{2+1} = \sqrt{3}$ a $2-1=1$, zrejme platí $\sqrt{2+1} > 2-1$.

B: Teraz zvolím číslo $x = -0,213$, aby si to nemal také jednoduché.

A: Pretože $\sqrt{-0,213+1} = \sqrt{0,787} > 0$ a $-0,213 - 1 = -1,213 < 0$, máme $\sqrt{-0,213+1} > 0 > -0,213 - 1$.

B: No dobre, ukázal si, že tvrdenie $\sqrt{x+1} > x - 1$ je pravdivé pre $x = 2$ a pre $x = -0,213$. Ale interval $\langle -1,\ 3)$ obsahuje nekonečne veľa čísel, ktoré by sme mali dosadiť za x. Ako ukážeš, že to môžeš urobiť pre každé z nich?

A: Nech teda x je pevne zvolené číslo z intervalu $\langle -1,\ 3)$.

B: Ktoré číslo?

A: Úplne ľubovoľné. Nezáleží na tom, ktoré. Idem ti ukázať, že pre toto číslo x platí $\sqrt{x+1} > x - 1$, pričom využijem iba fakt, že číslo x leží v intervale $\langle -1,\ 3)$.

B: Tak to som zvedavý.

A: Najskôr si všimni, že pre každé reálne číslo r z intervalu $\langle 0,\ 1\rangle$ platí $\sqrt{r} \geq r$. Potom pre $r = x + 1$ platí $\sqrt{x+1} \geq x + 1$. Pretože zrejme $x + 1 > x - 1$, máme $\sqrt{x+1} > x - 1$. Nesmieme však zabudnúť, že to platí len pre r z intervalu $\langle 0,\ 1\rangle$, čiže pre x z intervalu $\langle -1,\ 0\rangle$.

B: No, ale sľúbil si, že využiješ iba fakt, že číslo x leží v intervale $\langle -1,\ 3)$. To sa ti zatiaľ nepodarilo.

A: Ale ty zase musíš uznať, že mám aspoň čiastočný výsledok. Ukázal som, že platí $\sqrt{x+1} > x - 1$, pričom som využil iba fakt, že číslo x leží v intervale $\langle -1,\ 0\rangle$.

B: Dobre, dobre. Ale čo keď číslo x leží v intervale $(0,\ 3)$?

A: Ukážem ti, že aj pre takéto x platí $\sqrt{x+1} > x - 1$. Vlastne ukážem, že pre takéto x platí $\sqrt{x+1} - x + 1 > 0$. Bude ti to stačiť?

B: Súhlasím, tieto dve nerovnosti hovoria to isté. Ale už začni!

A: Vydrž ešte chvíľku. Všimni si, že keď vo výraze $\sqrt{x+1} - x + 1$ nahradím číslo x číslom 3, dostanem $\sqrt{3+1} - 3 + 1 = \sqrt{4} - 2 = 2 - 2 = 0$. Ak sa teda dívam na výraz $\sqrt{x+1} - x + 1$ ako na výraz s premennou, môžem nerovnosť $\sqrt{x+1} - x + 1 > 0$ prepísať do tvaru $f(x) > f(3)$.

B: Už si ma úplne doplietol. Najskôr sme sa dohodli, že x je pevne zvolené číslo z intervalu $\langle -1,\ 3)$. A teraz zrazu chceš, aby x bola premenná.

A: Máš pravdu, musím ísť na teba opatrnejšie. Dohodnime sa, že symbolom $f(r)$ budeme označovať výraz $\sqrt{r+1}-r+1$, kde r je premenná. Tento výraz má zmysel pre každé reálne číslo $r \geq -1$. Pritom pre naše číslo x máme $f(x) = = \sqrt{x+1}-x+1$ a pre číslo 3 máme $f(3) = \sqrt{3+1}-3+1 = 0$. Už rozumieš?

B: Ako tak. Skús pokračovať, možno to bude potom jasnejšie.

A: Ukážem, že pre každé reálne číslo $s > x$ platí $f(x) > f(s)$. Pretože naše číslo x leží v intervale $(0, 3)$, voľbou $s = 3$ odtiaľ dostaneme $f(x) > f(3)$.

B: Rozumiem, takže teraz povieš: Nech s je pevne zvolené reálne číslo, ktoré je väčšie ako x.

A: Presne tak. Pretože $s > x > 0$, výrazy $f(x)$ a $f(s)$ majú zmysel. Ukážem, že platí $f(x) - f(s) > 0$. Rozumieš?

