

**OBZORRY**

**4/2012 (41)**

**HORIZONS OF  
MATHEMATICS, PHYSICS  
AND COMPUTER SCIENCES  
04/2012 Volume 41**

**REPRINT**

*MATEMATIKY  
FYZIKY a  
INFORMATIKY*

# OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2012 ročník 41

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,  
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

## HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 4/2012 Volume 41

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and  
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

**Fundavit:** Štefan Zná m, Beloslav Riečan et Daniel Klavanec

**Editors in Chief:** Jozef Doboš (Mathematics and Computer Sciences)  
Daniel Klavanec (Physics)

### International Editorial Board:

Giuliana Cavagioni (Italy)	Ján Pišút (Slovakia)
Anatolij Dvurečenskij (Slovakia)	Adam Plocki (Poland)
Gábor Galambos (Hungary)	Zdeněk Půlpán (Czech republic)
Juraj Hromkovič (Switzerland)	Ladislav Emanuel Roth (USA)
Hans Jordens (Netherland)	Ivo Volf (Czech republic)
László Nána y (Hungary)	Lubomír Zelenický (Slovakia)

**Executive Editors:** Ján Gunčaga (Mathematics and Computer Sciences)  
Aba Teleki (Physics)

### Editorial Board:

#### Mathematics and Computer Sciences:

Katarína Bachratá	Zbyněk Kubáček	Tomáš Lengyelfalusi	Milan Matejdes
Vojtech Bálint	Jozef Kuzma	Peter Maličký	Peter Vrábel
Jozef Fulier	Ladislav Kvasz	Mariana Marčoková	Milan Turčáni

#### Physics:

Jozef Beňuška	Ivan Červeň	Zuzana Ješková	Endre Szabó
Ivo Čáp	Stanislav Holec	Dalibor Krupa	Vladimír Šebeň
Peter Čerňanský	Anna Jankovychová	Viera Lapitková	Bohumil Vybíral

### Reviewers:

#### Mathematics and Computer Sciences:

Ružena Blašková	Mária Kmeťová	Beloslav Riečan	Marián Trenkler
Radoslav Harman	Jaroslava Mikulecká	Štefan Solčan	Peter Vrábel

#### Physics:

Peter Demkanin	Árpád Kecskés	Miroslav Kolesík	Miroslava Ožvoldová
Peter Hanisko	Ján Klíma	Igor Medveď	Mária Rakovská

---

## Poznámka o istom neurčitom integráli

**Jozef Doboš**

**Abstract:** This paper is devoted to interpretation of an antiderivative of  $y = 1/x$ . An application of it to solving one ordinary differential equation is presented.

**Key words:** Antiderivative, Ordinary differential equation

**Súhrn:** Článok je venovaný interpretácii neurčitého integrálu funkcie  $y = 1/x$  a jeho aplikácii pri riešení istej diferenciálnej rovnice.

**Kľúčové slová:** neurčitý integrál, diferenciálna rovnica

**MESC:** 150, 170

Študentom odboru Matematika som v rámci vstupnej písomky zadal úlohu:

Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , pre ktoré platí  
 $f'(x) = 1/x$  pre každé reálne číslo  $x \neq 0$ .

Začínal sa tretí semester, teda diferenciálny a integrálny počet funkcií jednej premennej študenti už absolvovali. Z ich riešení som sa dozvedel, že hľadané funkcie  $f$  sú vyjadrené neurčitým integrálom

$$(1) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad \text{kde } C \text{ je konštanta.}$$

Bez bližšieho vysvetlenia, ako treba chápať uvedený zápis. Bohužiaľ, takto to možno nájsť aj v (inak dobrých) učebniciach, napr. [5], str. 754, príp. [7], str. 315. Pritom v zahraničí sa okrem pojmu *primitívna funkcia*, resp. *neurčitý integrál*, používa tiež pojem *antiderivácia*, ktorá je definovaná nasledujúcim spôsobom:

