Math. Slovaca 31, 1981, No. 1, 3—12

О ФУНКЦИЯХ, КОМПОЗИЦИЯ С МЕТРИКОЙ КОТОРЫХ ЯВЛЯЕТСЯ МЕТРИКОЙ

ЯН БОРСИК—ЙОЗЕФ ДОБОШ

При исследовании свойств данного метрического пространства (M, ϱ) часто является пригодными заменить метрику ϱ иной, являющейся с нею равномерно, или топологически эквивалентной. Поскольку метрика является функцией, новую метрику возможно приобрести ее композицией с какой-то функцией $f\colon R_0^+ \to R_0^+$. В литературе известны некоторые достаточные условия: если функция f достигает нуль в нуле и только в нуле, является неубывающей и вогнутой [2, стр. 70]; если функция f приобретает нуль в нуле и только в нуле, является неубывающей и субаддитивной [3, стр. 178], [4, стр. 149]. Для функций, соответствующих этим условиям, известны тоже некоторые результаты о эквивалентности данных метрик: если функция f является непрерывной в точке 0, то метрики $\varrho, f\circ\varrho$ являются равномерно эквивалентными [4, стр. 228], если функция f является непрерывной, то метрики $\varrho, f\circ\varrho$ являются топологически эквивалентными [3, стр. 178]. В первой части работы исследуются некоторые достаточные условия. Необходимое и достаточное условие находится во второй части, в которой исследуется множество $\mathcal{M}$ всех функций, композиция с каждой метрикой которых является метрикой. Третья часть работы исследует отношения метрик $\varrho, f\circ\varrho$ для $f\in\mathcal{M}$.

1. Достаточные условия

1.1. Утверждение. *Пусть (M, ϱ) является метрическим пространством и пусть функция $f\colon R_0^+ \to R_0^+$ обладает следующими свойствами (где $R_0^+ = \{x\in R\colon x\geqq 0\}$):*

(1) $\forall a\in R_0^+\colon f(a)=0 \Leftrightarrow a=0$,

(2) $\forall a, b\in R_0^+\colon f(a+b)\leqq f(a)+f(b)$,

(3) $\forall a, b\in R_0^+\colon a\leqq b \Rightarrow f(a)\leqq f(b)$.

Тогда функция $f\circ\varrho$ является метрикой на M.

Доказательство. [4, стр. 149].

1.2. Утверждение. *Пусть (M, ϱ) является метрическим пространством и пусть функция $f\colon R_0^+ \to R_0^+$ обладает следующими свойствами:*

Math. Slovaca 31, 1981, No. 1, 3–12

FUNCTIONS WHOSE COMPOSITION WITH EVERY METRIC IS A METRIC

Ján Borsík—Jozef Doboš

When examining the properties of a given metric space (M, ϱ), it is often adequate to exchange the metric ϱ for a different one which is uniformly or topologically equivalent with it. Because the metric is a function, new metric can be obtained by its composition with some function $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$. In literature, several sufficient conditions are known: If the function f obtains zero if and only if in zero, it is nondecreasing and concave [2, p. 70]; If function f obtains zero if and only if in zero, it is nondecreasing and subadditive [3, p. 178], [4, p. 149]. For functions which meet these conditions, there are some known results about equivalence of given metrics: if function f is continuous at point zero, then the metrics ϱ, $f \circ \varrho$ are uniformly equivalent [4, p. 228], if function f is continuous, then metrics ϱ, $f \circ \varrho$ are topologically equivalent [3, p. 178]. In the first section of the work we examine the sufficient conditions. Necessary and sufficient condition can be found in the second section where the set $\mathscr{M}$ of all functions of which the composition with every metric is metric is explored. The third section investigates the connections of metrics ϱ, $f \circ \varrho$ for $f \in \mathscr{M}$.

1. Sufficient Conditions

1.1. Proposition. *Let (M, ϱ) be a metric space. Let a function $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ have the following properties (where $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqq 0\}$):*
(1) $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ : f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0,$
(2) $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ : f(a + b) \leqq f(a) + f(b),$
(3) $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ : a \leqq b \Rightarrow f(a) \leqq f(b).$
Then $f \circ \varrho$ is a metric on M.

Proof. [4; p. 149].

1.2. Proposition. *Let (M, ϱ) be a metric space. Let a function $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ have the following properties:*

(1) $\forall a \in R_0^+ : f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$,

(2) $\forall p, q \in R_0^+,\ p + q = 1\ \forall a, b \in R_0^+ : f(pa + qb) \geqq p \cdot f(a) + q \cdot f(b)$.

Тогда функция $f \circ \varrho$ является метрикой на M.

Доказательство. Пусть $x, y \in R_0^+$, $x < y$. Подставляя в (2) $q = x/y$, $a = 0$, $b = y$, получаем $y \cdot f(x) - x \cdot f(y) \geqq 0$. Положив в (2) $p = x/y$, $a = x$, $b = x + y$ и используя предыдущее неравенство, получаем $f(x+y) \leqq f(x) + f(y) - (y \cdot f(x) - x \cdot f(y))/(y - x) \leqq f(x) + f(y)$.

Подставляя в (2) $p = 1/2$, $a = 0$, $b = 2x$, получаем $f(x + x) \leqq f(x) + f(x)$. Следовательно, $\forall x, y \in R_0^+ : f(x + y) \leqq f(x) + f(y)$. Пусть $\exists x, y \in R_0^+$, $x < y$: $f(x) > f(y)$. Положим $z = (y \cdot f(x) - x \cdot f(y))/(f(x) - f(y)) \in R^+$ (где $R^+ = \{x \in R : x > 0\}$). Подставляя в (2) $p = f(y)/f(x)$, $a = x$, $b = z$, получаем $(1 - f(y)/f(x)) \cdot f(z) \leqq 0$, *т. е.* $f(z) \leqq 0$, а это в противоречии с (1). Значит,

$$\forall x, y \in R_0^+ : x \leqq y \Rightarrow f(x) \leqq f(y).$$

Согласно 1.1. $f \circ \varrho$ является метрикой.

1.3. Утверждение. *Пусть (M, ϱ) является метрическим пространством и пусть функция f: $R_0^+ \to R_0^+$ обладает следующими свойствами:*

(1) $f(0) = 0$,

(2) $\exists a \in R^+\ \forall x \in R^+ : f(x) \in \langle a, 2a \rangle$.

Тогда функция $f \circ \varrho$ является метрикой.

Доказательство. Очевидно, что $f \circ \varrho$ обладает 1. и 2. свойством метрики. Пусть x, y, $z \in M$. Если $x \neq y \neq z \neq x$, то $(f \circ \varrho)(x, y) \leqq 2a = a + a \leqq (f \circ \varrho)(y, x) + (f \circ \varrho)(y, z)$. В остальных случаях неравенство треугольника очевидно выполняется. Следовательно, $f \circ \varrho$ является метрикой.

2. Необходимое и достаточное условие

2.1. Обозначим знаком $\mathcal{M}$ множество всех функций f: $R_0^+ \to R_0^+$ обладающих следующим свойством: для каждого метрического пространства (M, ϱ) $(M, f \circ \varrho)$ тоже является метрическим пространством.

2.2. Утверждение. *$(\mathcal{M}, \circ)$ является моноидом.*

Доказательство. Пусть f, $g \in \mathcal{M}$ и пусть (M, ϱ) — метрическое пространство. Тогда $(M, g \circ \varrho)$ является метрическим пространством. Следовательно, $(M, f \circ (g \circ \varrho)) = (M, (f \circ g) \circ \varrho)$ является метрическим пространством, а это означает, что $f \circ g \in \mathcal{M}$.

2.3. Лемма. *Пусть $f \in \mathcal{M}$. Тогда*

$$\forall a \in R_0^+ : f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Доказательство. Пусть $M = R$, $\varrho(x, y) = |x - y|$ для всех $x, y \in R$. Тогда

(1) $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ : f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
(2) $\forall p, q \in \mathbb{R}_0^+, p + q = 1\ \forall a, b \in \mathbb{R}^+ : f(pa + qb) \geqq p \cdot f(a) + q \cdot f(b)$.
Then $f \circ \varrho$ is a metric on M.

Proof. Let $x, y \in \mathbb{R}_0^+$, $x < y$. By the substitution $q = x/y$, $a = 0$, $b = y$ in (2) we obtain $y \cdot f(x) - x \cdot f(y) \geqq 0$. By the substitution $p = x/y$, $a = x$, $b = x + y$ in (2) and by the preceding inequality we obtain $f(x + y) \leqq f(x) + f(y) - (y \cdot f(x) - x \cdot f(y))/(y - x) \leqq f(x) + f(y)$.