B: Áno, nerovnosť $f(x) - f(s) > 0$ hovorí presne to isté, ako nerovnosť $f(x) > f(s)$. Pokračuj!

A: Tak sleduj tieto úpravy:

$$\begin{aligned}
f(x) - f(s) &= \left(\sqrt{x+1}-x+1\right) - \left(\sqrt{s+1}-s+1\right) = \\
&= \sqrt{x+1} - \sqrt{s+1} + s - x = \\
&= \frac{(x+1)-(s+1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{s+1}} + s - x = \\
&= \frac{x-s}{\sqrt{x+1}+\sqrt{s+1}} + s - x = \\
&= (s-x)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{s+1}}\right).
\end{aligned}$$

B: To sa mi vôbec nepáči! Kde si vzal lomený výraz?

A: Ale veď to som len použil známy vzorec $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. V prípade, že $a + b \neq 0$, môžeme ho prepísať do tvaru

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a+b}.$$

Teraz stačí dosadiť $a = \sqrt{x+1}$ a $b = \sqrt{s+1}$.

B: To si mal hneď povedať, že budeš používať takéto finty!

A: A ako som vybral pred zátvorku výraz $s - x$, to ti nerobilo problémy?

B: Až taký nechápavý nie som! To predsa zvládne každý.

A: Nemusíš sa hneď urážať. Veď už sme takmer hotoví. Zostáva iba overiť, že obidva činitele sú kladné. Pretože $s > x$, zrejme $s - x > 0$. Pretože $x > 0$, zrejme $\sqrt{x+1} > 1$. Teda (s prihliadnutím na fakt, že $\sqrt{s+1} \geq 0$) platí

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{s+1}} < 1.$$

Teraz už ľahko vidieť, že

$$1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{s+1}} > 0.$$

A to je všetko.

B: No, znelo to presvedčivo. Ale ja sa aj tak budem musieť ešte raz na to pozrieť. Nedá sa ti vo všetkom veriť, už ťa natoľko poznám.

V druhej časti článku sa pozrieme na to, ako treba doplniť „overenie" (spomínané v úvode) tak, aby z toho bola korektná skúška správnosti. Budeme sa odvolávať na Bolzanovu vetu, ktorá hovorí, že ak spojitá reálna funkcia definovaná na uzavretom ohraničenom intervale nadobúda v krajných bodoch tohto intervalu nenulové hodnoty majúce rôzne znamienka, potom vo vnútri tohto intervalu musí nadobúdať nulovú hodnotu.

Budeme uvažovať nerovnicu v tvare

$$f(x) > 0, \tag{1}$$

kde f je nejaká elementárna funkcia. Pretože elementárna funkcia je spojitá v každom bode svojho definičného oboru, z Bolzanovej vety vyplýva, že platí: Ak I je interval, na ktorom je funkcia f definovaná a na ktorom nadobúda len nenulové hodnoty, potom

buď $f(x) > 0$ pre všetky $x \in I$, alebo $f(x) < 0$ pre všetky $x \in I$.

Na základe toho môžeme odporúčať takýto postup:

a) Nájdeme všetky korene rovnice $f(x) = 0$ a v prípade potreby urobíme skúšku správnosti.[1]

---

[1]Riešeniu rovníc sme sa v tomto článku podrobne nevenovali. Pripomeňme si iba, že pri úpravách rovnice vlastne prechádzame k novej rovnici, pričom používame ekvivalentné a dôsledkové úpravy. Z tohto dôvodu obor pravdivosti pôvodnej rovnice je podmnožinou oboru pravdivosti novej rovnice. Preto pri použití dôsledkových úprav robíme skúšku správnosti. Logicko-množinový rámec riešenia rovníc je podrobne vysvetlený v študijnom materiáli [6], str. 110 – 116. Pre ďalšie štúdium tiež odporúčame učebnicu [1], Lesson 13 – 3: Solving Equations as Proofs.

b) Ak po vynechaní koreňov rovnice $f(x) = 0$ z definičného oboru funkcie f zostanú intervaly, pre každý z nich stačí urobiť „overenie“ tak, ako bolo uvedené v úvode článku. Obor pravdivosti nerovnice $f(x) > 0$ bude potom zjednotením tých intervalov, ktoré úspešne prešli „overením“.

Ukážeme si to na príklade. Na štvrtej Medzinárodnej matematickej olympiáde v roku 1962 žiaci riešili nasledujúcu úlohu (pozri [4]).

Úloha
Nájdite všetky reálne čísla x, pre ktoré platí: $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$.