*Funkcia  $F$  sa volá antiderivácia funkcie  $f$ , ak pre každé  $x$  z definičného oboru funkcie  $f$  platí  $F'(x) = f(x)$ .*

Podrobne sa vysvetleniu vzorca (1) venuje prof. Talman v študijnom materiáli, ktorý je dostupný na jeho webstránke [8], pričom ako najvhodnejší alternatívny zápis vzorca (1) navrhuje

$$(2) \quad \int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x + C_1, & \text{ak } x > 0, \\ \ln(-x) + C_2, & \text{ak } x < 0. \end{cases}$$

V našich učebniciach sa primitívna funkcia definuje na intervale. Napr. v učebnici [2], str. 411 je primitívna funkcia definovaná takto:

*Funkcia  $F(x)$  sa nazýva primitívnou funkciou k funkcii  $f(x)$  v intervale  $(a, b)$ , ak pre všetky čísla  $x \in (a, b)$  je  $F'(x) = f(x)$ .*

Ďalej, na strane 413 sú uvedené základné vzorce pre integrovanie (hľadanie primitívnych funkcií). Pritom namiesto vzorca (1) sú tam uvedené vzorce dva:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \text{ v intervale } (0, \infty), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C \text{ v intervale } (-\infty, 0).$$

Za tabuľkou vzorcov potom nasleduje poznámka, v ktorej sa hovorí, že všetky tam uvedené vzorce platia v ľubovoľnom intervale, ktorý je celý obsiahnutý v definičnom obore funkcie, ktorú integrujeme. Avšak, táto poznámka sa pri tlači dostala v knihe až na ďalšiu stranu, čo ešte zvyšuje riziko jej prehliadnutia. Vhodnejšie je uviesť príslušné intervaly pre platnosť vzorcov priamo do tabuľky, ako to možno vidieť v učebnici [1], str. 270, príp. v učebnici [4], str. 207. Pritom v učebnici [1] nájdeme aj vysvetlenie toho, prečo je rozumné (podľa názoru autorov) definovať primitívnu funkciu len na otvorenom intervale. Dôvodom je fakt, že ak definičným oborom danej funkcie  $f$  nie je interval, neplatí veta, podľa ktorej sa dve primitívne funkcie k funkcii  $f$  musia líšiť o konštantu. Autori dokonca uvádzajú aj kontrapríklad.

S používaním vzorca (1) ostro polemizuje aj autor učebnice [9] na str. 220–221, pričom argumentuje, že ak by tento symbol označoval množinu *všetkých* primitívnych funkcií k  $1/x$  na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , potom vzorec (1) nepopisuje napr. funkciu, ktorá je rovná  $\ln|x| + 3$  pre všetky  $x \in (-\infty, 0)$  a  $\ln|x| - 1$  pre všetky  $x \in (0, +\infty)$ . Ak samozrejme upravíme definíciu primitívnej funkcie tak, že môže byť definovaná na zjednotení (najviac spočítateľne veľa) otvorených intervalov.

Istú formalizáciu prístupu k antiderivácii cez reláciu ekvivalencie možno nájsť v článku [6].

Na prvý pohľad sa môže zdať, že táto diskusia nemá veľký význam. Ukážeme, že to tak nie je. S takýmito funkciami sa môžeme stretnúť pri riešení diferenciálnych rovníc. Pekný úvod do tejto problematiky možno nájsť v učebnici [3], str. 167–174.