By the substitution $p = 1/2$, $a = 0$, $b = 2x$ in (2) we obtain $f(x + x) \leqq f(x) + f(x)$. Thus $\forall x, y \in \mathbb{R}_0^+ : f(x + y) \leqq f(x) + f(y)$. Now suppose that there are $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ such that $x < y$ and $f(x) > f(y)$. Put $z = (y \cdot f(x) - x \cdot f(y))/(f(x) - f(y)) \in \mathbb{R}^+$ (where $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$). By the substitution $p = f(y)/f(x)$, $a = x$, $b = z$ in (2) we obtain $(1 - f(y)/f(x)) \cdot f(z) \leqq 0$, i.e. $f(z) \leqq 0$, which contradicts (1). This yields

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_0^+ : x \leqq y \Rightarrow f(x) \leqq f(y).$$

By 1.1 $f \circ \varrho$ is a metric.

1.3. Proposition. *Let (M, ϱ) be a metric space. Let a function $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ have the following properties:*
(1) $f(0) = 0$,
(2) $\exists a \in \mathbb{R}^+\ \forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \in \langle a, 2a \rangle$.
Then $f \circ \varrho$ is a metric.

Proof. It is clear that $f \circ \varrho$ has 1. and 2. property of metric. Let $x, y, z \in M$. If $x \neq y \neq z \neq x$, then $(f \circ \varrho)(x, y) \leqq 2a = a + a \leqq (f \circ \varrho)(y, x) + (f \circ \varrho)(y, z)$. In the other cases the triangle inequality is evident. Thus $f \circ \varrho$ is a metric.

2. Necessary and Sufficient Condition

2.1. Denote by $\mathscr{M}$ the set of all functions $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ with the following property: for each metric space (M, ϱ) $(M, f \circ \varrho)$ is a metric space.

2.2. Proposition. *$(\mathscr{M}, \circ)$ is a monoid.*

Proof. Let $f, g \in \mathscr{M}$. Let (M, ϱ) be an arbitrary metric space. Then $(M, g \circ \varrho)$ is a metric space. Thus $(M, f \circ (g \circ \varrho)) = (M, (f \circ g) \circ \varrho)$ is a metric space, which yields $f \circ g \in \mathscr{M}$.

2.3. Lemma. *Let $f \in \mathscr{M}$. Then*

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ : f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Proof. Put $M = \mathbb{R}$, $\varrho(x, y) = |x - y|$ for each $x, y \in \mathbb{R}$. Then $(M, f \circ \varrho)$

$(M, f\circ\varrho)$ является метрическим пространством и $\forall a\in R_0^+ : \varrho(a, 0)=a$. Пусть $a\in R_0^+$. Тогда $0=f(a) = (f\circ\varrho)(a, 0) \Leftrightarrow a=0$.

2.4. Лемма. *Пусть $f\in\mathcal{M}$. Тогда*

$$\forall a, b, c\in R_0^+ : |a-b|\leqq c\leqq a+b \Rightarrow f(a)\leqq f(b)+f(c).$$

Доказательство. Пусть $M=R\times R$, $\varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{((x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2)}$ для всех $x_1, x_2, y_1, y_2\in R$. Пусть $a, b, c\in R_0^+$, $|a-b| \leqq c \leqq a+b$, тогда $a + b + c \geqq 0$, $a - b + c \geqq 0$, $a + b - c \geqq 0$, $-a + b + c \geqq 0$. Положим $u = (a/2, 0)$, $v = (-a/2, 0)$, $w = ((c^2-b^2)/(2a), (\sqrt{((a + b + c) \cdot (a + b - c) \cdot (a - b + c) \cdot (-a + b + c))})/(2a))$, если $a\neq 0$ и $w=(b, 0)$, если $a=0$. Из того, что $(M, f\circ\varrho)$ является метрическим пространством, следует $(f\circ\varrho)(u, v) \leqq (f\circ\varrho)(u, w) + (f\circ\varrho)(v, w)$. Значит, $f(a) \leqq f(b) + f(c)$.

2.5. Лемма. *Пусть $f\in\mathcal{M}$. Тогда*

(1) $\forall a, b\in R_0^+ : f(a+b)\leqq f(a)+f(b)$,
(2) $\forall a, b\in R_0^+ : a\leqq 2b \Rightarrow f(a)\leqq 2\cdot f(b)$.

Доказательство. Пусть $a, b\in R_0^+$. Поскольку $|(a+b)-a| \leqq b \leqq (a+b)+a$, то $f(a+b) \leqq f(a)+f(b)$. Пусть $a, b\in R_0^+$, $a\leqq 2b$. Поскольку $|a-b| \leqq b \leqq a+b$, то $f(a) \leqq f(b) + f(b) = 2\cdot f(b)$.

2.6. Следствие. *Пусть $f\in\mathcal{M}$ и пусть $a\in R_0^+$. Тогда $\forall n\in N: f(a)/2^n \leqq f(a/2^n)$.*

Доказательство. Так как $a\leqq 2\cdot(a/2)$, то $f(a) \leqq 2\cdot f(a/2)$, т. е. $f(a)/2 \leqq f(a/2)$. Пусть $k\in N$ и пусть $f(a)/2^k \leqq (a/2^k)$. Поскольку $a/2^k \leqq 2\cdot(a/2^{k+1})$, то $f(a/2^k) \leqq 2\cdot f(a/2^{k+1})$. Отсюда следует, что $f(a)/2^{k+1} \leqq f(a/2^k)/2 \leqq f(a/2^{k+1})$.

2.7. Теорема. *Пусть f: $R_0^+\to R_0^+$. Тогда для того, чтобы $f\in\mathcal{M}$, необходимо и достаточно, чтобы*

(1) $\forall a\in R_0^+ : f(a)=0 \Leftrightarrow a=0$,
(2) $\forall a, b, c\in R_0^+ : |a-b| \leqq c \leqq a+b \Rightarrow f(a) \leqq f(b)+f(c)$.

Доказательство. Необходимость вытекает из 2.3. и 2.4., покажем достаточность. Пусть (M, ϱ) является метрическим пространством и пусть x, y, $z\in M$. Тогда $(f\circ\varrho)(x, y) = 0 \Leftrightarrow \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x=y$. Положив $\varrho(x, z)=a$, $\varrho(y, y)=b$, $\varrho(y, z)=c$, получим $|a-b| \leqq c \leqq a+b$, и согласно (2) будем иметь $f(a) \leqq f(b) + f(c)$, т. е. $(f\circ\varrho)(x, z) \leqq (f\circ\varrho)(y, x) + (f\circ\varrho)(y, z)$. Отсюда следует, что $f\in\mathcal{M}$.

2.8. Следствие. *Пусть f: $R_0^+\to R_0^+$. Тогда для того, чтобы $f\in\mathcal{M}$, необходимо и достаточно, чтобы:*

(i) $f(0)=0$ & $\exists a\in R^+ : f(a)>0$,
(ii) $\forall a, b, c\in R_0^+ : |a-b|\leqq c\leqq a+b \Rightarrow f(a)\leqq f(b)+f(c)$.

is a metric space and $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ : \varrho(a,0) = a$. Let $a \in \mathbb{R}_0^+$. Then $0 = f(a) = (f \circ \varrho)(a,0) \Leftrightarrow a = 0$.

2.4. Lemma. *Let $f \in \mathscr{M}$. Then*

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+ : |a-b| \leqq c \leqq a+b \Rightarrow f(a) \leqq f(b) + f(c).$$

Proof. Put $M = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\varrho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)}$ for each $x_1,y_1,x_2,y_2 \in \mathbb{R}$. Let $a,b,c \in \mathbb{R}^+$, $|a-b| \leqq c \leqq a+b$. Then $a+b+c \geqq 0$, $a-b+c \geqq 0$, $a+b-c \geqq 0$, $-a+b+c \geqq 0$. Put $u = (a/2,0)$, $v = (-a/2,0)$, $w = \big((c^2-b^2)/(2a), (\sqrt{((a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c)\cdot(-a+b+c))})/(2a)\big)$ in the case $a \neq 0$, and $w = (b,0)$ in the case $a = 0$. Since $(M, f\circ\varrho)$ is a metric space, we have $(f\circ\varrho)(u,v) \leqq (f\circ\varrho)(u,w) + (f\circ\varrho)(v,w)$. Thus $f(a) \leqq f(b) + f(c)$.

2.5. Lemma. *Let $f \in \mathscr{M}$. Then*
(1) *$\forall a,b \in \mathbb{R}_0^+ : f(a+b) \leqq f(a) + f(b)$,*
(2) *$\forall a,b \in \mathbb{R}_0^+ : a \leqq 2b \Rightarrow f(a) \leqq 2\cdot f(b)$.*

Proof. Let $a,b \in \mathbb{R}_0^+$. Since $|(a+b)-a| \leqq b \leqq (a+b)+a$, we have $f(a+b) \leqq f(a) + f(b)$. Let $a,b \in \mathbb{R}_0^+$, $a \leqq 2b$. Since $|a-b| \leqq b \leqq a+b$, we have $f(a) \leqq f(b) + f(b) = 2\cdot f(b)$.

