OBZORY

3/2010 (39)

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY
A INFORMATIKY 3/2010 ročník 39
Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS
AND COMPUTER SCIENCES 3/2010 Volume 39
Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2010 (39)

Od lineárnej kombinácie k vlastným hodnotám

Jozef Doboš

Abstract: The aim of this paper is to present an alternative approach to teaching coupled linear differential equations, which is based on a natural way of introducing eigenvalues. We hope that our way can help to deeper understanding what the eigenvalues are.

Pri zrode tohto článku stála jedna príhoda. Na prednáške z funkcionálnej analýzy (vo štvrtom ročníku) sme sa mali oboznámiť so spektrom lineárneho operátora. Začali sme tým, že v rámci motivácie som zadal študentom jednoduchú úlohu. Mali pomocou vlastných čísel vyriešiť sústavu dvoch lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami (učili sa to v druhom ročníku). Študenti bez problémov vypočítali vlastné čísla matice sústavy. A tam bol koniec. Ani jeden zo študentov ich nedokázal použiť na vytvorenie všeobecného riešenia danej sústavy. Vtedy som si uvedomil, že tento poznatok má formálny charakter. Prezrel som niekoľko desiatok učebníc v snahe nájsť alternatívny prístup k tejto problematike. Bohužiaľ, nič také som nenašiel. Všetci autori okamžite začínajú formálnou definíciou vlastnej hodnoty. Začalo ma to hlbšie zaujímať. V tomto článku ponúkam svoj prístup. Ukážeme si, ako nás môže tak jednoduchý pojem, akým je lineárna kombinácia, celkom prirodzene priviesť k vlastným hodnotám matice sústavy.

Uvažujme homogénnu sústavu dvoch diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by, \\ \dot{y} &= cx + dy. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Sústava (1) má veľa praktických aplikácií, napr. elektrické obvody vo fyzike, modely v ekonómii atď. Ak $b = c = 0$, potom táto sústava pozostáva z dvoch navzájom nezávislých rovníc, pričom každá z nich má tvar

$$\dot{z} = \lambda z. \tag{2}$$

Pripomeňme si, že všeobecným riešením rovnice (2) je $z = Ce^{\lambda t}$, kde C je ľubovoľná konštanta.

Teraz predpokladajme, že platí $b \neq 0$ alebo $c \neq 0$. Budeme hľadať riešenie z rovnice (2), ktoré možno vyjadriť v tvare lineárnej kombinácie funkcií x a y, t. j.

$$z = c_1 x + c_2 y. \tag{3}$$

Po dosadení do (2) dostávame

$$\dot{x} + c_2 \dot{y} = c_1 \lambda x + c_2 \lambda y.$$

Potom podľa (1) máme

$$c_1(ax + by) + c_2(cx + dy) = c_1 \lambda x + c_2 \lambda y,$$

čo nás privádza k nasledujúcej sústave rovníc:

$$\begin{cases} ac_1 + cc_2 = \lambda c_1, \\ bc_1 + dc_2 = \lambda c_2. \end{cases} \tag{4}$$

Prevedieme všetko na ľavú stranu:

$$\begin{cases} (a-\lambda)c_1 + cc_2 = 0, \\ bc_1 + (d-\lambda)c_2 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

čo nám otvára prirodzenú cestu k zavedeniu pojmu vlastnej hodnoty matice danej sústavy diferenciálnych rovníc (1).

Sústava (5) má netriviálne riešenie práve vtedy, keď

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{6}$$

Korene tejto kvadratickej rovnice, čo sú hľadané vlastné hodnoty, môžeme teraz prirodzeným spôsobom použiť k nájdeniu všeobecného riešenia sústavy (1).

Túto metódu budem ilustrovať na príkladoch.

Príklad 1. Riešte

$$\dot{x} = 2x + y, \tag{7}$$
$$\dot{y} = 3x + 4y. \tag{8}$$

Vlastné hodnoty vypočítame z rovnice (6), ktorá má v tomto prípade tvar:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Jej korene sú $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

Najskôr dosadíme $\lambda = \lambda_1 = 1$ do sústavy (5), ktorá sa tým redukuje na jedinú rovnicu $c_1 + 3c_2 = 0$ majúcu nekonečne veľa riešení. Máme teda istú voľnosť pri výbere hodnôt c_1 a c_2. Položíme napr. $c_2 = 1$ a vypočítame $c_1 = -3$. Teraz tieto hodnoty, t. j. $\lambda = 1$, $c_1 = -3$ a $c_2 = 1$, dosadíme do (2) a do (3), čím dostávame:

$$\dot{z} = z, \tag{9}$$

$$z = -3x + y. \tag{10}$$

Všeobecným riešením rovnice (9) je $z = D_1 \mathrm{e}^t$. Po dosadení do (10) máme

$$-3x + y = D_1 \mathrm{e}^t. \tag{11}$$

Podobným spôsobom pre $\lambda = \lambda_2 = 5$ dostávame

$$x + y = D_2 \mathrm{e}^{5t}. \tag{12}$$

Riešením sústavy rovníc (11) a (12) nájdeme všeobecné riešenie danej sústavy diferenciálnych rovníc (7) a (8) v tvare:

$$x = -C_1 \mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}^{5t}, \qquad y = C_1 \mathrm{e}^t + 3C_2 \mathrm{e}^{5t}.$$

