

# OBSZORY

3/2010 (39)

*MATEMATIKY*  
*FYZIKY a*  
*INFORMATIKY*

# OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2010 ročník 39

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,  
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

## HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 3/2010 Volume 39

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and  
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

**Editors in Chief:** Beloslav Riečan (Mathematics and Computer Sciences)  
Daniel Klvanec (Physics)

### International Editorial Board:

András Ambrus (Hungary)	Ján Pišút (Slovak republic)
Giuliana Cavaioni (Italy)	Adam Plocki (Poland)
Gábor Galambos (Hungary)	Zdeněk Půlpán (Czech republic)
Hans Jordens (Netherlands)	Ladislav Emanuel Roth (USA)
László Nána (Hungary)	Ivo Volf (Czech republic)

**Executive Editors:** Peter Vrábel (Mathematics and Computer Sciences)  
Aba Teleki (Physics)

### Editorial Board:

#### Mathematics and Computer Sciences:

Vojtech Bálint	Jozef Kuzma	Milan Matejdes
Jozef Doboš	Ladislav Kvasz	Dušan Šveda
Ivan Kalaš	Peter Maličský	Peter Vrábel

#### Physics:

Ivan Červeň	Árpád Kecskés	Stanislav Holec	Endre Szabó
Václav Havel	Václav Koubek	Vladimír Šebeň	Eva Tomanová
Anna Jankovychová	Dalibor Krupa	Juraj Šebesta	Ivo Volf

### Reviewers:

#### Mathematics and Computer Sciences:

Jozef Doboš	Mária Kmeťová	Beloslav Riečan	Marián Trenkler
Blahoslav Harman	Daniel Palumbíny	Štefan Solčan	Peter Vrábel

#### Physics:

Árpád Kecskés	Daniel Klvanec	Ladislav Morvay	Juraj Šebesta
Ján Klíma	Miroslav Kolesík	Mária Rakovská	Aba Teleki

---

## Poznámka o Eulerovom rade

**Jozef Doboš**

**Abstract:** This paper is devoted to the series  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ . The proof is based on approach of Bakker [1].

Skúste sa spýtať študentov: Na čo potrebujeme integrál? S veľkou pravdepodobnosťou odpovedia, že na výpočet plošného obsahu. Niektorí si spomenú ešte na ďalšie geometrické, resp. fyzikálne aplikácie. Pritom nie je ťažké obohatiť výuku tohto tematického celku aj o iné atraktívne aplikácie. Ukážeme si, ako možno týmto spôsobom nájsť súčet tzv. Eulerovho radu  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$  (pozri napr. [4]). Táto úloha, známa pod názvom Bazilejský problém, fascinuje matematikov po stáročia. Po prvýkrát sa týmto radom zaoberal Pietro Mengoli v roku 1644, jeho súčet našiel Leonard Euler v roku 1735. Od tej doby sa objavilo množstvo rôznych riešení (pozri napr. [5]). Väčšina z nich však využíva matematické poznatky, ktoré nie sú náplňou prvého ročníka, resp. využívajú umelé obraty, ktoré síce môžeme obdivovať, ale ťažko presvedčíme bežného študenta, že ich má vymyslieť sám. V tomto článku sa pokúsime priblížiť čitateľovi riešenie Bazilejského problému, ktoré tieto nedostatky nemá. Inšpiráciou nám boli prednášky z Harvard University (pozri [1]). Záujemcom o problematiku nekonečných radov odporúčame knihu [3].

Začneme nasledujúcim integrálom, ktorý môžeme zadať študentom ako jednoduchý tréning na metódu per partes:

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{2\pi(-1)^k}{k^2}.$$

Pomocou neho nájdeme súčet radu  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k^2$ , ktorého čiastočné súčty sú

$$\begin{aligned} s_n &= -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2 [\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx] dx \end{aligned}$$

Teraz potrebujeme vyjadriť súčet

$$c_n(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx$$

v uzavretom tvare. Aby sme ho mohli vyjadriť v tvare teleskopického súčtu<sup>1</sup>, vynásobíme ho vhodným výrazom<sup>2</sup>, konkrétne  $2 \sin \frac{x}{2}$ . Teda

$$\begin{aligned} 2c_n(x) \sin \frac{x}{2} &= 2 \cos x \sin \frac{x}{2} + 2 \cos 2x \sin \frac{x}{2} + 2 \cos 3x \sin \frac{x}{2} + \cdots + 2 \cos nx \sin \frac{x}{2} \\ &= \sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{7x}{2} - \sin \frac{5x}{2} + \cdots \\ &\quad + \sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{(2n-1)x}{2} = \sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Pritom sme použili vzorec  $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$ . Tým sme ukázali, že pre každé prirodzené číslo  $n$  platí:

$$c_n(x) = \frac{\sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right]}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

za predpokladu, že  $x \neq 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Teda čiastočné súčty radu  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k / k^2$  môžeme zapísať v tvare:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cdot \frac{\sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right]}{2 \sin \frac{x}{2}} dx - \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] dx - \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