2.6. Corollary. *Let $f \in \mathscr{M}$. Let $a \in \mathbb{R}_0^+$. Then $\forall n \in \mathbb{N} : f(a)/2^n \leqq f(a/2^n)$.*

Proof. Since $a \leqq 2\cdot(a/2)$, we have $f(a) \leqq 2\cdot f(a/2)$, i.e. $f(a)/2 \leqq f(a/2)$. Let $k \in \mathbb{N}$ be such that $f(a)/2^k \leqq f\left(a/2^k\right)$. Since $a/2^k \leqq 2\cdot(a/2^{k+1})$, we obtain $f\left(a/2^k\right) \leqq 2\cdot f\left(a/2^{k+1}\right)$. Hence $f(a)/2^{k+1} \leqq f(a/2^k)/2 \leqq f\left(a/2^{k+1}\right)$.

2.7. Theorem. *Let $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$. Then $f \in \mathscr{M}$ iff*
(1) *$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ : f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$,*
(2) *$\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+ : |a-b| \leqq c \leqq a+b \Rightarrow f(a) \leqq f(b) + f(c)$.*

Proof. Necessity follows from 2.3 and 2.4. We show sufficiency. Let (M,ϱ) be a metric space. Let $x,y,z \in M$. Then $(f\circ\varrho)(x,y) = 0 \Leftrightarrow \varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Put $\varrho(x,z) = a$, $\varrho(y,x) = b$ and $\varrho(y,z) = c$. Then $|a-b| \leqq c \leqq a+b$. By (2) we have $f(a) \leqq f(b) + f(c)$, i.e. $(f\circ\varrho)(x,z) \leqq (f\circ\varrho)(y,x) + (f\circ\varrho)(y,z)$. Thus $f \in \mathscr{M}$.

2.8. Corollary. *Let $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$. Then $f \in \mathscr{M}$ iff*
(i) *$f(0) = 0$ & $\exists a \in \mathbb{R}^+ : f(a) > 0$,*
(ii) *$\forall a,b,c \in \mathbb{R}_0^+ : |a-b| \leqq c \leqq a+b \Rightarrow f(a) \leqq f(b) + f(c)$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из 2.7, покажем достаточность. Пусть $x \in R^+$. Согласно свойству Архимеда $\exists n \in N: a/2^n \leqq 2x$, из чего следует согласно 2.6, 2.5 (2), что $0 < f(a)/2^n \leqq f(a/2^n) \leqq 2 \cdot f(x)$. Тогда $\forall x \in R_0^+ : f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ и в силу 2.7 $f \in \mathcal{M}$.

2.9. Теорема. *Пусть $f \in \mathcal{M}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *f является непрерывной,*

(2) *f является непрерывной в точке 0.*

(3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in R^+ : f(x) < \varepsilon$.

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $a \in R^+$ и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \gamma > 0$ $\forall x \in R_0^+,\ x < \gamma : f(x) < \varepsilon$. Положим $\delta = \min\{\gamma/2, a/2\}$. Поскольку $\delta < \gamma$, то $f(\delta) < \varepsilon$. Пусть $x \in R_0^+$, $|x - a| < \delta$. Так как $|x - a| \leqq \delta \leqq x + a$, то согласно 2.4 справедливо $f(x) \leqq f(a) + f(\delta)$, $f(a) \leqq f(x) + f(\delta)$. Значит, $|f(x) - f(a)| \leqq f(\delta) < \varepsilon$. Тогда $\forall a \in R^+\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in R_0^+,\ |x - a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, т. е. f является непрерывной на R^+ и согласно предположению следует, что f является непрерывной.

(3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists a \in R^+ : f(a) < \varepsilon/2$. В силу 2.5 имеем $\forall x \in R_0^+$, $x \leqq 2a : f(x) \leqq 2 \cdot f(a) < \varepsilon$. Положив $\delta = 2a$, получим $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in R_0^+$, $x < \delta : f(x) < \varepsilon$. Таким образом, f является непрерывной в точке 0. То, что (1) $\Rightarrow$ (3), очевидно.

2.10. Следствие. *Пусть $f \in \mathcal{M}$. Пусть f является разрывной. Тогда $\exists \varepsilon > 0$ $\forall x \in R^+ : f(x) \geqq \varepsilon$.*

2.11. Утверждение. *Пусть $f, g \in \mathcal{M}$. Тогда $f + g$, $\max(f, g) \in \mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть $a \in R_0^+$. Тогда $(f+g)(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) + g(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0\ \&\ g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$; $(\max(f, g))(a) = 0 \Leftrightarrow \max(f(a), g(a)) = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0\ \&\ g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Пусть $a, b, c \in R_0^+$, $|a - b| \leqq c \leqq a + b$. Тогда согласно 2.7 $(f+g)(a) = f(a) + g(a) \leqq f(b) + f(c) + g(b) + g(c) = (f+g)(b) + (f+g)(c)$; $f(a) \leqq f(b) + f(c) \leqq \max(f(b), g(b)) + \max(f(c), g(c))$, $g(a) \leqq g(b) + g(c) \leqq \max(f(b), g(b)) + \max(f(c), g(c))$, т. е. $(\max(f, g))(a) = \max(f(a), g(a)) \leqq \max(f(b), g(b)) + \max(f(c), g(c)) = (\max(f, g))(b) + (\max(f, g))(c)$. Отсюда в силу 2.7 следует, что $f + g$, $\max(f, g) \in \mathcal{M}$.

2.12. Пример. Пусть $f: R_0^+ \to R_0^+$, $f(x) = 3x - 2 \cdot |x - 1| + |x - 2|$ для всех $x \in R_0^+$. Нетрудно проверить, что $f \in \mathcal{M}$, удовлетворяет условиям 1.1, является непрерывной и не является вогнутой.

2.13. Пример. Пусть $f: R_0^+ \to R_0^+$, $f(0) = 0$, $f(x) = [x] + 2$ для всех $x > 0$. Тогда $f \in \mathcal{M}$, удовлетворяет условиям 1.1, является разрывной и не является вогнутой.

;

Proof. Necessity follows from 2.7. We show sufficiency. Let $x \in \mathbb{R}^+$. By the Archimedean property $\exists n \in \mathbb{N} : a/2^n \leqq 2x$. By 2.6 and 2.5 (2) we obtain $0 < f(a)/2^n \leqq f(a/2^n) \leqq 2 \cdot f(x)$. Thus $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, and by 2.7 we have $f \in \mathscr{M}$.

2.9. Theorem. *Let $f \in \mathscr{M}$. The following assertions are equivalent:*
(1) *f is continuous,*
(2) *f is continuous at the point 0,*
(3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in \mathbb{R}^+ : f(x) < \varepsilon$.

Proof. (2) $\Rightarrow$ (1). Let $a \in \mathbb{R}^+$ and let $\varepsilon > 0$. Then $\exists \gamma > 0\ \forall x \in \mathbb{R}_0^+$, $x < \gamma : f(x) < \varepsilon$. Put $\delta = \min\{\gamma/2, a/2\}$. Since $\delta < \gamma$, we have $f(\delta) < \varepsilon$. Let $x \in \mathbb{R}_0^+$, $|x - a| < \delta$. Since $|x - a| \leqq \delta \leqq x + a$ by 2.4 we have $f(x) \leqq f(a) + f(\delta)$, $f(a) \leqq f(x) + f(\delta)$. Thus $|f(x) - f(a)| \leqq f(\delta) < \varepsilon$. This yields $\forall a \in \mathbb{R}^+\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}_0^+$, $|x-a| < \delta : |f(x)-f(a)| < \varepsilon$, i.e. f is continuous on $\mathbb{R}^+$ and by the assumption f is continuous.

(3) $\Rightarrow$ (2). Let $\varepsilon > 0$. Then $\exists a \in \mathbb{R}^+ : f(a) < \varepsilon/2$. By 2.5 we obtain $\forall x \in \mathbb{R}_0^+, x \leqq 2a : f(x) \leqq 2 \cdot f(a) < \varepsilon$. Put $\delta = 2a$. Then $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_0^+, x < \delta : f(x) < \varepsilon$. Hence f is continuous at the point 0.

(1) $\Rightarrow$ (3) is evident.

2.10. Corollary. *Let $f \in \mathscr{M}$. Let f be discontinuous. Then* $\exists \varepsilon > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \geqq \varepsilon$.

