

Úloha:

Pre každé $k, n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_{n,k} = \frac{3n - 2k}{2n + 3k}.$$

Máme nájsť supremum množiny

$$M = \{a_{n,k} : n, k \in \mathbb{N}\}.$$

Najskôr stručne:

Stačí overiť, že pre každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} = \frac{3}{2}$$

a že pre každé $k, n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n,k} < \frac{3}{2}.$$

Teraz podrobnejšie:

Nech $k \in \mathbb{N}$ je pevne zvolené. Počítajme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 2k}{2n + 3k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 2k \cdot \frac{1}{n}}{2 + 3k \cdot \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Na základe toho vyslovíme hypotézu, že $\sup M = \frac{3}{2}$.

Najskôr ukážeme, že číslo $\frac{3}{2}$ je horným ohraničením množiny M , t.j. že

pre každé $k, n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n,k} < \frac{3}{2}. \quad (1)$$

K tomu nám stačia nasledujúce ekvivalentné úpravy:

$$\frac{3n - 2k}{2n + 3k} < \frac{3}{2}$$

$$2(3n - 2k) < 3(2n + 3k)$$

$$6n - 4k < 6n + 9k$$

$$0 < 13k$$

Pritom sme n, k považovali za pevne zvolené prirodzené čísla. Pretože boli ľubovoľné, nerovnosť (1) je dokázaná.

Podobným spôsobom ukážeme, že pre každé $k, n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n,k} < a_{n+1,k}. \quad (2)$$

K tomu nám stačia nasledujúce ekvivalentné úpravy:

$$\frac{3n-2k}{2n+3k} < \frac{3(n+1)-2k}{2(n+1)+3k}$$

$$6n(n+1) - 4k(n+1) + 9nk - 6k^2 < 6n(n+1) + 9k(n+1) - 4nk - 6k^2$$

$$-4k(n+1) + 9nk < 9k(n+1) - 4nk$$

$$0 < 13k$$

Pritom sme n, k považovali za pevne zvolené prirodzené čísla. Pretože boli ľubovoľné, nerovnosť (2) je dokázaná.

Nech $k \in \mathbb{N}$ je pevne zvolené. Pretože podľa (2) čísla

$$a_{1,k}, a_{2,k}, a_{3,k}, \dots$$

tvoria rastúcu postupnosť, platí

$$\frac{3}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} = \sup\{a_{n,k} : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup M \leq \frac{3}{2}.$$

Odtiaľ

$$\sup M = \frac{3}{2}.$$

Pritom sme využili fakt, že pre pevne zvolené prirodzené číslo k platí

$$\{a_{n,k} : n \in \mathbb{N}\} \subset M,$$

odkiaľ

$$\sup\{a_{n,k} : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup M.$$