Pritom v skutočnosti pracujeme s funkciou  $f$ , ktorá je definovaná na intervale  $\langle 0, \pi \rangle$  predpisom  $f(x) = x^2 / \sin \frac{x}{2}$  pre  $x \in (0, \pi)$  a  $f(x) = 0$  pre  $x = 0$ . Nie je ťažké overiť, že táto funkcia je spojitá na intervale  $\langle 0, 1 \rangle$ . K dokončeniu úlohy stačí overiť, že platí:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] dx = 0.$$

Potom súčet radu  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k / k^2$ , čo je vlastne limita postupnosti jeho čiastočných súčtov, bude  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\pi^2 / 12$ .

<sup>1</sup>Tento názov je bežný v zahraničných publikáciách, v slovenčine napr. v knihe [6].

<sup>2</sup>Ďalšie úlohy, v ktorých sa podobným spôsobom využíva „katalyzátor“, nájdete v knihe [8].

Limita (1) je vlastne špeciálny prípad Riemannovej-Lebesgueovej lemy, s ktorou sa študenti stretnú neskôr v harmonickej analýze. Nič nám však nebráni zaradiť tento poznatok do výuky už v prvom ročníku. Pritom je zaujímavé pozorovať, ako sa môže meniť jej dôkaz podľa toho, aké vlastnosti požadujeme of funkcie  $f$ . Ak predpokladáme, že funkcia  $f$  má spojitú deriváciu, stačí použiť metódu per partes. Potom pre  $\lambda = n + \frac{1}{2}$  dostávame:

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin(\lambda x) dx = \left[ -f(x) \frac{\cos(\lambda x)}{\lambda} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x) \frac{\cos(\lambda x)}{\lambda} dx,$$

odkiaľ

$$\left| \int_0^{\pi} f(x) \sin(\lambda x) dx \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left( |f(\pi)| + |f(0)| + \int_0^{\pi} |f'(x)| dx \right).$$

Zrejme pravá strana konverguje k nule pre  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Už táto verzia Riemannovej-Lebesgueovej lemy nám stačí. Úloha overiť, že naša funkcia  $f$  má spojitú deriváciu na intervale  $(0, \pi)$ , je užitočné cvičenie pre študentov prvého ročníka.

Veľmi pekný dôkaz Riemannovej-Lebesgueovej lemy, ktorý využíva iba spojitost funkcie  $f$ , možno nájsť v [2]. Dôkaz pre riemannovsky integrovateľnú funkciu  $f$ , ktorý sa takmer nelíši od dôkazu pre lebesguovsky integrovateľnú funkciu  $f$ , možno nájsť napr. v [7].

Vráťme sa k Eulerovmu radu  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ , ktorého čiastočné súčty sú

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

Potom pre čiastočné súčty radu  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k^2$  platí

$$\begin{aligned} s_{2n} &= -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots - \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} \\ &= -\frac{1}{1^2} + \left( \frac{2}{2^2} - \frac{1}{2^2} \right) - \frac{1}{3^2} + \left( \frac{2}{4^2} - \frac{1}{4^2} \right) - \dots - \frac{1}{(2n-1)^2} + \left( \frac{2}{(2n)^2} - \frac{1}{(2n)^2} \right) \\ &= \left( \frac{2}{2^2} + \frac{2}{4^2} + \dots + \frac{2}{(2n)^2} \right) - \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} S_n - S_{2n}. \end{aligned}$$

Potom pre súčet radu  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ , čo je vlastne limita postupnosti jeho čiastočných súčtov (t.j. pre  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ), z práve dokázanej rovnosti  $s_{2n} = \frac{1}{2} S_n - S_{2n}$  dostávame

(pre  $n \rightarrow \infty$ ):

$$-\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{2}S - S,$$

odkiaľ pre súčet Eulerovho radu máme:

$$S = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ďalší atraktívny spôsob, ak nájsť súčet Eulerovho radu, využíva rovnosť

$$\frac{1}{n^2} = a_{n-1} - a_n, \quad \text{kde } a_n = \frac{\int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n} x dx}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx}.$$

To nám umožňuje vyjadriť čiastočné súčty Eulerovho radu v tvare teleskopického súčtu. To je však už iný príbeh.