2.11. Proposition. *Let $f, g \in \mathscr{M}$. Then $f + g$, $\max(f, g) \in \mathscr{M}$.*

Proof. Let $a \in \mathbb{R}_0^+$. Then $(f + g)(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) + g(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0\ \&\ g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$; $(\max(f, g))(a) = 0 \Leftrightarrow \max(f(a), g(a)) = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0\ \&\ g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Let $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : |a - b| \leqq c \leqq a + b$. By 2.7 we have $(f + g)(a) = f(a) + g(a) \leqq f(b) + f(c) + g(b) + g(c) = (f + g)(b) + (f + g)(c)$; $f(a) \leqq f(b)+f(c) \leqq \max(f(b), g(b))+\max(f(c), g(c))$, $g(a) \leqq g(b)+g(c) \leqq \max(f(b), g(b))+\max(f(c), g(c))$, i.e. $(\max(f, g))(a) = \max(f(a), g(a)) \leqq \max(f(b), g(b)) + \max(f(c), g(c)) = (\max(f, g))(b) + (\max(f, g))(c)$. By 2.7 we obtain $f + g$, $\max(f, g) \in \mathscr{M}$.

2.12. Example. Let $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = 3x - 2 \cdot |x - 1| + |x - 2|$ for each $x \in \mathbb{R}_0^+$. It is not difficult to verify that $f \in \mathscr{M}$, f satisfies the conditions of 1.1, f is continuous and f is not concave.

2.13. Example. Let $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f(0) = 0$, $f(x) = [x] + 2$ for each $x > 0$. Then $f \in \mathscr{M}$, f satisfies the conditions of 1.1, f is discontinuous and f is not concave.

2.14. Лемма. *Пусть* $f \in C(\langle a, b\rangle)$, где $a, b \in R$, $a<b$. *Пусть* $f(a)=f(b)$. *тогда* $\forall \varepsilon>0\ \exists u, v \in \langle a, b\rangle: 0 < |u-v| < \varepsilon\ \&\ f(u) = f(v)$.

2.15. Утверждение. *Пусть* $f \in C(\langle a, b\rangle)$, *где* $a, b \in R$, $a<b$. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists x, y \in \langle a, b\rangle: 0<|x-y| < \varepsilon\ \&\ (f(x) - f(y))/(x-y) = (f(a) - f(b))/(a-b)$.

Доказательство. Определим g: $R \to R$ следующим образом $g(x)=f(x) + (f(a)-f(b))\cdot(a-x)/(a-b)$ для всех $x \in R$. Тогда $g \in C(\langle a, b\rangle)$, $g(a)=g(b)$ и в силу 2.14 имеем $\forall \varepsilon>0\ \exists x, y \in \langle a, b\rangle: 0<|x-y|<\varepsilon\ \&\ g(x)=g(y)$. Таким образом, $(f(x)-f(y))/(x-y)=(f(a)-f(b))/(a-b)$.

2.16. Утверждение. *Пусть* $f \in \mathcal{M}$ *и пусть* $d, k \in R^+$. *Определим* g: $R_0^+ \to R_0^+$, $g(x) = kx$ *для* $x \in \langle 0, d)$, $g(x) = f(x)$ *для* $x \in \langle d, \infty)$. *Тогда для того, чтобы* $g \in \mathcal{M}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f(d) = kd\ \&\ \forall x, y \in \langle d, \infty): |f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x-y|$.

Доказательство. 1. Пусть $g \in \mathcal{M}$. Так как g является непрерывной в точке 0, то согласно 2.9 f является непрерывной на $\langle d, \infty)$. Тогда $f(d)=kd$. Предположим, что $\exists x, y \in \langle d, \infty): |f(x)-f(y)| > k \cdot |x-y|$. Ради определенности предположим $x<y$. Тогда в силу 2.15 $\exists u, v \in \langle x, y\rangle: 0 < |u-v| < d\ \&\ (f(u) - f(v))/(u-v) = (f(x) - f(y))/(x-y)$, откуда получим $|f(u) - f(v)| = |u-v| \cdot |f(x) - f(y)|/|x-y| > |u-v| \cdot k \cdot |x-y|/|x-y| = k \cdot |u-v|$. Положим $a=u$, $b=v$, $c=|u-v|$, тогда $|a-b| \leqq c \leqq a+b$, $|f(a) - f(b)| > k \cdot c$, т. е. $|g(a) - g(b)| > g(c)$, а это в противоречии с тем, что $g \in \mathcal{M}$. Таким образом, $\forall x, y \in \langle d, \infty): |f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x-y|$.

2. Пусть $f(d) = kd\ \&\ \forall x, y \in \langle d, \infty): |f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x-y|$. Очевидно, что $\forall a \in R_0^+: g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Пусть $a, b, c \in R_0^+$, $|a-b| \leqq c \leqq a+b$.

а. Если $a, b \in \langle 0, d)$, то $c \in \langle 0, 2d)$. Пусть $c \in \langle 0, d)$, тогда $g(a) = ka \leqq kb + kc = g(b) + g(c)$. Если $c \in \langle d, 2d)$, то $kd - f(c) = f(d) - f(c) \leqq |f(c) - f(d)| \leqq k \cdot |c-d| = k \cdot (c-d)$, откуда следует $-f(c) \leqq k \cdot (c-2d)$. Тогда $ka - f(c) \leqq k \cdot (a + c - 2d)$, из чего следует, что $g(a) = ka \leqq f(c) + k \cdot (a + c - 2d) \leqq k \cdot (a + (a+b) - 2d) + f(c) \leqq k \cdot (d + (d+b) - 2d) + f(c) = g(b) + g(c)$.

б. Если $a \in \langle 0, d)$, $b \in \langle d, \infty)$, то $c \in \langle 0, \infty)$. Если $c \in \langle 0, d)$, то $kd - f(b) = f(d) - f(b) \leqq |f(b) - f(d)| \leqq k \cdot |b-d| = k \cdot (b-d)$, откуда следует, что $-f(b) \leqq k \leqq (b-2d)$. Тогда $ka - f(b) \leqq k \cdot (a+b-2d)$, из чего следует $g(a) = ka \leqq f(b) + k \cdot (a + b - 2d) \leqq f(b) + k \cdot (a + (a+c) - 2d) \leqq f(b) + k \cdot (d + (d+c) - 2d) = f(b) + kc = g(b) + g(c)$. Пусть $c \in \langle d, \infty)$. Согласно 2.5 $\forall x \in R_0^+: d \leqq 2x \Rightarrow f(d) \leqq 2 \cdot f(x)$, значит, $\forall x \in R_0^+: x \geqq d/2 \Rightarrow f(x) \geqq f(d)/2 = kd/2$. Тогда $g(a) = ka < kd = kd/2 + kd/2 = f(b) + f(c) = g(b) + g(c)$.

в. Если $a \in \langle d, \infty)$, $b \in \langle 0, d)$ то $c \in \langle 0, \infty)$. Если $c \in \langle 0, d)$, то $f(a) - kd = f(a) - f(d) \leqq |f(a) - f(d)| \leqq k \cdot |a-d| = ka - kd$, откуда следует, что $f(a) \leqq ka$. Тогда $g(a) = f(a) \leqq ka \leqq kb + kc = g(b) + g(c)$. Если $c \in \langle d, \infty)$,

2.14. Lemma. *Let $f \in C(\langle a,b\rangle)$, where $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Let $f(a) = f(b)$. Then $\forall \varepsilon > 0\ \exists u,v \in \langle a,b\rangle : 0 < |u-v| < \varepsilon\ \&\ f(u) = f(v)$.*

2.15. Proposition. *Let $f \in C(\langle a,b\rangle)$, where $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Then $\forall \varepsilon > 0\ \exists x,y \in \langle a,b\rangle : 0 < |x-y| < \varepsilon\ \&\ (f(x)-f(y))/(x-y) = (f(a)-f(b))/(a-b)$.*

Proof. Define $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as follows $g(x) = f(x) + ((f(a)-f(b)) \cdot (a-x)/(a-b)$ for each $x \in \mathbb{R}$. Then $g \in C(\langle a,b\rangle)$, $g(a) = g(b)$, thus by 2.14 we have $\forall \varepsilon > 0\ \exists x,y \in \langle a,b\rangle : 0 < |x-y| < \varepsilon\ \&\ g(x) = g(y)$. Hence $(f(x)-f(y))/(x-y) = (f(a)-f(b))/(a-b)$.

