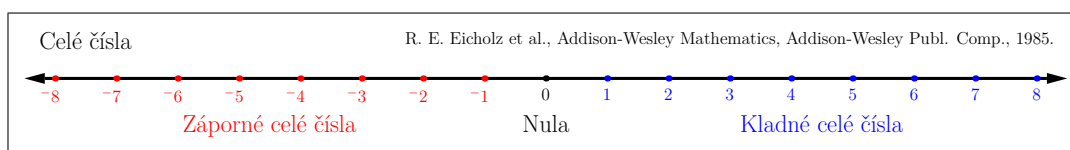


Infimum

Na jednoduchých úlohách si pripomenieme pojem infima číselnej množiny.

K tomu budeme potrebovať pojem dolnej celej časti reálneho čísla.



Všimnime si, že pre každé reálne číslo x existuje jediné celé číslo k také, že

$$k \leq x < k + 1. \quad (1)$$

Toto celé číslo k označujeme symbolom $\lfloor x \rfloor$ a voláme ho dolná celá časť reálneho čísla x . Teda podľa (1) pre každé reálne číslo x máme

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1. \quad (2)$$

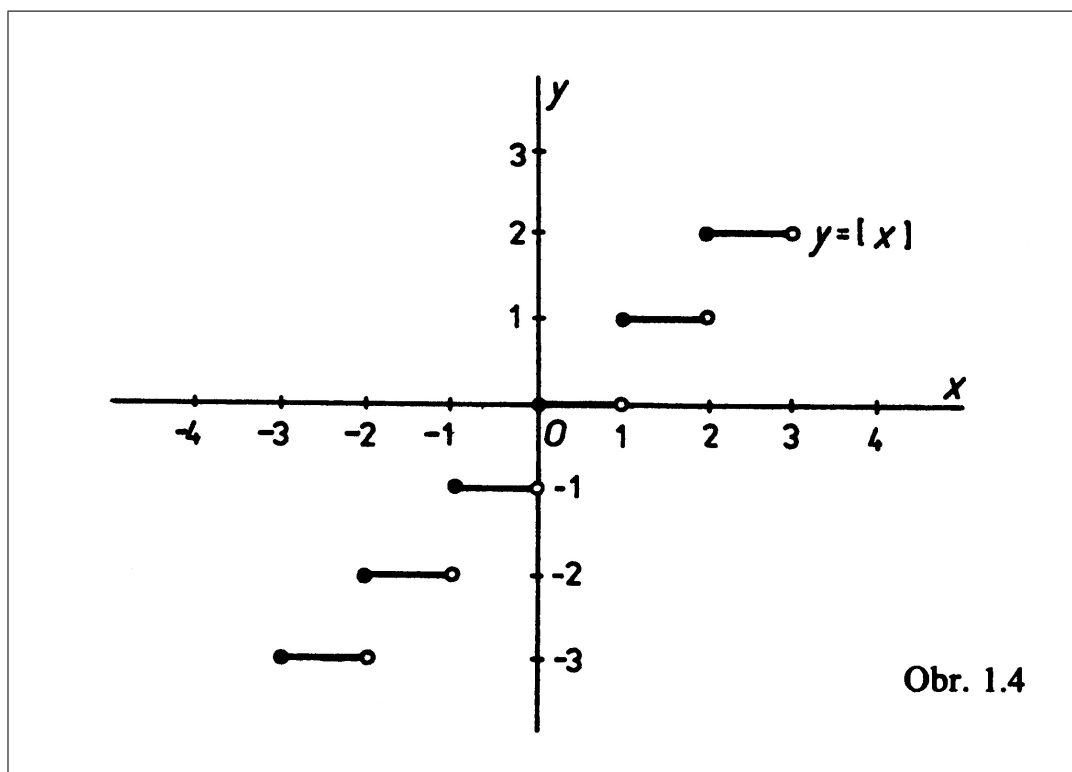
Všimnime si, že $\lfloor x \rfloor > 0$ práve vtedy, keď $x \geq 1$.

S týmto pojmom sa pracuje aj v nasledujúcej stredoškolskej učebnici:

Odvárko, O., Ryšánková, M., Matematika pre 2. ročník gymnázia. Funkcie II, SPN, Bratislava, 1985.

Každé reálne číslo b možno vyjadriť v tvare $b = c + d$, kde c je celé číslo a $d \in \langle 0, 1 \rangle$. Číslo c nazývame celá časť čísla b a označujeme ho $\lfloor b \rfloor$. Napríklad $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor 5,2 \rfloor = 5$, $\lfloor -0,5 \rfloor = -1$, $\lfloor -2,8 \rfloor = -3$ atď. Každému reálnemu číslu x je tak priradené práve jedno celé číslo $\lfloor x \rfloor$. Zostrojme graf funkcie $y = \lfloor x \rfloor$.

Na rozdiel od našej terminológie sa tam používa názov celá časť reálneho čísla x a namiesto označenia $\lfloor x \rfloor$ sa používa označenie $[x]$. Je tam uvedený aj graf funkcie $y = [x]$. Môžeme ho vidieť na nasledujúcom obrázku.



Úloha 1. Ukážeme, že $\inf \{1, 1/2, 1/3, \dots\} = 0$.

Množinu všetkých kladných celých čísel budeme označovať symbolom $\mathbb{Z}^+$, t.j.