## Literatúra

- [1] Bakker, B.: *Lecture Notes*, <http://www.innaz.org/math25/1024.pdf>
- [2] Berge, G.: *Lecture Notes*, <http://folk.uib.no/nmagb/Riemann-Lebesgue.pdf>
- [3] Bonar, D. D., Khoury, M. J.: *Real Infinite Series*, The Mathematical Association of America, 2006, ISBN 0-88385-745-6.
- [4] Hriňák, M.: O jednom nekonečnom rade, *MATMIX* **13(3)** (2007/2008), 9–11.
- [5] Kalman, D.: *Six Ways to Sum a Series*, *The College Math. J.*, **24** (1993), 402–421.
- [6] Larson, L. C.: *Metódy riešenia matematických problémov*, Alfa, Bratislava, 1990, ISBN 80-05-00627-6.
- [7] Morrow, J.: *A proof of the Riemann-Lebesgue Lemma*, [http://www.math.washington.edu/~morrow/335\\_07/r1\\_lemma.pdf](http://www.math.washington.edu/~morrow/335_07/r1_lemma.pdf)
- [8] Vrábel, P.: *Heuristika a metodológia matematiky*, FPV UKF v Nitre, 2005, ISBN 80-8050-840-2.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, PF UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice e-mail: [jozef.dobos@upjs.sk](mailto:jozef.dobos@upjs.sk)

Jednota slovenských matematikov a fyzikov  
Matematický ústav SAV  
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

---

### **Adresa redakcie**

#### **Matematická a informatická časť**

Katedra matematiky FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra  
(e-mail: pvrabel@ukf.sk)

#### **Fyzikálna časť**

Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra  
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

#### **Objednávky a predplatné vybavuje**

Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra  
(e-mail: press@protonit.com)


## **OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2010 ročník 39**

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci  
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným príspevím  
Ministerstva školstva Slovenskej republiky  
Vedeckí redaktori: Beloslav Riečan, Daniel Kluvanec  
Výkonní redaktori: Peter Vrábel, Aba Teleki  
Technická a grafická úprava: Mária Benešová, Vladimír Kutnár  
Všetky príspevky prešli jazykovou úpravou a odbornou recenziou


Podávanie novinových zásielok povolené  
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava  
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981 EV 915/08

## OBSAH

<i>Škola, základ života</i>	
Jaroslava Brincková: Od tvaru k číslu a algebre v školskej matematike .....	1
Jozef Doboš: Poznámka o Eulerovom rade .....	19
Jozef Doboš: Od lineárnej kombinácie k vlastným hodnotám .....	23
Matematické nástroje (Rubriku vedie Peter Vrábel). Špecifikácia s vyčerpaním všetkých možností (exhaustácia) (Peter Vrábel) .....	27
Mohutnými krokmi (Stručný historický prehľad názorov o matematickej kultúre, pokračovanie z OMFI 2/2010 (39), s. 34 (zostavil Dušan Jedinák) .....	32
Jana Gabková, Milada Omachelová: Derive pre stredoškolských učiteľov krok za krokom .....	33
 <b>REFORMA ŠKOLSKEJ FYZIKY</b>	
Klement Hrkota: Jedna problémová úloha pre vašich žiakov a jedna pre vás .....	39
Vladimír Kováč: Lagrangeove body v gravitačnom poli dvoch telies ...	41
Texty úloh 1. kola 52. ročníka fyzikálnej olympiády (šk. r. 2010 – 2011) kategórie E, F a G .....	53
<b>INFORMÁCIE</b>	
41. Medzinárodná fyzikálna olympiáda, Záreb, Chorvátsko, 17. – 25. 7. 2010 ( <a href="http://ipho2010.hvd.hr">http://ipho2010.hvd.hr</a> ) (Ivo Čáp) ..	59
51. Medzinárodná matematická olympiáda 2.7. – 14.7. 2010 Kazachstan (Peter Novotný) .....	67

## CONTENTS

<i>School - the Basis of the Life</i>	
Jaroslava Brincková: From Shape to Number and to Algebra in School Mathematics .....	1
Jozef Doboš: A Remark about Euler's Series .....	19
Jozef Doboš: From Linear Combination to Eigenvalues .....	23
Mathematical Tools (Guided by Peter Vrábel). Specification with the Exhaustion of All Possibilities (Peter Vrábel) .....	27
By Burly Steps (A Brief Historical Survey of Opinions about Mathematical Culture), resumption of OMFI 2/2010(39), p. 34 (Compiled by Dušan Jedinák) .....	32
Jana Gabková, Milada Omachelová: Derive for the Secondary School Teachers Step by Step .....	33
 <b>REFORM OF SCHOOL PHYSICS</b>	
Klement Hrkota: One Problem – Solving Task for Your Students and One for You .....	39
Vladimír Kováč: Lagrangian Points in the Gravitational Field of Two Bodies .....	41
Texts of the Problems of the 1 <sup>st</sup> Cycle of the 52 <sup>nd</sup> Year of the Physics Olympiad (School Year 2009–2010) Categories E, F and G .....	53
<b>INFORMATION</b>	
41 <sup>st</sup> International Physics Olympiad Zagreb, Croatia, July 17 – 25, 2010 ( <a href="http://ipho2010.hvd.hr">http://ipho2010.hvd.hr</a> ) (Ivo Čáp) .....	59
51 <sup>st</sup> International Mathematics Olympiad Kazakhstan, July 2 - 14, 2010 (Peter Novotný) .....	67