2.16. Proposition. *Let $f \in \mathscr{M}$. Let $d,k \in \mathbb{R}^+$. Define $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ as $g(x) = kx$ for $x \in \langle 0,d)$, $g(x) = f(x)$ for $x \in \langle d,\infty)$. Then $g \in \mathscr{M}$ iff $f(d) = kd\ \&\ \forall x,y \in \langle d,\infty) : |f(x)-f(y)| \leqq k \cdot |x-y|$.*

Proof. 1. Let $g \in \mathscr{M}$. Since g is continuous at 0, by 2.9 we obtain that f is continuous on $\langle d,\infty)$. Thus $f(d) = kd$. Suppose that $\exists x,y \in \langle d,\infty) : |f(x)-f(y)| > k \cdot |x-y|$. Let $x < y$. (The opposite case is similar.) Then by 2.15 $\exists u,v \in \langle x,y\rangle : 0 < |u-v| < d\ \&\ (f(u)-f(v))/(u-v) = (f(x)-f(y))/(x-y)$. Hence $|f(u)-f(v)| = |u-v| \cdot |f(x)-f(y)|/|x-y| > |u-v| \cdot k \cdot |x-y|/|x-y| = k \cdot |u-v|$. Put $a = u$, $b = v$, and $c = |u-v|$. Then $|a-b| \leqq c \leqq a+b$, and $|f(a)-f(b)| > k \cdot c$. Thus $|g(a)-g(b)| > g(c)$, which contradicts $g \in \mathscr{M}$. Therefore $\forall x,y \in \langle d,\infty) : |f(x)-f(y)| \leqq k \cdot |x-y|$.

2. Let $f(d) = k \cdot d\ \&\ \forall x,y \in \langle d,\infty) : |f(x)-f(y)| \leqq k \cdot |x-y|$. Evidently $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ : g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Let $a,b,c \in \mathbb{R}_0^+ : |a-b| \leqq c \leqq a+b$.

a. Suppose that $a,b \in \langle 0,d)$. Then $c \in \langle 0,2d)$. If $c \in \langle 0,d)$, then $g(a) = ka \leqq kb + kc = g(b) + g(c)$. If $c \in \langle d,2d)$, then $kd - f(c) = f(d) - f(c) \leqq |f(c) - f(d)| \leqq k \cdot |c-d| = k \cdot (c-d)$, which yields $-f(c) \leqq k \cdot (c-2d)$. Then $ka - f(c) \leqq k \cdot (a+c-2d)$. Hence $g(a) = ka \leqq f(c) + k \cdot (a+c-2d) \leqq k \cdot (a+(a+b)-2d) + f(c) \leqq k \cdot (d+(d+b)-2d) + f(c) = g(b) + g(c)$.

b. Suppose that $a \in \langle 0,d)$, $b \in \langle d,\infty)$. Then $c \in \langle 0,\infty)$. If $c \in \langle 0,d)$, then $kd - f(b) = f(d) - f(b) \leqq |f(b) - f(d)| \leqq k \cdot |b-d| = k \cdot (b-d)$, which yields $-f(b) \leqq k \cdot (b-2d)$. Then $ka - f(b) \leqq k \cdot (a+b-2d)$. Thus $g(a) = ka \leqq f(b) + k \cdot (a+b-2d) \leqq f(b) + k \cdot (a+(a+c)-2d) \leqq f(b) + k \cdot (d+(d+c)-2d) = f(b) + kc = g(b) + g(c)$. If $c \in \langle d,\infty)$, by 2.5 we obtain $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : d \leqq 2x \Rightarrow f(d) \leqq 2 \cdot f(x)$. Hence $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : x \geqq d/2 \Rightarrow f(x) \geqq f(d)/2 = kd/2$. Then $g(a) = ka < kd = kd/2 + kd/2 = f(b) + f(c) = g(b) + g(c)$.

c. Suppose that $a \in \langle d,\infty)$, $b \in \langle 0,d)$. Then $c \in \langle 0,\infty)$. If $c \in \langle 0,d)$, then $f(a) - kd = f(a) - f(d) \leqq |f(a) - f(d)| \leqq k \cdot |a-d| = ka - kd$, which yields $f(a) \leqq ka$. Then $g(a) = f(a) \leqq ka \leqq kb + kc = g(b) + g(c)$.

то $f(a) - f(c) \leqq |f(a) - f(c)| \leqq k \cdot |a-c| \leqq kb$. Следовательно, $g(a) = f(a) \leqq kb + f(c) = g(b) + g(c)$.

г. Если $a, b \in \langle d, \infty)$, то $c \in \langle 0, \infty)$. Если $c \in \langle 0, d)$, то $f(a) - f(b) \leqq |f(a) - f(b)| \leqq k \cdot |a-b| \leqq kc$, откуда следует, что $g(a) = f(a) \leqq f(b) + kc = g(b) + g(c)$. Пусть $c \in \langle d, \infty)$, тогда $g(a) = f(a) \leqq f(b) + f(c) = g(b) + g(c)$. Значит, $\forall a, b, c \in R_0^+$, $|a-b| \leqq c \leqq a + b \Rightarrow g(a) \leqq g(b) + g(c)$ и согласно 2.7 $g \in \mathcal{M}$.

2.17. Следствие. *Пусть $f \in \mathcal{M}$. Пусть $k \in R^+$. Пусть g: $R_0^+ \to R_0^+$, $g(x) = kx$ для всех $x \in R_0^+$. Положим $\alpha = \inf \{x \in R^+ : f(x) = kx\}$, и $\beta = \alpha$, если $\alpha \in R^+$, $\beta = 0$, если $\alpha \notin R^+$. Пусть*

(1) $\forall x \in (0, \beta)$: $kx \leqq f(x)$,

(2) $\forall x, y \in \langle \beta, \infty)$: $|f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x-y|$.

Тогда $\min (f, g) \in \mathcal{M}$.

Доказательство. а. Пусть $\alpha \in R^+$. Сначала покажем, что $f(\alpha) = k\alpha$. Пусть $\varepsilon > 0$. Из определения α получим, что $\exists y \in R^+ : f(y) = ky$ & $\alpha \leqq y < \alpha + \varepsilon/(2k)$. Тогда $|f(y) - f(\alpha)| \leqq k \cdot |y - \alpha|$; следовательно, $0 \leqq f(\alpha) - f(y) + k \cdot |y-\alpha| \leqq 2k \cdot |y - \alpha| < \varepsilon$, т. е. $0 \leqq f(\alpha) - k\alpha < \varepsilon$. Тем самым мы показали, что для каждого $\varepsilon > 0$ имеет место $|f(\alpha) - k\alpha| < \varepsilon$, т. е. $f(\alpha) = k\alpha$. Пусть $x \in \langle \alpha, \infty)$. Тогда $f(x) \leqq f(\alpha) + |f(x) - f(\alpha)| \leqq f(\alpha) + k \cdot |x-\alpha| = k \cdot x = g(x)$. Значит, $\forall x \in \langle \alpha, \infty)$: $f(x) \leqq g(x)$. Это показывает, что функция $\min (f, g)$ удовлетворяет условиям утвержденна 2.16, в силу которого $\min (f, g) \in \mathcal{M}$.

б. Пусть $\alpha \notin R^+$. Тогда для каждого $x \in R^+$ справедливо $f(x) = |f(x) - f(0)| \leqq k \cdot |x - 0| = kx = g(x)$; значит $\min (f, g) = f \in \mathcal{M}$.

2.18. Пример. Пусть f: $R_0^+ \to R_0^+$, $f(x) = 2x$ для $x \in \langle 0, 1)$, $f(x) = 1 + 1/x$ для $x \in \langle 1, \infty)$. Тогда $f \in \mathcal{M}$, является непрерывной и не удовлетворяет условиям 1.1. 1.3.

2.19. Пример. Пусть f: $R_0^+ \to R_0^+$, $f(0) = 0$, $f(x) = |x-1| + 1$ для $x > 0$. Тогда $f \in \mathcal{M}$, является разрывной и не удовлетворяет условиями 1.1, 1.3.

2.20. Пример. Пусть f: $R_0^+ \to R_0^+$, $g(x) = x$ для $x \in \langle 0, 2 \rangle$, $g(x) = 1$ для $x \in (2, \infty)$. Тогда g удовлетворяет условиям 2.5. i $g \in \mathcal{M}$.

2.21. Утверждение. *Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность функций из $\mathcal{M}$, которая сходится. Пусть*

$$\forall \in R^+ : (\lim_{i\to\infty} f_i)(a) \neq 0. \text{ Тогда } \lim_{i\to\infty} f_i \in \mathcal{M}.$$

;

If $c \in \langle d, \infty)$, then $f(a) - f(c) \leqq |f(a) - f(c)| \leqq k \cdot |a - c| \leqq kb$. Thus $g(a) = f(a) \leqq kb + f(c) = g(b) + g(c)$.

d. Suppose that $a, b \in \langle d, \infty)$. Then $c \in \langle 0, \infty)$. If $c \in \langle 0, d)$, then $f(a) - f(b) \leqq |f(a) - f(b)| \leqq k \cdot |a - b| \leqq kc$, which yields $g(a) = f(a) \leqq f(b) + kc = g(b) + g(c)$. If $c \in \langle d, \infty)$, then $g(a) = f(a) \leqq f(b) + f(c) = g(b) + g(c)$. Thus $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : |a - b| \leqq c \leqq a + b \Rightarrow g(a) \leqq g(b) + g(c)$. By 2.7 we obtain $g \in \mathscr{M}$.