Napríklad riešením homogénnej diferenciálnej rovnice prvého rádu

$$(3) \quad x^2 y' = y^2 + xy$$

na intervale  $(-e, 1/e)$  je funkcia  $y = y(x)$ , kde

$$(4) \quad y(x) = \begin{cases} -x/(\ln(-x) - 1), & \text{ak } -e < x < 0, \\ 0, & \text{ak } x = 0, \\ -x/(\ln x + 1), & \text{ak } 0 < x < 1/e. \end{cases}$$

Naozaj, túto funkciu môžeme vyjadriť v tvare

$$y(x) = -\frac{x}{f(x)} \text{ pre každé } -e < x < 1/e,$$

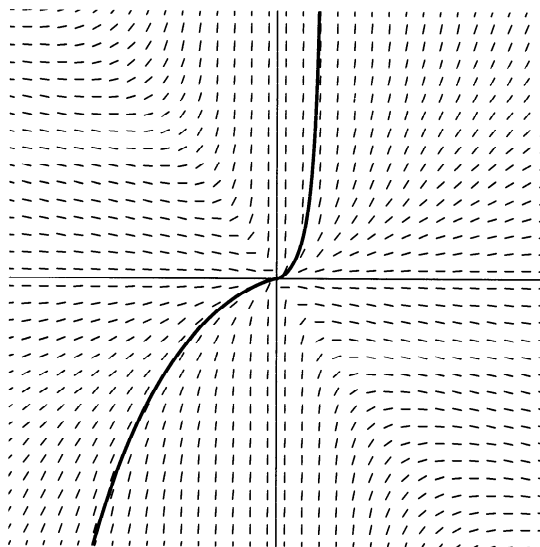
pričom  $f$  je vhodná funkcia, ktorá patrí medzi riešenia našej úlohy z úvodu článku. Preto pre každé  $x \neq 0$ ,  $x \in (-e, 1/e)$  platí

$$x^2 y'(x) = x^2 \left( -\frac{f(x) - x f'(x)}{f^2(x)} \right) = x^2 \left( -\frac{f(x) - 1}{f^2(x)} \right) = y^2(x) + xy(x).$$

Ďalej, pretože

$$y'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(h) - y(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{f(h)} \right) = 0,$$

rovnica (3) je splnená aj pre  $x = 0$ . Tým sme ukázali, že funkcia (4) je riešením rovnice (3) na intervale  $(-e, 1/e)$ .



Obr. 1. Smerové pole určené diferenciálnou rovnicou (3) a graf jej riešenia (4)

**PodĎakovanie:** Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/1331/12.

## Literatúra

- [1] Dlouhý, Z., Hruša, K., Kúst, J., Rohlíček, J., Taišl, J., Zieris, J., *Úvod do matematické analýzy, učebnice pro pedagogické fakulty*, SPN, Praha, 1965
- [2] Kluvánek, I., Mišík, L., Švec, M., *Matematika I*, Alfa, Bratislava, 1971
- [3] Kluvánek, I., Mišík, L., Švec, M., *Matematika II Alfa*, Bratislava, 1970
- [4] Kraemer, E., Hájek, J., Veselý, F., Voříšek, J., Zöldy, M., *Matematika pre 3. ročník SVŠ, vetva prírodovedná*, SPN, Bratislava, 1968
- [5] Larson, R. E., Edwards, B. H., *Finite Mathematics with Calculus*, D. C. Heath and Company, 1991
- [6] Chang Hoon Park, *An Alternative Approach to Antidifferentiation through the Concept of Equivalence Relation*, Kyung Hee Journal of Natural Sciences, 3, 1997, s. 4–6
- [7] Stein, S. K., *Calculus and Analytic Geometry McGraw-Hill Book Company*, 1973
- [8] Talman, L. A., *Concerning  $\int \frac{dx}{x}$* , Department of Mathematical & Computer Sciences Metropolitan State College of Denver, 2006, <http://clem.mscd.edu/~talman1>
- [9] Veselý, J., *Matematická analýza pro učitele, první díl*, matfyzpress, Praha, 1997

Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta,  
Jesenná 5, 040 01 Košice  
e-mail: [jozef.dobos@upjs.sk](mailto:jozef.dobos@upjs.sk)

Jednota slovenských matematikov a fyzikov  
Matematický ústav SAV  
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

---

### **Adresa redakcie**

#### **Matematická a infromatická časť**

Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok  
(e-mail: jan.guncaga@ku.sk)

#### **Fyzikálna časť**

Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra  
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

#### **Objednávky a predplatné vybavuje**

Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra  
(e-mail: press@protonit.com)

## **OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2012 ročník 41**

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci  
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným príspevím  
Ministerstva školstva Slovenskej republiky  
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Klivanec  
Výkonní redaktori: Ján Gunčaga, Aba Teleki  
Technická redakcia: Martin Papčo, Vladimír Kutnár  
Zástupca vydavateľa: Ivo Klivanec  
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou

Podávanie novinových zásielok povolené  
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava  
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences"  
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe  
(<http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/>).

