# OBZORY MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

2/2012 (41)

**OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2012 ročník 41**

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

**HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 2/2012 Volume 41**

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2012 (41)

# Poznámka o kubických rovniciach

## Jozef Doboš

**Abstract:** The article is devoted to one interesting assignment about the roots of a cubic equation.

**Key words:** Cubic equation, Teaching mathematics

**Súhrn:** Článok je venovaný jednej zaujímavej úlohe o koreňoch istej kubickej rovnice.

**Kľúčové slová:** kubická rovnica, vyučovanie matematiky

**MESC:** H30

V tomto článku sa budeme venovať jednej zaujímavej úlohe. Raz ju dal študentom jeden učiteľ, pričom za jej vyriešenie ponúkal finančnú odmenu.

**Úloha**

Nech $u > v > w$ sú korene rovnice $x^3 - 3x + 1 = 0$. Nájdite taký kvadratický polynóm $Q(x)$, že $Q(u) = v$, $Q(v) = w$, $Q(w) = u$.

Pozrime sa, čo sa o kubických rovniciach môže dozvedieť náš gymnazista z najnovšej učebnice [4]. Okrem opisu histórie o hľadaní riešenia tam môžeme nájsť aj vzorec pre výpočet jedného z koreňov kubickej rovnice $x^3 + ax + b = 0$. Hneď v nasledujúcom odseku sa autor podrobne venuje hľadaniu približnej hodnoty koreňov rovnice $x^3 - 7x + 1 = 0$.

V tejto súvislosti môže byť zaujímavé zistenie, že pred 200 rokmi sa kubické a kvartické rovnice vyučovali v Rusku na gymnáziách. Informáciu o tom možno nájsť v knihe [1]. Učebnica [2], ktorá sa vtedy používala, je dnes vďaka internetu voľne dostupná (`http://www.mathedu.ru`).

Pozrime sa, aký prístup k riešeniu kubických rovníc je použitý v učebnici [2]. Výklad začína vzorcom pre tretiu mocninu súčtu:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

čo možno previesť do tvaru

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

Keď položíme $x = a + b$, môžeme vidieť, že rovnica tretieho stupňa

$$x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$$

má jeden koreň rovný číslu $x = a + b$. Položme $a^3 = p$ a $b^3 = q$. Potom naša rovnica má tvar

$$x^3 = 3x\sqrt[3]{pq} + p + q,$$

pričom jedným z jej koreňov bude $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

Tento postup teraz aplikujeme na kubickú rovnicu z našej úlohy, t. j. na rovnicu

$$x^3 = 3x - 1. \tag{1}$$

Potom čísla $p$ a $q$ musia spĺňať podmienky

$$\begin{aligned} pq &= 1, \\ p + q &= -1. \end{aligned}$$

To sú však Viètove vzťahy medzi koreňmi a koeficientami kvadratickej rovnice (pozri napr. [4], str. 37 – 38). To znamená, že čísla $p$ a $q$ sú koreňmi kvadratickej rovnice

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Táto rovnica však reálne korene nemá. Dostali sme sa do zvláštnej situácie. Zo zadania úlohy vieme, že kubická rovnica (1) má tri reálne korene. Napriek tomu, tieto korene nie je možné vyjadriť v radikáloch bez použitia komplexných čísel. Hovorí sa tomu *Casus irreducibilis*. Podrobné vysvetlenie tohto javu možno nájsť v knihe [5]. Odporúčame tiež článok [6], ktorý je dostupný na internete (`http://dml.cz`).

Môžeme tiež použiť niektorý z počítačových nástrojov pre symbolické výpočty. Napríklad v programe MAPLE™ na to slúži príkaz

```
solve(x^3-3*x+1=0,x).
```

Potrebujeme však vôbec poznať tieto korene? V zadaní úlohy sa to nežiada.

Korene rovnice $x^3 - 3x + 1 = 0$ sú aj koreňmi rovnice

$$(x^3 - 3x + 1)(x^3 - 3x - 1) = 0.$$

Táto rovnica po úprave má tvar

$$x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 1 = 0,$$

čo je rovnica tretieho stupňa s neznámou $y = x^2$, t. j.

$$y^3 - 6y^2 + 9y - 1 = 0.$$

Pri riešení takýchto rovníc tretieho stupňa najskôr eliminujeme kvadratický člen pomocou lineárnej substitúcie. Pre našu rovnicu použijeme substitúciu $y = z + 2$. Po úprave dostávame rovnicu

$$z^3 - 3z + 1 = 0.$$

Táto je však zhodná s pôvodnou rovnicou, len s neznámou $z$. Pretože $y = z + 2$, $y = x^2$, máme $z = x^2 - 2$. Tým sme overili, že platí: Ak $x$ je koreňom rovnice $x^3 - 3x + 1 = 0$, potom $z = x^2 - 2$ je koreňom rovnice $z^3 - 3z + 1 = 0$. Kandidátom na hľadaný kvadratický polynóm je teda