2.17. Corollary. *Let $f \in \mathscr{M}$. Let $k \in \mathbb{R}^+$. Let $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $g(x) = kx$ for each $x \in \mathbb{R}_0^+$. Put $\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : f(x) = kx\}$, $\beta = \alpha$, if $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\beta = 0$, if $\alpha \notin \mathbb{R}^+$. Suppose that*

(1) $\forall x \in (0, \beta) : kx \leqq f(x)$,

(2) $\forall x, y \in \langle \beta, \infty) : |f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x - y|$.

Then $\min(f, g) \in \mathscr{M}$.

Proof. a. Suppose that $\alpha \in \mathbb{R}^+$. First we show that $f(\alpha) = k\alpha$. Let $\varepsilon > 0$. By definition of α we obtain $\exists y \in \mathbb{R}^+ : f(y) = ky \;\&\; \alpha \leqq y < \alpha + \varepsilon/(2k)$. Thus $|f(y) - f(\alpha)| \leqq k \cdot |y - \alpha|$. Hence $0 \leqq f(\alpha) - f(y) + k \cdot |y - \alpha| \leqq 2k \cdot |y - \alpha| < \varepsilon$, i.e. $0 \leqq f(\alpha) - k\alpha < \varepsilon$. This shows that for each $\varepsilon > 0$ we have $|f(\alpha) - k\alpha| < \varepsilon$, i.e. $f(\alpha) = k\alpha$. Let $x \in \langle \alpha, \infty)$. Then $f(x) \leqq f(\alpha) + |f(x) - f(\alpha)| \leqq f(\alpha) + k \cdot |x - \alpha| = k \cdot x = g(x)$. Hence $\forall x \in \langle \alpha, \infty) : f(x) \leqq g(x)$. Since $\min(f, g)$ satisfies the assumptions of 2.16, we have $\min(f, g) \in \mathscr{M}$.

b. Suppose that $\alpha \notin \mathbb{R}^+$. Then for each $x \in \mathbb{R}^+$ we have $f(x) = |f(x) - f(0)| \leqq k \cdot |x - 0| = kx = g(x)$, which yields $\min(f, g) = f \in \mathscr{M}$.

2.18. Example. Let $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = 2x$, if $x \in \langle 0, 1)$, $f(x) = 1 + 1/x$, if $x \in \langle 1, \infty)$. Then $f \in \mathscr{M}$, f is continuous, but f does not satisfy the assumptions of 1.1, 1.3.

2.19. Example. Let $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f(0) = 0$, $f(x) = |x - 1| + 1$ for each $x > 0$. Then $f \in \mathscr{M}$, f is discontinuous, but f does not satisfy the assumptions of 1.1, 1.3.

2.20. Example. Let $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x$, if $x \in \langle 0, 2 \rangle$, $f(x) = 1$, if $x \in (2, \infty)$. Then f satisfies the conditions of 2.5, but $f \notin \mathscr{M}$.

2.21. Proposition. *Let $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ be a convergent sequence of functions $f_i \in \mathscr{M}$. Suppose that*

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ : (\lim_{i \to \infty} f_i)(a) \neq 0. \text{ Then } \lim_{i \to \infty} f_i \in \mathscr{M}.$$

Доказательство. Пусть $a, b, c \in R_0^+$, $|a-b| \leqq c \leqq a+b$. Поскольку $\forall i \in N$: $f_i \in \mathcal{M}$, то $\forall i \in N$: $f_i(a) \leqq f_i(b) + f_i(c)$, и значит

$$(\lim_{i\to\infty} f_i)(a) = \lim_{i\to\infty}(f_i(a)) \leqq \lim_{i\to\infty}(f_i(b)+f_i(c)) =$$
$$= (\lim_{i\to\infty} f_i)(b) + (\lim_{i\to\infty} f_i)(c).$$

согласно 2.7. $\lim_{i\to\infty} f_i \in \mathcal{M}$.

2.22. Следствие. *Пусть*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i$$

ряд функций из $\mathcal{M}$, сходящийся к функции f. Тогда $f \in \mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i.$$

Согласно 2.11. $\forall i \in N$: $s_i \in \mathcal{M}$. Пусть $a \in R^+$, тогда $\forall i \in N$: $f_i(a) > 0$, откуда следует, что

$$\forall n \in N: s_n(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a) \geqq f_1(a),$$

т. е.

$$f(a) = \lim_{i\to\infty}(s_n(a)) \geqq f_1(a) > 0.$$

Следовательно, согласно 2.21. $f \in \mathcal{M}$.

2.23. Утверждение. *Пусть $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Пусть $\forall x \in R^+$ множество $\mathcal{S}_x = \{f(x): f \in \mathcal{S}\}$ является ограниченным. Определим функцию $\sup \mathcal{S}: R_0^+ \to R_0^+$, $(\sup \mathcal{S})(x) = \sup \mathcal{S}_x$. Тогда $\sup \mathcal{S} \in \mathcal{M}$.*

Доказательство. Поскольку $\forall x \in R^+: \mathcal{S}_x \subset R^+$, то $\sup \mathcal{S}_x > 0$, т. е. $\forall x \in R^+: (\sup \mathcal{S})(x) = 0$. Отсюда следует, что $\forall a \in R_0^+: (\sup \mathcal{S})(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Пусть $a, b, c \in R_0^+$, $|a-b| \leqq c \leqq a+b$, тогда $\forall f \in \mathcal{S}: f(a) \leqq f(b) + f(c) \leqq (\sup \mathcal{S})(b) + (\sup \mathcal{S})(c)$, т. е. $(\sup \mathcal{S})(a) \leqq (\sup \mathcal{S})(b) + (\sup \mathcal{S})(c)$. Согласно 2.7 $\sup \mathcal{S} \in \mathcal{M}$.

3. Отношение метрик ϱ, $f \circ \varrho$

3.1. Определение. *Пусть (P, ϱ), (Q, σ) являются метрическими пространствами. Пусть $a \in P$.*

;

Proof. Let $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : |a-b| \leqq c \leqq a+b$. Since $\forall i \in \mathbb{N} : f_i \in \mathscr{M}$, we have $\forall i \in \mathbb{N} : f_i(a) \leqq f_i(b) + f_i(c)$, which yields

$$\begin{aligned}(\lim_{i\to\infty} f_i)(a) &= \lim_{i\to\infty} (f_i(a)) \leqq \lim_{i\to\infty} (f_i(b) + f_i(c)) \\ &= (\lim_{i\to\infty} f_i)(b) + (\lim_{i\to\infty} f_i)(c).\end{aligned}$$

By 2.7 we have $\lim\limits_{i\to\infty} f_i \in \mathscr{M}$.

2.22. Corollary. *Let*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i$$

be a series of functions $f_i \in \mathscr{M}$ which converges to a function f. Then $f \in \mathscr{M}$.

Proof. Let $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of partial sums of the series

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i.$$

By 2.11 we have $\forall i \in \mathbb{N} : s_i \in \mathscr{M}$. Let $a \in \mathbb{R}^+$. Then $\forall i \in \mathbb{N} : f_i(a) > 0$, which yields

$$\forall n \in \mathbb{N} : s_n(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a) \geqq f_1(a),$$

i.e.

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} (s_n(a)) \geqq f_1(a) > 0.$$

Therefore by 2.21 we have $f \in \mathscr{M}$.

2.23 Proposition. *Let $\mathscr{L} \subset \mathscr{M}$, $\mathscr{L} \neq \emptyset$. Let $\forall x \in \mathbb{R}^+$ the set $\mathscr{L}_x = \{f(x) : f \in \mathscr{L}\}$ be bounded. Define the function $\sup \mathscr{L} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ as $(\sup \mathscr{L})(x) = \sup \mathscr{L}_x$. Then $\sup \mathscr{L} \in \mathscr{M}$.*

Proof. Since $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \mathscr{L}_x \subset \mathbb{R}^+$, we have $\sup \mathscr{L}_x > 0$, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^+ : (\sup \mathscr{L})(x) \neq 0$. Thus $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ : (\sup \mathscr{L})(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Let $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+ : |a-b| \leqq c \leqq a+b$. Then $\forall f \in \mathscr{L} : f(a) \leqq f(b) + f(c) \leqq (\sup \mathscr{L})(b) + (\sup \mathscr{L})(c)$. Thus $(\sup \mathscr{L})(a) \leqq (\sup \mathscr{L})(b) + (\sup \mathscr{L})(c)$. By 2.7 we obtain $\sup \mathscr{L} \in \mathscr{M}$.