## OBSAH

Jozef Doboš: Poznámka o istom neurčitom integrále .....	1
Michaela Klepancová, Marek Varga: O Eulerových substitúciách geometricky .....	5
Ireneusz Krecz, Pavel Tlustý: O Sichermanových kostkách a jejich zobecnění .....	15
Katarína Kocová Mičkaninová, Stanislav Lukáč: Simulácia náhodných udalostí vo vyučovaní pravdepodobnosti a štatistiky .....	21
György PÓLYA (13. 12. 1887 – 7. 9. 1985) (Dušan Jedinák) .....	36
Bohumil Vybíral: Školská fyzika – její poslání, problémy a východiska (2. část) .....	37
Texty úloh 1. kola 54. ročníka fyzikálnej olympiády (šk. r. 2012 – 2013) kategórie B, C, D (5.-7. úloha) .....	51
Barbara Henterová: Vzdělávací projekt Play Energy 2012 už pozná svojich víťazov .....	59
<b>INFORMÁCIE</b>	
Konferencia slovenských fyzikov (SFS) 2012 (Dalibor Krupa) .....	63
European Union Science Olympiad (EUSO) (Ivo Čáp) .....	65
<b>RECENZIA</b>	
Edita Partlová, Vyučovanie matematiky modernými technológiami, Bratislava: Univerzita Komenského, 2011, 94 s. ISBN 978-80-223-3144-9 (Janka Kopáčová) .....	68
<b>SPOMÍNAME</b>	
Doc. RNDr. Tomáš Klein, CSc. (18. 5. 1933 – 6. 1. 2012) (Jarmila Schmidtová) .....	69
Za profesorom Markom Švecom (10. 10. 1919 – 19. 6. 2012) (Zbyněk Kubáček) .....	71

## CONTENTS

Jozef Doboš: A Note on an Antiderivative Integral .....	1
Michaela Klepancová, Marek Varga: On Euler's Substitutions Geometrically .....	5
Ireneusz Krecz, Pavel Tlustý: On the Subject of the Sicherman Dice and Its Generalisation .....	15
Katarína Kocová Mičkaninová, Stanislav Lukáč: Simulation of Random Events in Teaching Probability and Statistics .....	21
György PÓLYA (13 December 1887 – 7 September 1985) (Dušan Jedinák) .....	36
Bohumil Vybíral: School Physics – Its Role, Problems and Solutions (Part 2) .....	37
Tasks of the First Cycle of the 54 <sup>th</sup> Physics Olympiad (School Year 2012 – 2013) Categories B, C, D (Problems 5 – 7) .....	51
Barbara Henterová: The Winners of Educational Project Play Energy 2012 Have Been Announced .....	59
<b>INFORMATION</b>	
Conference of Slovak Physicists 2012 (Dalibor Krupa) .....	63
European Union Science Olympiad (EUSO) (Ivo Čáp) .....	65
<b>REVIEW</b>	
Edita Partlová, Vyučovanie matematiky modernými technológiami, [Teaching Mathematics with Modern Technology], Bratislava: Comenius University, 2011, 94 p. ISBN 978-80-223-3144-9 (Janka Kopáčová) .....	68
<b>MEMORIAL REMEMBRANCE</b>	
Doc. RNDr. Tomáš Klein, CSc. (Jarmila Schmidtová) .....	69
In Remembrance of Professor Marek Švec (Zbyněk Kubáček) .....	71



ENERGIA PRE VZDELANIE