

ÚPLNOSŤ PRIESTORU $\ell_1(\mathbb{R})$

V nasledujúcom dôkaze budeme pracovať s postupnosťou postupností reálnych čísel. Tomu prispôbime symboliku. Postupnosť reálnych čísel bude pre nás funkcia $\mathbf{a} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. To napríklad znamená, že namiesto $\mathbf{a}_n$ píšeme $\mathbf{a}(n)$.

Pripomeňme si základné definície.

Postupnosť $\mathbf{a}$ reálnych čísel je *Cauchyovská*, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje prirodzené číslo n_0 také, že pre každé $m, n \geq n_0$ platí $|\mathbf{a}(n) - \mathbf{a}(m)| < \varepsilon$.

Postupnosť reálnych čísel $\mathbf{a}$ *konverguje* k reálnemu číslu a , ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje prirodzené číslo n_0 také, že pre každé $n \geq n_0$ platí $|\mathbf{a}(n) - a| < \varepsilon$.

Symbolom $\ell_1(\mathbb{R})$ označujeme vektorový priestor postupností reálnych čísel $\mathbf{x}$, ktorých norma $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |\mathbf{x}(k)|$ je konečná.

Postupnosť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$ v priestore $\ell_1(\mathbb{R})$ je *Cauchyovská*, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje prirodzené číslo n_0 také, že pre každé $m, n \geq n_0$ platí $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|_1 < \varepsilon$.

Postupnosť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$ v priestore $\ell_1(\mathbb{R})$ *konverguje* k postupnosti $\mathbf{z} \in \ell_1(\mathbb{R})$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje prirodzené číslo n_0 také, že pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{z}\|_1 < \varepsilon$.

Tvrdenie. *Priestor $\ell_1(\mathbb{R})$ je úplný, t.j. že každá Cauchyovská postupnosť v tomto priestore je konvergentná.*

Dôkaz. Nech $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$ je Cauchyovská postupnosť v priestore $\ell_1(\mathbb{R})$. Pretože ide o postupnosť postupností reálnych čísel, členy týchto postupností môžeme usporiadať do nasledujúcej tabuľky:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{x}_1(1), & \mathbf{x}_1(2), & \mathbf{x}_1(3), & \mathbf{x}_1(4), & \dots & & \\ \mathbf{x}_2(1), & \mathbf{x}_2(2), & \mathbf{x}_2(3), & \mathbf{x}_2(4), & \dots & & \\ \mathbf{x}_3(1), & \mathbf{x}_3(2), & \mathbf{x}_3(3), & \mathbf{x}_3(4), & \dots & & \\ \mathbf{x}_4(1), & \mathbf{x}_4(2), & \mathbf{x}_4(3), & \mathbf{x}_4(4), & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{array}$$

Všimnime si, že každý stĺpec tejto tabuľky môžeme interpretovať ako postupnosť reálnych čísel. Konkrétne, j -ty stĺpec tejto tabuľky určuje postupnosť, ktorú budeme označovať symbolom $\mathbf{z}_j$. Teda $\mathbf{z}_j$ je funkcia $\mathbf{z}_j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná pre každé $n \in \mathbb{N}$ predpisom $\mathbf{z}_j(n) = \mathbf{x}_n(j)$.

Nech j je prirodzené číslo. Pretože pre každé $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$|\mathbf{z}_j(n) - \mathbf{z}_j(m)| = |\mathbf{x}_n(j) - \mathbf{x}_m(j)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\mathbf{x}_n(k) - \mathbf{x}_m(k)| = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|_1,$$

postupnosť $\mathbf{z}_j$ je Cauchyovská.

Pretože každá Cauchyovská postupnosť reálnych čísel konverguje, existuje reálne číslo z_j také, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{z}_j(n) = z_j$. Vzhľadom na definíciu funkcie $\mathbf{z}_j$ potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n(j) = z_j$.