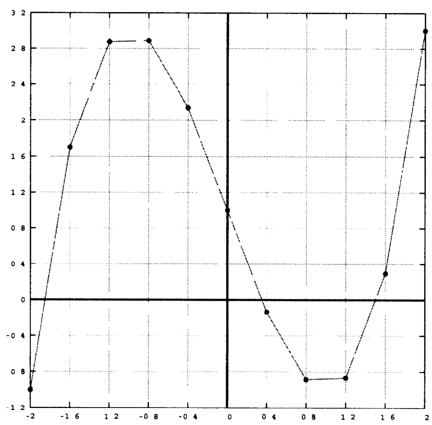
$$Q(x) = x^2 - 2.$$

Zatiaľ vieme, že platí: Ak $x \in \{u, v, w\}$, potom $z = Q(x) \in \{u, v, w\}$.

Zostáva nám ukázať, že platí $Q(u) = v$, $Q(v) = w$, $Q(w) = u$. K tomu použijeme separáciu koreňov. Aby sme získali predstavu o grafe funkcie $y = x^3 - 3x + 1$, vypočítame súradnice niektorých bodov ležiacich na tomto grafe. Vypočítané hodnoty usporiadame do tabuľky:

| $x$ | $-2$ | $-1.6$ | $-1.2$ | $-0.8$ | $-0.4$ | $0$ | $-0.4$ | $-0.8$ | $-1.2$ | $-1.6$ | $-2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | $-1.704$ | $-2.872$ | $-2.888$ | $-2.136$ | $-1$ | $-0.136$ | $-0.888$ | $-0.872$ | $-0.296$ | $-3$ |

V pravouhlom súradnicovom systéme znázorníme tieto body a spojíme ich lomenou čiarou, ktorá nám aproximuje graf danej funkcie na obrázku 1.



*Obr. 1.* Platí: $-2 < w < -1.6$, $0 < v < 0.4$, $1.2 < u < 1.6$

Pretože funkcia $Q(x) = x^2 - 2$ je klesajúca na intervale $(-\infty, 0]$ a je rastúca na intervale $[0, \infty)$, platí

$$2 = Q(-2) > Q(w) > Q(-1.6) = 0.56,$$
$$-2 = Q(0) < Q(v) < Q(0.4) = -1.84,$$
$$-0.56 = Q(1.2) < Q(u) < Q(1.6) = 0.56.$$

Tým sme ukázali, že platí $Q(w) > Q(u) > Q(v)$. Odtiaľ už vyplýva, že polynóm $Q(x) = x^2 - 2$ má požadované vlastnosti. Úloha je vyriešená.

Na záver si ukážeme, že korene rovnice $x^3 - 3x + 1 = 0$ možno vyjadriť v goniometrickom tvare. Pretože

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

platí

$$2\cos(3\theta) = (2\cos\theta)^3 - 3\cdot(2\cos\theta),$$

odkiaľ

$$2\cos(3\theta) + 1 = (2\cos\theta)^3 - 3\cdot(2\cos\theta) + 1.$$

Substitúciou $x = 2\cos\theta$ prevedieme rovnicu $x^3 - 3x + 1 = 0$ do tvaru

$$2\cos(3\theta) + 1 = 0.$$

Túto rovnicu vyriešime a dosadením do substitúcie $x = 2\cos\theta$ dostávame korene rovnice $x^3 - 3x + 1 = 0$ v tvare

$$x_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right), \quad x_2 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right), \quad x_3 = 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right).$$

Pretože funkcia kosínus je na intervale $(0, \pi)$ klesajúca, máme

$$x_1 > x_2 > x_3.$$

Pretože

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1,$$

platí

$$x_2 = x_1^2 - 2, \quad x_3 = x_2^2 - 2, \quad x_1 = 2\cos\left(\frac{16\pi}{9}\right) = x_3^3 - 2.$$

Znova sme overili, že hľadaný kvadratický polynóm je $Q(x) = x^2 - 2$.

Na záver ukážeme, že touto metódou možno riešiť aj iné kubické rovnice. Videli sme, že platí

$$2\cos(3\theta)+1=(2\cos\theta)^3-3\cdot(2\cos\theta).$$

Potom

$$(2\cos\theta)^3=3\cdot(2\cos\theta)+2\cos(3\theta)\quad\Big/\cdot p^3$$

odkiaľ

$$(2p\cos\theta)^3=3p^2\cdot(2p\cos\theta)+2p^3\cos(3\theta).$$

Vidíme, že číslo $x=2p\cos\theta$ je koreňom rovnice

$$x^3=3p^2x+q,$$

kde

$$q=2p^3\cos(3\theta).$$

Korene rovnice

$$x^3=3p^2x+q$$

teda hľadáme v tvare $x=2p\cos\theta$, kde čísla $\theta$ sú koreňmi rovnice

$$q=2p^3\cos(3\theta).$$

Na ďalšie štúdium odporúčame knihy [5] a [3].


