OBZORY

3/2010 (39)

MATEMATIKY
FYZIKY a
INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2010 ročník 39

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 3/2010 Volume 39

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2010 (39)

Poznámka o Eulerovom rade

Jozef Doboš

Abstract: This paper is devoted to the series $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. The proof is based on approach of Bakker [1].

Skúste sa spýtať študentov: Na čo potrebujeme integrál? S veľkou pravdepodobnosťou odpovedia, že na výpočet plošného obsahu. Niektorí si spomenú ešte na ďalšie geometrické, resp. fyzikálne aplikácie. Pritom nie je ťažké obohatiť výuku tohto tematického celku aj o iné atraktívne aplikácie. Ukážeme si, ako možno týmto spôsobom nájsť súčet tzv. Eulerovho radu $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ (pozri napr. [4]). Táto úloha, známa pod názvom Bazilejský problém, fascinuje matematikov po stáročia. Po prvýkrát sa týmto radom zaoberal Pietro Mengoli v roku 1644, jeho súčet našiel Leonard Euler v roku 1735. Od tej doby sa objavilo množstvo rôznych riešení (pozri napr. [5]). Väčšina z nich však využíva matematické poznatky, ktoré nie sú náplňou prvého ročníka, resp. využívajú umelé obraty, ktoré síce môžeme obdivovať, ale ťažko presvedčíme bežného študenta, že ich má vymyslieť sám. V tomto článku sa pokúsime priblížiť čitateľovi riešenie Bazilejského problému, ktoré tieto nedostatky nemá. Inšpiráciou nám boli prednášky z Harvard University (pozri [1]). Záujemcom o problematiku nekonečných radov odporúčame knihu [3].

Začneme nasledujúcim integrálom, ktorý môžeme zadať študentom ako jednoduchý tréning na metódu per partes:

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos(kx)\,dx = \frac{2\pi(-1)^k}{k^2}.$$

Pomocou neho nájdeme súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/k^2$, ktorého čiastočné súčty sú

$$\begin{aligned} s_n &= -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n^2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2[\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx]\,dx \end{aligned}$$

Teraz potrebujeme vyjadriť súčet

$$c_n(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx$$

v uzavretom tvare. Aby sme ho mohli vyjadriť v tvare teleskopického súčtu[1], vynásobíme ho vhodným výrazom[2], konkrétne $2\sin\frac{x}{2}$. Teda

$$\begin{aligned}2c_n(x)\sin\frac{x}{2} &= 2\cos x\sin\frac{x}{2} + 2\cos 2x\sin\frac{x}{2} + 2\cos 3x\sin\frac{x}{2} + \cdots + 2\cos nx\sin\frac{x}{2}\\ &= \sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \sin\frac{7x}{2} - \sin\frac{5x}{2} + \cdots\\ &\quad + \sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{(2n-1)x}{2} = \sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2}.\end{aligned}$$

Pritom sme použili vzorec $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$. Tým sme ukázali, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$c_n(x) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

za predpokladu, že $x \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Teda čiastočné súčty radu $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/k^2$ môžeme zapísať v tvare:

$$\begin{aligned}s_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cdot \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx - \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]dx - \frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

Pritom v skutočnosti pracujeme s funkciou f, ktorá je definovaná na intervale $\langle 0,\pi\rangle$ predpisom $f(x) = x^2/\sin\frac{x}{2}$ pre $x \in (0,\pi\rangle$ a $f(x) = 0$ pre $x = 0$. Nie je ťažké overiť, že táto funkcia je spojitá na intervale $\langle 0,1\rangle$. K dokončeniu úlohy stačí overiť, že platí:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]dx = 0. \tag{1}$$

Potom súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/k^2$, čo je vlastne limita postupnosti jeho čiastočných súčtov, bude $s = \lim_{n\to\infty} s_n = -\pi^2/12$.

[1] Tento názov je bežný v zahraničných publikáciách, v slovenčine napr. v knihe [6].

[2] Ďalšie úlohy, v ktorých sa podobným spôsobom využíva „katalyzátor“, nájdete v knihe [8].