Pretože $j \in \mathbb{N}$ bolo ľubovoľné, vytvorili sme vlastne celú postupnosť reálnych čísel, ktorú označíme symbolom $\mathbf{z}$. Teda $\mathbf{z}$ je funkcia $\mathbf{z} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná pre každé $j \in \mathbb{N}$ predpisom $\mathbf{z}(j) = z_j$.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{x}_1(1), & \mathbf{x}_1(2), & \mathbf{x}_1(3), & \mathbf{x}_1(4), & \dots & & \\ \mathbf{x}_2(1), & \mathbf{x}_2(2), & \mathbf{x}_2(3), & \mathbf{x}_2(4), & \dots & & \\ \mathbf{x}_3(1), & \mathbf{x}_3(2), & \mathbf{x}_3(3), & \mathbf{x}_3(4), & \dots & & \\ \mathbf{x}_4(1), & \mathbf{x}_4(2), & \mathbf{x}_4(3), & \mathbf{x}_4(4), & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4, & \dots & & \end{array}$$

Ukážeme, že postupnosť $\mathbf{z}$ leží v priestore $\ell_1(\mathbb{R})$. t.j. že platí $\sum_{j=1}^{\infty} |z_j| < \infty$.

Nech n je prirodzené číslo. Potom pre čiastočný súčet tohto radu máme

$$\sum_{j=1}^n |z_j| = \sum_{j=1}^n \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k(j) \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |\mathbf{x}_k(j)|.$$

Pretože každá Cauchyovská postupnosť je ohraničená, existuje $M \geq 0$ také, že pre každé k platí $\|\mathbf{x}_k\|_1 \leq M$. Teda pre ľubovoľné $k, n \in \mathbb{N}$ máme

$$\sum_{j=1}^n |\mathbf{x}_k(j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\mathbf{x}_k(j)| = \|\mathbf{x}_k\|_1 \leq M.$$

Odtiaľ v limite pre $k \rightarrow \infty$ dostávame

$$\sum_{j=1}^n |z_j| \leq M.$$

Pretože n bolo ľubovoľné, máme $\|\mathbf{z}\|_1 \leq M$. Teda $\mathbf{z} \in \ell_1(\mathbb{R})$.

Na záver nám zostáva ukázať, že postupnosť postupností $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$ konverguje k postupnosti $\mathbf{z}$.

Nech $\varepsilon > 0$. Vyberme n_0 také, že pre každé $m, n \geq n_0$ platí $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|_1 < \varepsilon$.

Nech k je prirodzené číslo. Potom pre každé $m, n \geq n_0$ platí

$$\sum_{j=1}^k |\mathbf{x}_n(j) - \mathbf{x}_m(j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\mathbf{x}_n(j) - \mathbf{x}_m(j)| = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|_1 < \varepsilon.$$

Odtiaľ v limite pre $m \rightarrow \infty$ dostávame, že pre každé $n \geq n_0$ platí

$$\sum_{j=1}^k |\mathbf{x}_n(j) - z_j| \leq \varepsilon.$$

Pretože $k \in \mathbb{N}$ bolo ľubovoľné, pre každé $n \geq n_0$ máme

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{z}\|_1 \leq \varepsilon.$$

□

Na doplnenie ešte ukážeme, že každá Cauchyovská postupnosť je ohraničená.

Nech $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$ je Cauchyovská postupnosť v priestore $\ell_1(\mathbb{R})$. Potom pre $\varepsilon = 1$ existuje prirodzené číslo n_0 také, že pre každé $m, n \geq n_0$ platí $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|_1 < 1$.

Nech $n \geq n_0$. Potom platí

$$\|\mathbf{x}_n\|_1 = \|\mathbf{x}_{n_0} + (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n_0})\|_1 \leq \|\mathbf{x}_{n_0}\|_1 + \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n_0}\|_1 < \|\mathbf{x}_{n_0}\|_1 + 1.$$

Tým sme ukázali, že pre každé $n \geq n_0$ platí $\|\mathbf{x}_n\|_1 < \|\mathbf{x}_{n_0}\|_1 + 1$.

Položme

$$M = \max\{\|\mathbf{x}_1\|_1, \|\mathbf{x}_2\|_1, \dots, \|\mathbf{x}_{n_0}\|_1\} + 1.$$

Potom zrejme pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\|\mathbf{x}_n\|_1 < M$.

http://hans.math.upenn.edu/~kazdan/508F10/completeness-1_1-2010.pdf