**Poďakovanie**

Článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/1331/12.


## Literatúra


[1] Бычков, Б. П., *Международное движение за реформу преподавания математики в средней школе*, Издательство «Штиинца», Кишинев, 1975.

[2] Фусс, Н., *Начальныя Основанія Чистой Маѳематики, Часть I, содержащая Начальныя Основанія Алгебры*, СанктПетербургъ, 1820.

[3] Kalman, D., *Uncommon Mathematical Excursions: Polynomia and Related Realms*, MAA, 2009.

[4] Kubáček, Z., *Matematika pre druhý ročník gymnázií, prvá časť*, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2010.

[5] Schwarz, Š., *Základy náuky o riešení rovníc*, Vydavateľstvo SAV, 1967.

[6] Weyr, E., *Casus irreducibilis*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 22, 257 – 259.



Adresa autora:

Ústav matematických vied, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Jesenná 5, 040 01 Košice

e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

## Adresa redakcie

**Matematická a informatická časť**
Katedra matematiky PF KU, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok
(e-mail: jan.guncaga@ku.sk)

**Fyzikálna časť**
Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

**Objednávky a predplatné vybavuje**
Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: press@protonit.com)

**OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**
**2/2012 ročník 41**

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným prispením
Ministerstva školstva Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Jozef Doboš, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Ján Gunčaga, Aba Teleki
Technická redakcia: Martin Papčo, Vladimír Kutnár
Zástupca vydavateľa: Ivo Kluvanec
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

The Journal "Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences"
is reviewed in the database MathEduc published by FIZ Karlsruhe
(http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/).

# OBSAH

Jozef D o b o š : Poznámka o kubických rovniciach .................................. 1

Daniela V e l i ch o v á : GeoGebra: dynamická matematika vo vzdelávaní
Slovenský GeoGebra Inštitút a jeho seminár v Kočovciach ........................ 6

Rita N a g y – K o n d o r, Gusztáv Áron S z i k i : „Basic Knowledge
of Natural Sciences": a new foundation subject
at the Faculty of Engineering, University of Debrecen .............................. 9

K srdcu učiteľa matematiky (vybral a zostavil Dušan Jedinák) .................... 18

Beloslav R i e č a n : Moment, prosím! ..................................................... 19

Informácie o matematických a informatických konferenciách ................... 26

Texty úloh domáceho kola 62. ročníka matematickej olympiády ................ 27

Ladislav E. R o t h : The Cassini-Huygens Mission (1st Part) .................... 31

Texty úloh 1. kola 54. ročníka fyzikálnej olympiády (šk. r. 2012 – 2013)
kategórie G, E, F, kategórie C, D (1. – 4. úloha) ...................................... 41

Michal F o r i š e k : Olympiáda v informatike:
domáce kolo 28. ročníka, kategória A ...................................................... 55

JSMF a rozvoj matematiky a fyziky na Slovensku ..................................... 64

Pavel P o v i n e c : Výsledky záťažových testov slovenských jadrových
elektrární ........................................................................................ 65

Ivan Č e r v e ň : Termíny čas a doba nie sú synonymá ............................. 69

# CONTENTS

Jozef Doboš: Note on Cubic Equations ...................................................... 1

Daniela Velichová: GeoGebra: Dynamic Mathematics in Education
Slovak GeoGebra Institute and Seminar in Kočovce .................................. 6

Rita Nagy – Kondor, Gusztáv Áron Sziki : „Basic Knowledge
of Natural Sciences": a new foundation subject
at the Faculty of Engineering, University of Debrecen .............................. 9

Getting to the Heart of Mathematics Teacher
(Selected and Edited by Dušan Jedinák) ..................................................... 18

Beloslav Riečan: One Moment, Please! ..................................................... 19

Information about Mathematical and Computer Science Conferences ......... 26

Tasks of the Domestic Cycle of the 62nd Mathematical Olympiad ............. 27

Ladislav E. Roth: The Cassini-Huygens Mission (1st Part) ........................ 31

Tasks of the First Cycle of the 54th Physics
Olympiad (School Year 2012 – 2013) Categories G, E, F,
Categories C, D (Tasks 1 - 4) ...................................................................... 41

Michal Forišek: Informatics Olympiad: Domestic Cycle of the 28th Olympiad,
Category A .................................................................................................. 55

Society of Slovak Mathematicians and Physicists and its
Development of Mathematics and Physics in Slovakia ............................... 64

Pavel Povinec: The Results of the Stress Tests of the Slovak
Nuclear Power Plants .................................................................................. 65

Ivan Červeň: The Terms Time and Duration are not Synonymous .............. 69