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Všimnime si, že množina

$$M = \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\} = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$$

nemá najmenší prvok. Pretože množina M obsahuje iba kladné čísla, číslo 0 je dolným ohraničením¹ množiny M . Pritom číslo 0 je zo všetkých dolných ohraničení množiny M najväčšie. K tomu stačí overiť, že žiadne kladné reálne číslo nemôže byť dolným ohraničením množiny M .

Nech δ je kladné reálne číslo. Ukážeme, že existuje kladné celé číslo n , pre ktoré platí

$$1/n < \delta.$$

¹Pripomeňme si, že reálne číslo m je dolným ohraničením množiny M , ak pre každé $x \in M$ platí: $m \leq x$. Najväčšie z týchto dolných ohraničení voláme infimum množiny M .

Pritom túto nerovnosť môžeme prepísať do tvaru

$$1/\delta < n.$$

Pretože podľa (2) platí

$$1/\delta < \lfloor 1/\delta \rfloor + 1,$$

stačí položiť

$$n = \lfloor 1/\delta \rfloor + 1.$$

Pretože $1/n \in M$ a $1/n < \delta$, číslo δ nie je dolným ohraničením množiny M . Podľa definície infima teda $\inf M = 0$.

Úloha 2. Ukážeme, že $\inf \left\{ \frac{n}{n+k} : n, k \in \mathbb{Z}^+ \right\} = 0$.

Všimnime si, že množina

$$M = \left\{ \frac{n}{n+k} : n, k \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

nemá najmenší prvok. Pretože množina M obsahuje iba kladné čísla, číslo 0 je dolným ohraničením množiny M . Pritom číslo 0 je zo všetkých dolných ohraničení množiny M najväčšie. K tomu stačí overiť, že žiadne kladné reálne číslo nemôže byť dolným ohraničením množiny M .

Nech δ je kladné reálne číslo. Ukážeme, že existujú kladné celé čísla n, k také, že

$$\frac{n}{n+k} < \delta. \quad (3)$$

Pretože podľa (2) platí

$$1/\delta < \lfloor 1/\delta \rfloor + 1,$$

po malej úprave odtiaľ dostávame

$$\frac{1}{1 + \lfloor 1/\delta \rfloor} < \delta. \quad (4)$$

Pozrime sa na nerovnosti (3) a (4). Vidíme, že sa nám prirodzene ponúka voľba $n = 1$, $k = \lfloor 1/\delta \rfloor$. Je tam však jeden malý problém. Aby k bolo kladné celé číslo², muselo by platiť $1/\delta \geq 1$. To znamená, že by muselo platiť $\delta \leq 1$. Tento problém môžeme vyriešiť nasledujúcim spôsobom:

²Pripomeňme si, že $\lfloor x \rfloor > 0$ práve vtedy, keď $x \geq 1$.

Ak $\delta \leq 1$, položíme $n = 1$, $k = \lfloor 1/\delta \rfloor$. Ak $\delta > 1$, položíme $n = 1$, $k = 1$. Pretože pre takto zvolené čísla n , k platí

$$\frac{n}{n+k} \in M \quad \text{a} \quad \frac{n}{n+k} < \delta,$$

číslo δ nie je dolným ohraničením množiny M . Podľa definície infima teda $\inf M = 0$.

Úloha 3. Ukážeme, že ak $0 < a < 1$, potom $\inf \{a, a^2, a^3, \dots\} = 0$.

Nech a je reálne číslo ležiace medzi nulou a jedničkou, t.j.

$$0 < a < 1.$$

Všimnime si, že množina

$$M_a = \{a^n : n \in \mathbb{Z}^+\} = \{a, a^2, a^3, \dots\}$$

nemá najmenší prvok. Pretože množina M_a obsahuje iba kladné čísla, číslo 0 je dolným ohraničením množiny M_a . Pritom číslo 0 je zo všetkých dolných ohraničení množiny M_a najväčšie. K tomu stačí overiť, že žiadne kladné reálne číslo nemôže byť dolným ohraničením množiny M_a .

Nech δ je kladné reálne číslo. Ukážeme, že existuje kladné celé číslo n , pre ktoré platí

$$a^n < \delta.$$

Pritom túto nerovnosť môžeme prepísať do tvaru

$$\log_a \delta < n.$$

Stačí si uvedomiť, že funkcia $y = \log_a x$ je klesajúca (vzhľadom na to, že platí $0 < a < 1$).

Pretože podľa (2) platí

$$\log_a \delta < \lfloor \log_a \delta \rfloor + 1,$$

prirodzene sa nám ponúka voľba

$$n = \lfloor \log_a \delta \rfloor + 1.$$

Pretože číslo n musí byť kladné, pri tejto voľbe by muselo platiť $\delta \leq 1$. Musíme si totiž uvedomiť, že pre $\delta > 1$ je $\log_a \delta < 0$ (vzhľadom na to, že platí $0 < a < 1$). Tento problém môžeme vyriešiť nasledujúcim spôsobom:

Ak $\delta \leq 1$, položíme $n = \lfloor \log_a \delta \rfloor + 1$. Ak $\delta > 1$, položíme $n = 1$. Pretože pre takto zvolené číslo n platí $a^n \in M_a$ a $a^n < \delta$, číslo δ nie je dolným ohraničením množiny M_a . Podľa definície infima teda $\inf M_a = 0$.