Vypočítame nasledujúcu limitu: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(1+\frac{i}{n}\right) \sin\frac{\pi i}{n^2}$.

Ляшко, И. И. и др.: Справочное пособие по математическому анализу, Киев, 1978.

Pretože

$$\sin\frac{\pi i}{n^2} = \frac{\pi i}{n^2} + \left(\sin\frac{\pi i}{n^2} - \frac{\pi i}{n^2}\right),$$

platí

$$\sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{i}{n}\right) \sin\frac{\pi i}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{i}{n}\right) \frac{\pi i}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{i}{n}\right) \left(\sin\frac{\pi i}{n^2} - \frac{\pi i}{n^2}\right).$$

Keď ukážme, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{i}{n}\right) \left(\frac{\pi i}{n^2} - \sin\frac{\pi i}{n^2}\right) = 0, \tag{1}$$

bude platiť

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{i}{n}\right) \sin\frac{\pi i}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{i}{n}\right) \frac{\pi i}{n^2}.$$

Pritom limitu na pravej strane vieme vypočítať. Stačí len poznať dva vzorce:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Potom

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{i}{n}\right) \frac{i}{n^2} &= \frac{\pi}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(5n+1)}{6n^2}.\end{aligned}$$

Odtiaľ

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{i}{n}\right) \frac{\pi i}{n^2} = \frac{5\pi}{6}.$$

Vrátime sa k výpočtu limity (1). Položme

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{i}{n}\right) \left(\sin\frac{\pi i}{n^2} - \frac{\pi i}{n^2}\right).$$

Nech $\varepsilon > 0$. Ukážeme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $n \geq n_0$ platí $|a_n| < \varepsilon$.

Využijeme skutočnosť, že platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Odtiaľ vyplýva, že existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $x \in (0, \delta)$ platí

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi}. \tag{2}$$

Nech n_0 je také prirodzené číslo, pre ktoré platí $\dfrac{\pi}{n_0} < \delta$. Nech $n \geq n_0$. Potom

$$|a_n| = \left| \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right) \left(\sin \frac{\pi i}{n^2} - \frac{\pi i}{n^2}\right) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right) \left| \sin \frac{\pi i}{n^2} - \frac{\pi i}{n^2} \right|. \tag{3}$$

Nech $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pretože $n \geq n_0$, platí

$$0 < \frac{\pi i}{n^2} \leq \frac{\pi n}{n^2} = \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{n_0} < \delta.$$

Tým sme ukázali, že platí

$$\frac{\pi i}{n^2} \in (0, \delta),$$

preto podľa (2) platí

$$\left| \frac{\sin \frac{\pi i}{n^2}}{\frac{\pi i}{n^2}} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Odtiaľ po malej úprave dostávame

$$\left| \sin \frac{\pi i}{n^2} - \frac{\pi i}{n^2} \right| < \frac{\varepsilon i}{2n^2}. \tag{4}$$

Podľa (3) a (4) potom platí

$$|a_n| < \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{\varepsilon i}{2n^2}.$$

Ako sme ukázali vyššie, platí

$$\sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{i}{n^2} = \frac{(n+1)(5n+1)}{6n^2}.$$

Preto

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{(n+1)(5n+1)}{6n^2} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\leq 2} \cdot \underbrace{\frac{5n+1}{6n}}_{\leq 1} \leq \varepsilon.$$

Tým sme ukázali, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $|a_n| < \varepsilon$.