Limita (1) je vlastne špeciálny prípad Riemannovej-Lebesgueovej lemy, s ktorou sa študenti stretnú neskôr v harmonickej analýze. Nič nám však nebráni zaradiť tento poznatok do výuky už v prvom ročníku. Pritom je zaujímavé pozorovať, ako sa môže meniť jej dôkaz podľa toho, aké vlastnosti požadujeme of funkcie f. Ak predpokladáme, že funkcia f má spojitú deriváciu, stačí použiť metódu per partes. Potom pre $\lambda = n + \frac{1}{2}$ dostávame:

$$\int_0^\pi f(x)\sin(\lambda x)\,dx = \left[-f(x)\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\right]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x)\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\,dx,$$

odkiaľ

$$\left|\int_0^\pi f(x)\sin(\lambda x)\,dx\right| \le \frac{1}{\lambda}\left(|f(\pi)| + |f(0)| + \int_0^\pi |f'(x)|\,dx\right).$$

Zrejme pravá strana konverguje k nule pre $\lambda \to \infty$.

Už táto verzia Riemannovej-Lebesgueovej lemy nám stačí. Úloha overiť, že naša funkcia f má spojitú deriváciu na intervale $\langle 0, \pi \rangle$, je užitočné cvičenie pre študentov prvého ročníka.

Veľmi pekný dôkaz Riemannovej-Lebesgueovej lemy, ktorý využíva iba spojitosť funkcie f, možno nájsť v [2]. Dôkaz pre riemannovsky integrovateľnú funkciu f, ktorý sa takmer nelíši od dôkazu pre lebesguovsky integrovateľnú funkciu f, možno nájsť napr. v [7].

Vráťme sa k Eulerovmu radu $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$, ktorého čiastočné súčty sú

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Potom pre čiastočné súčty radu $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k^2$ platí

$$\begin{aligned}
s_{2n} &= -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \cdots - \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} \\
&= -\frac{1}{1^2} + \left(\frac{2}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) - \frac{1}{3^2} + \left(\frac{2}{4^2} - \frac{1}{4^2}\right) - \cdots - \frac{1}{(2n-1)^2} + \left(\frac{2}{(2n)^2} - \frac{1}{(2n)^2}\right) \\
&= \left(\frac{2}{2^2} + \frac{2}{4^2} + \cdots + \frac{2}{(2n)^2}\right) - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}S_n - S_{2n}.
\end{aligned}$$

Potom pre súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$, čo je vlastne limita postupnosti jeho čiastočných súčtov (t.j. pre $S = \lim_{n\to\infty} S_n$), z práve dokázanej rovnosti $s_{2n} = \frac{1}{2}S_n - S_{2n}$ dostávame (pre $n \to \infty$):

$$-\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{2}S - S,$$

odkiaľ pre súčet Eulerovho radu máme:

$$S = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ďalší atraktívny spôsob, ak nájsť súčet Eulerovho radu, využíva rovnosť

$$\frac{1}{n^2} = a_{n-1} - a_n, \quad \text{kde } a_n = \frac{2\int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n} x\,dx}{\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx}.$$

To nám umožňuje vyjadriť čiastočné súčty Eulerovho radu v tvare teleskopického súčtu. To je však už iný príbeh.

Literatúra

[1] Bakker, B.: *Lecture Notes*, `http://www.innaz.org/math25/1024.pdf`

[2] Berge, G.: *Lecture Notes*, `http://folk.uib.no/nmagb/Riemann-Lebesque.pdf`

[3] Bonar, D. D., Khoury, M. J.: *Real Infinite Series*, The Mathematical Association of America, 2006, ISBN 0-88385-745-6.

[4] Hriňák, M.: O jednom nekonečnom rade, MATMIX **13(3)** (2007/2008), 9–11.

[5] Kalman, D.: *Six Ways to Sum a Series*, The College Math. J., **24** (1993), 402–421.

[6] Larson, L. C.: *Metódy riešenia matematických problémov*, Alfa, Bratislava, 1990, ISBN 80-05-00627-6.

[7] Morrow, J.: *A proof of the Riemann-Lebesgue Lemma*, `http://www.math.washington.edu/~morrow/335_07/rl_lemma.pdf`

[8] Vrábel, P.: *Heuristika a metodológia matematiky*, FPV UKF v Nitre, 2005, ISBN 80-8050-840-2.

Adresa autora:
Ústav matematických vied, PF UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: pvrabel@ukf.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

Objednávky a predplatné vybavuje
Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: press@protonit.com)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
3/2010 ročník 39

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným prispením
Ministerstva školstva Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Beloslav Riečan, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Peter Vrábel, Aba Teleki
Technická a grafická úprava: Mária Benešová, Vladimír Kutnár
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

OBSAH

CONTENTS