Príklad 2. Riešte

$$\dot{x} = x - 4y, \tag{13}$$

$$\dot{y} = x - 3y. \tag{14}$$

Vlastné hodnoty vypočítame z rovnice (6), ktorá má v tomto prípade tvar:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -4 & -3-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Jej korene sú $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.
Dosadíme $\lambda = -1$ do sústavy (5), ktorá sa tým redukuje na jedinú rovnicu $2c_1 + c_2 = 0$. Položíme napr. $c_1 = 1$ a vypočítame $c_2 = -2$. Potom z (2) a (3) dostávame $x - 2y = D_1 \mathrm{e}^{-t}$, odkiaľ

$$x = 2y + D_1 \mathrm{e}^{-t}. \tag{15}$$

Po dosadení z (15) do (14) dostávame diferenciálnu rovnicu

$$\dot{y} + y = D_1 \mathrm{e}^{-t}. \tag{16}$$

Všeobecným riešením rovnice (16) je

$$y = (D_1 t + D_2) \mathrm{e}^{-t}. \tag{17}$$

Stačí už len dosadiť zo (17) do (15).
Takto nájdeme všeobecné riešenie sústavy (13) a (14):

$$x = (2C_1t + 2C_2 + C_1)\mathrm{e}^{-t}, \qquad y = (C_1t + C_2)\mathrm{e}^{-t}.$$

Príklad 3. Riešte

$$\dot{x} = 2x - 5y, \tag{18}$$
$$\dot{y} = 5x - 6y. \tag{19}$$

Vlastné hodnoty vypočítame z rovnice (6), ktorá má v tomto prípade tvar:

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -5 & -6-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Jej korene sú $\lambda_1 = -2 + 3\mathrm{i}$, $\lambda_2 = -2 - 3\mathrm{i}$.
Dosadíme $\lambda = -2 + 3\mathrm{i}$ do sústavy (5), ktorá sa tým redukuje na jedinú rovnicu $5c_1 + (4 + 3\mathrm{i})c_2 = 0$. Položíme napr. $c_2 = 5$ a vypočítame $c_1 = -4 - 3\mathrm{i}$. Potom z (2) a (3) dostávame

$$(-4 - 3\mathrm{i})x + 5y = D_1\mathrm{e}^{(-2+3\mathrm{i})t}. \tag{20}$$

Pretože $D_1 = d_1 + d_2\mathrm{i}$, z (20) máme

$$\begin{aligned}
(-4 - 3\mathrm{i})x + 5y &= (d_1 + d_2\mathrm{i})e^{(-2+3\mathrm{i})t},\\
-4x - 3\mathrm{i}x + 5y &= (d_1 + d_2\mathrm{i})e^{-2t}(\cos 3t + \mathrm{i}\sin 3t),\\
-4x - 3\mathrm{i}x + 5y &= \mathrm{e}^{-2t}(d_1\cos 3t + d_2\mathrm{i}\cos 3t + d_1\mathrm{i}\sin 3t - d_2\sin 3t),
\end{aligned}$$

(Odvodenie Eulerovho vzorca elementárnym spôsobom možno nájsť v [2].) odkiaľ dostávame nasledujúcu sústavu rovníc:

$$\begin{aligned}
-4x + 5y &= \mathrm{e}^{-2t}(d_1\cos 3t - d_2\sin 3t),\\
-3x &= \mathrm{e}^{-2t}(d_1\sin 3t + d_2\cos 3t).
\end{aligned}$$

Potom všeobecným riešením sústavy (18) a (19) je

$$\begin{aligned}
x &= \mathrm{e}^{-2t}(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t),\\
y &= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2t}[(4C_1 - 3C_2)\cos 3t + (3C_1 + 4C_2)\sin 3t].
\end{aligned}$$

Literatúra

[1] Larsen, M. E., Jensen B. S., *Coupled Linear Differential Equations with Real Coefficients* Amer. Math. Monthly, **96** (1989), 727–731.

[2] OR Chi Ming, *On Euler's formula*, EduMath, **13** (2001), 75–76.

Adresa autora:
Ústav matematických vied, PF UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: pvrabel@ukf.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

Objednávky a predplatné vybavuje
Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: press@protonit.com)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
3/2010 ročník 39

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným prispením
Ministerstva školstva Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Beloslav Riečan, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Peter Vrábel, Aba Teleki
Technická a grafická úprava: Mária Benešová, Vladimír Kutnár
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

OBSAH

CONTENTS