3. Interrelations between ϱ and $f \circ \varrho$

3.1 Definition. Let (P, ϱ), (Q, σ) be metric spaces. Let $a \in P$.

Отображение $f: P \to Q$ называется $\varrho - \sigma$-непрерывным в точке a тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P,\ \varrho(x, a) < \delta: \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Отображение $f: P \to Q$ называется $\varrho - \sigma$-непрерывным тогда и только тогда, когда $\varrho - \sigma$-непрерывно в каждой точке.

Отображение $f: P \to Q$ называется равномерно $\varrho - \sigma$-непрерывным тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in P,\ \varrho(x, y) < \delta: \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Пусть ϱ, σ — метрики на множестве M. Метрики ϱ, σ называются топологически эквивалентными (равномерно эквивалентными) тогда и только тогда, когда тождественное отображение $\mathrm{id}(M): M \to M$ *является ϱ—σ-непрерывным и $\sigma - \varrho$-непрерывным (равномерно $\varrho - \sigma$-непрерывным и равномерно $c - p$-непрерывным).* ([1], *стр.* 232).

3.2. Лемма. *Пусть (M, ϱ) является метрическим пространством. Пусть $f \in \mathcal{M}$ является непрерывной функцией. Тогда метрики ϱ, $f \circ \varrho$ равномерно эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Из того, что функция f непрерывна в точке 0, следует $\exists \delta > 0\ \forall x \in \langle 0, \delta): f(x) < \varepsilon$. Пусть $x, y \in M$, $\varrho(x, y) < \delta$. Тогда $f(\varrho(x, y)) < \varepsilon$. Значит, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in M, \varrho(x, y) < \delta: (f \circ \varrho)(x, y) < \varepsilon$, т. е. отображение $\mathrm{id}\,(M): M \to M$ является равномерно $\varrho - f \circ \varrho$-непрерывным. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно 2.5 $\forall x \in R_0^+: 2\varepsilon \leqq 2x \Rightarrow f(2\varepsilon) \leqq 2 \cdot f(x)$. Положим $\delta = f(2\varepsilon)/2 > 0$, тогда $\forall x \in R_0^+: f(x) < \delta \Rightarrow x < \varepsilon$. Пусть $x, y \in M$, $(f \circ \varrho)(x, y) < \delta$, тогда $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Значит, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in M, (f \circ \varrho)(x, y) < \delta: \varrho(x, y) < \varepsilon$, т. е. отображение $\mathrm{id}\,(M): M \to M$ является равномерно $f \circ \varrho - \varrho$-непрерывным. Поэтому метрики $\varrho, f \circ \varrho$ равномерно эквивалентны.

3.3. Теорема. *Пусть (M, ϱ) — метрическое пространство. Пусть существует предельная точка a множества M относительно метрики ϱ. Пусть $f \in \mathcal{M}$. Тогда метрики ϱ, $f \circ \varrho$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда f непрерывна.*

Доказательство. Пусть метрики ϱ, $f \circ \varrho$ топологически эквивалентны. Пусть $\varepsilon > 0$. Отображение $\mathrm{id}\,(M): M \to M$ $\varrho - f \circ \varrho$-непрерывно, поэтому $\exists \delta > 0\ \forall x \in M$, $\varrho(x, a) < \delta$: $(f \circ \varrho)\ (x, a) < \varepsilon$. Так как $\forall \varepsilon' > 0\ \exists x \in M$, $x \neq a$: $\varrho(x, a) < \varepsilon'$, то положив $\varepsilon' = \delta$, получим $\exists x \in M, x \neq a: \varrho(x, a) < \delta$. Отсюда следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists y \in R^+: f(y) < \varepsilon$, то-есть согласно 2.9. функция f непрерывна. Если f непрерывна, то в силу 3.2 метрики $\varrho, f \circ \varrho$ топологически эквивалентны.

3.4. Теорема. *Пусть (M, ϱ) — метрическое пространство. Пусть не сущес-*

We say that a function $f : P \to Q$ is ϱ-σ-continuous at the point a iff

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in P, \ \varrho(x, a) < \delta : \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

We say that $f : P \to Q$ is ϱ-σ-continuous iff it is ϱ-σ-continuous at each point.

We say that $f : P \to Q$ is uniformly ϱ-σ-continuous iff

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in P, \ \varrho(x, y) < \delta : \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Let ϱ, σ be metrics on the set M. We say that the metrics ϱ, σ are topologically equivalent (uniformly equivalent) iff the identity function $\mathrm{id}(M) : M \to M$ is both ϱ-σ-continuous and σ-ϱ-continuous (uniformly ϱ-σ-continuous and uniformly σ-ϱ-continuous). ([1] p. 232.)

3.2 Lemma. *Let (M, ϱ) be a metric space. Let $f \in \mathscr{M}$ be continuous. Then the metrics ϱ, $f \circ \varrho$ are uniformly equivalent.*

Proof. Let $\varepsilon > 0$. From the continuity of f at 0 we obtain that $\exists \delta > 0$ $\forall x \in \langle 0, \delta) : f(x) < \varepsilon$. Let $x, y \in M$, $\varrho(x, y) < \delta$. Then $f(\varrho(x, y)) < \varepsilon$. Thus $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in M, \varrho(x, y) < \delta : (f \circ \varrho)(x, y) < \varepsilon$, i.e. the function $\mathrm{id}(M)$ is uniformly ϱ-$(f \circ \varrho)$-continuous. Let $\varepsilon > 0$. By 2.5 we have $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : 2\varepsilon \leqq 2x \Rightarrow f(2\varepsilon) \leqq 2 \cdot f(x)$. Put $\delta = f(2\varepsilon)/2 > 0$. Then $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : f(x) < \delta \Rightarrow x < \varepsilon$. Let $x, y \in M$, $(f \circ \varrho)(x, y) < \delta$. Then $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Thus $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in M, (f \circ \varrho)(x, y) < \delta : \varrho(x, y) < \varepsilon$, i.e. the function $\mathrm{id}(M)$ is uniformly $(f \circ \varrho)$-ϱ-continuous.

3.3. Theorem. *Let (M, ϱ) be a metric space. Suppose that there is an accumulation point a of the set M with respect to the metric ϱ. Let $f \in \mathscr{M}$. Then the metrics ϱ, $f \circ \varrho$ are topologically equivalent iff f is continuous.*

Proof. Suppose that the metrics ϱ, $f \circ \varrho$ are topologically equivalent. Let $\varepsilon > 0$. Since the function $\mathrm{id}(M)$ is ϱ-$(f \circ \varrho)$-continuous, we have $\exists \delta > 0$ $\forall x \in M, \ \varrho(x, a) < \delta : (f \circ \varrho)(x, a) < \varepsilon$. Since $\forall \varepsilon' > 0 \ \exists x \in M, x \neq a : \varrho(x, a) < \varepsilon'$, by putting $\varepsilon' = \delta$ we obtain $\exists x \in M, x \neq a : \varrho(x, a) < \delta$. Hence $\forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in \mathbb{R}^+ : f(y) < \varepsilon$, i.e. by 2.9 the function f is continuous. If f is continuous, by 3.2 we obtain that the metrics ϱ, $f \circ \varrho$ are topologically equivalent.

3.4. Theorem. *Let (M, ϱ) be a metric space. Suppose that there is no* *твует предельная точка множества M относительно метрики ϱ. Пусть $f \in \mathcal{M}$. Тогда метрики $\varrho, f\circ\varrho$ топологически эквивалентны.*

Доказательство. Пусть f разрывна. Согласно 2.10 $\exists \xi \in R^+ \ \forall y \in R^+$: $f(y) \geqq \xi$. Пусть $x \in M$, $\varepsilon > 0$. Из условий теоремы следует, что $\exists \delta > 0 \ \forall z \in M$, $z \neq x$: $\varrho(x, z) \geqq \delta$. Это означает, что $\forall z \in M$, $\varrho(x, z) < \delta$: $x = z$, т. е. что $f(\varrho(x, z)) = 0 < \varepsilon$. Таким образом, $\forall x \in M \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in M$, $\varrho(x, y) < \delta$: $(f\circ\varrho)(x, y) < \varepsilon$, т. е. отображение id (M): $M \to M$ $\varrho - f\circ\varrho$-непрерывно.