Riešenie. Pretože musí platiť $3 - x \geq 0$ a $x + 1 \geq 0$, definičným oborom danej nerovnice je interval $\langle -1,\, 3\rangle$.

Teraz vyriešime rovnicu $f(x) = 0$, kde $f(x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} - \frac{1}{2}$. Túto časť (vrátane skúšky správnosti) prenecháme čitateľovi. Len prezradíme, že táto rovnica má jediný koreň

$$x = \frac{8-\sqrt{31}}{8}.$$

Keď z definičného oboru danej nerovnice vynecháme túto hodnotu, zostanú nám dva intervaly:

$$\left\langle -1,\, \tfrac{8-\sqrt{31}}{8}\right) \text{ a } \left(\tfrac{8-\sqrt{31}}{8},\, 3\right\rangle.$$

Z prvého intervalu vyberieme napr. $x = -1$ a z druhého napr. $x = 3$. Pretože

$$\begin{aligned} f(-1) &= \sqrt{3-(-1)} - \sqrt{-1+1} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} > 0, \\ f(3) &= \sqrt{3-3} - \sqrt{3+1} - \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2} < 0, \end{aligned}$$

oborom pravdivosti danej nerovnice je interval $\left\langle -1,\, \frac{8-\sqrt{31}}{8}\right)$.

Poznamenajme, že namiesto krajných bodov intervalov sme mohli vybrať body na overenie naozaj ľubovoľným spôsobom, napr. $x = 0$ pre prvý interval a $x = 1$ pre druhý interval. Museli by sme však najskôr ukázať, že platí

$$0 < \tfrac{8-\sqrt{31}}{8} < 1.$$

V literatúre sa pre túto metódu zaužívali názvy *metóda intervalov*, príp. *metóda nulových bodov* (pozri napr. [2]).

Na záver uvedieme niečo pre skalných zástancov skúšky správnosti. V prvej ukážke môžeme vidieť autentické riešenie jedného študenta. Ak študent vykoná skúšku správnosti, utvrdí sa v tom, že počítal správne. Je to však naozaj tak?

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} &= 1 \qquad /^2 \\
x+5 + 2x+8 &= 1 \\
3x + 13 &= 1 \\
3x &= -12 \\
x &= -4
\end{aligned}
$$

V druhej ukážke (ktorá je prevzatá z knihy [2]) vidieť, že niekedy študentovi aj pri nesprávnom výsledku skúška správnosti vyjde:

„Riešenie"	„Skúška správnosti"
$\sqrt{x^2+4}=5$	$\sqrt{3^2+4}=5$
$x+2=5$	$3+2=5$
$x=3$	$5=5$

Podobný príklad možno nájsť aj v knihe [7], str. 81 – 82.

Literatúra

[1] Susan A. Brown, et al.: *UCSMP Algebra*, Volume 2: Chapters 7 – 13, Wright Group/McGraw-Hill, 2004.

[2] Doboš, J.: *Rovnice a nerovnice.* Bolchazy-Carducci Publishers, Inc. Wauconda, Illinois, USA, 2003. `http://web.science.upjs.sk/jozefdobos/wp-content/uploads/2012/02/2003b.pdf`

[3] Gloag, A., Farbizio, A., Gloag, A., Kramer, M.: *Basic Algebra.* CK-12 Foundation, 2011. `http://www.ck12.org/book/Basic-Algebra/`

[4] Horák, K., Müller, V., Vrba, A.: *Úlohy mezinárodních matematických olympiád.* SPN, Praha, 1986.

[5] Hutchings, M.: *Introduction to mathematical arguments.* University of California, Berkeley, 2003. `http://math.berkeley.edu/~hutching/teach/proofs.pdf`

[6] Šedivý, J.: *Vybrané kapitoly z modernej matematiky*, zošit 1. Študijný text pre učitelov 6.-9. ročníka základnej deväťročnej školy, SPN, Bratislava, 1972.

[7] White, W. F.: *A Scrap-Book of Elementary Mathematics.* The Open Court Publishing Company, Chicago, 1908. `http://archive.org/details/cu31924064186657`

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/1331/12.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice, e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: jan.guncaga@ku.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

Objednávky a predplatné vybavuje
Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: press@protonit.com)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
4/2013 ročník 42

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným prispením
Ministerstva školstva Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Ján Gunčaga, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Vladimír Kutnár
Zástupca vydavateľa: Ivo Kluvanec
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou
Náklad: 1000 kusov

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences" is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe (http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

OBSAH

CONTENTS