Пусть $x \in M$, $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta < \xi$. Тогда $\forall y \in M$, $f(\varrho(x, y)) < \delta$: $\varrho(x, y) = 0 < \varepsilon$. Следовательно $\forall x \in M \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in M$, $(f\circ\varrho)(x, y) < \delta$: $\varrho(x, y) < \varepsilon$, т. е. отображение id (M): $M \to M$ $f\circ\varrho - \varrho$-непрерывно, и поэтому метрики $\varrho, f\circ\varrho$ топологически эквивалентны. Если f непрерывна, то согласно 3.2 $\varrho, f\circ\varrho$ топологически эквивалентны.

3.5. Теорема. *Пусть (M, ϱ) — метрическое пространство. Пусть $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x, y \in M$, $x \neq y$: $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Пусть $f \in \mathcal{M}$. Тогда метрики $\varrho, f\circ\varrho$ равномерно эквивалентны тогда и только тогда, когда f непрерывна.*

Доказательство. Пусть метрики ϱ, $f\circ\varrho$ равномерно эквивалентны. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \delta > 0 \ \forall x, y \in M$, $\varrho(x, y) < \delta$: $(f\circ\varrho)(x, y) < \varepsilon$. Поскольку $\exists x, y \in M$, $x \neq y$: $\varrho(x, y) < \delta$, то $f(\varrho(x, y)) < \varepsilon$. Значит, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in R^+$: $f(y) < \varepsilon$, т. е. согласно 2.9. f непрерывна.

Если f непрерывна, то в силу 3.2 ϱ, $f\circ\varrho$ равномерно эквивалентны.

3.6. Теорема. *Пусть (M, ϱ) — метрическое пространство. Пусть $\exists a > 0$ $\forall x, y \in M$, $x \neq y$: $\varrho(x, y) \geqq a$. Пусть $f \in \mathcal{M}$. Тогда метрики $\varrho, f\circ\varrho$ равномерно эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{M}$ разрывна. Тогда согласно 2.10 $\exists \xi \in R^+ \ \forall x \in R^+$: $f(x) \geqq \xi$. Пусть $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = a$. Тогда $\forall x, y \in M$: $\varrho(x, y) < \delta \Rightarrow x = y$, т. е. $f(\varrho(x, y)) = 0 < \varepsilon$. Поскольку $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in M$, $\varrho(x, y) < \delta$: $(f\circ\varrho)(x, y) < \varepsilon$, то отображение id (M) равномерно $\varrho - f\circ\varrho$-непрерывно. Пусть $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \xi/2$. Тогда $\forall x, y \in M$: $f(\varrho(x, y)) < \delta \Rightarrow \varrho(x, y) = 0 < \varepsilon$. Так как $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in M$, $(f\circ\varrho)(x, y) < \delta$: $\varrho(x, y) < \varepsilon$, то отображение id (M): $M \to M$ равномерно $f\circ\varrho - \varrho$-непрерывно. Поэтому метрики $\varrho, f\circ\varrho$ равномерно эквивалентны. Если f непрерывна, то согласно 3.2 $\varrho, f\circ\varrho$ равномерно эквивалентны.

3.7. Пример. Пусть $M = \{1/n : n \in N\}$, $\varrho(x, y) = |x - y| \ \forall x, y \in M$. Пусть $f \in \mathcal{M}$ разрывна. Согласно 3.4 $\varrho, f\circ\varrho$ топологически эквивалентны и согласно 3.5. не являются равномерно эквивалентными.

;

accumulation point of the set M with respect to the metric ϱ. Let $f \in \mathscr{M}$. Then the metrics ϱ, $f \circ \varrho$ are topologically equivalent.

Proof. Suppose that f is discontinuous. By 2.10 we have $\exists \xi \in \mathbb{R}^+$ $\forall y \in \mathbb{R}^+ : f(y) \geqq \xi$. Let $x \in M$, $\varepsilon > 0$. From the assumptions we obtain that $\exists \delta > 0\, \forall z \in M, z \neq x : \varrho(x,z) \geqq \delta$. Then $\forall z \in M, \varrho(x,z) < \delta : x = z$, which yields $f(\varrho(x,z)) = 0 < \varepsilon$. Thus $\forall x \in M$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall y \in M, \varrho(x,y) < \delta : (f \circ \varrho)(x,y) < \varepsilon$, i.e. the function $\mathrm{id}(M)$ is ϱ-$(f \circ \varrho)$-continuous.

Let $x \in M$, $\varepsilon > 0$. Let $\delta < \xi$. Then $\forall y \in M, f(\varrho(x,y)) < \delta : \varrho(x,y) = 0 < \varepsilon$. Thus $\forall x \in M$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall y \in M, (f \circ \varrho)(x,y) < \delta : \varrho(x,y) < \varepsilon$, i.e. the function $\mathrm{id}(M)$ is $(f \circ \varrho)$-ϱ-continuous. Hence ϱ, $f \circ \varrho$ are topologically equivalent. If f is continuous, by 3.2 the metrics ϱ, $f \circ \varrho$ are topologically equivalent.

3.5. Theorem. *Let (M, ϱ) be a metric space. Let $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x, y \in M, x \neq y : \varrho(x,y) < \varepsilon$. Let $f \in \mathscr{M}$. Then ϱ, $f \circ \varrho$ are uniformly equivalent iff f is continuous.*

Proof. Suppose that ϱ, $f \circ \varrho$ are uniformly equivalent. Let $\varepsilon > 0$. Then $\exists \delta > 0$ $\forall x, y \in M, \varrho(x,y) < \delta : (f \circ \varrho)(x,y) < \varepsilon$. Since $\exists x, y \in M, x \neq y : \varrho(x,y) < \delta$, we have $f(\varrho(x,y)) < \varepsilon$. Hence $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y \in \mathbb{R}^+ : f(y) < \varepsilon$, i.e. by 2.9 f is continuous.

If f is continuous, by 3.2 the metrics ϱ, $f \circ \varrho$ are uniformly equivalent.

3.6. Theorem. *Let (M, ϱ) be a metric space. Suppose that $\exists a > 0$ $\forall x, y \in M$, $x \neq y : \varrho(x,y) \geqq a$. Let $f \in \mathscr{M}$. Then ϱ, $f \circ \varrho$ are uniformly equivalent.*

Proof. Suppose that $f \in \mathscr{M}$ is discontinuous. By 2.10 we have $\exists \xi \in \mathbb{R}^+$ $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \geqq \xi$. Let $\varepsilon > 0$. Put $\delta = a$. Then $\forall x, y \in M :$ $\varrho(x,y) < \delta \Rightarrow x = y$, which yields $f(\varrho(x,y)) = 0 < \varepsilon$. Since $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x, y \in M, \varrho(x,y) < \delta : (f \circ \varrho)(x,y) < \varepsilon$, the function $\mathrm{id}(M)$ is uniformly ϱ-$(f \circ \varrho)$-continuous. Let $\varepsilon > 0$. Put $\delta = \xi/2$. Then $\forall x, y \in M : f(\varrho(x,y)) < \delta \Rightarrow \varrho(x,y) = 0 < \varepsilon$. Since $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x, y \in M, (f \circ \varrho)(x,y) < \delta : \varrho(x,y) < \varepsilon$, we obtain that the function $\mathrm{id}(M)$ is uniformly $(f \circ \varrho)$-ϱ-continuous. Thus the metrics ϱ, $f \circ \varrho$ are uniformly equivalent. If f is continuous, by 3.2 we have that ϱ, $f \circ \varrho$ are uniformly equivalent.

3.7. Example. Let $M = \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$, $\varrho(x,y) = |x - y|$ for each $x, y \in M$. Let $f \in \mathscr{M}$ be discontinuous. By 3.4 ϱ, $f \circ \varrho$ are topologically equivalent, but by 3.5 they are not uniformly equivalent.

ЛИТЕРАТУРА

[1] JARNÍK, V.: Differenciální počet II. Academia, Praha 1976.
[2] KAPLANSKY, I.: Set theory and metric spaces. Allyn and Bacon, Boston 1972.
[3] КЕЛЛИ, И.Л.: Общая топология. Наука Москва 1968.
[4] NAGY, J.: Vybrané partie z moderní matematiky. SNTL, Praha 1976.

Поступило 3. 11. 1978

Ян Борсик
Беланскя штврть 550/Б
033 01 Липтовский Хрядок

Йозеф Добош
966 54 Тековскэ Немце 261

;

References

[1] Jarník, V., *Diferenciální počet II*, Academia, Praha, 1976.
[2] Kaplansky, I., *Set theory and metric spaces*, Allyn and Bacon, Boston, 1972.
[3] Kelley, J. L., *General Topology*, Russian translation, Nauka, Moscow, 1968.
[4] Nagy, J., *Vybrané partie z moderní matematiky*, SNTL, Praha, 1976.

Received November 3, 1978