FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED
UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA

ACTA MATHEMATICA 12

Zborník zo VII. nitrianskej matematickej konferencie
organizovanej Katedrou matematiky Fakulty prírodných vied UKF v Nitre
v dňoch 24. – 25. septembra 2009

NITRA 2009

Názov: ACTA MATHEMATICA 12
Edícia: PRÍRODOVEDEC, publikácia č. 389

Vedeckí redaktori:
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.
prof. RNDr. Anna Tirpáková, CSc.
doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.
RNDr. Dušan Vallo, PhD.

Recenzenti:
prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
prof. RNDr. Anna Tirpáková, CSc.
doc. RNDr. Mária Kmeťová, PhD.
doc. RNDr. Dagmar Markechová, CSc.
doc. RNDr. Peter Vrábel, CSc.
doc. RNDr. Marta Vrábelová, CSc.
RNDr. Viliam Ďuriš, PhD.
PaedDr. Janka Melušová, PhD.
PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.
PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.
PaedDr. PhDr. Valéria Švecová, PhD.
RNDr. Dušan Vallo, PhD.
PaedDr. Marek Varga, PhD.
RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.
PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.

Technická spolupráca: PaedDr. Janka Melušová, PhD.
RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.

Vydané v roku 2009 ako účelová publikácia Fakulty prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre s finančnou podporou grantov

KEGA -> 3/6314/08 - Tvorba geometrických predstáv žiaka v mladšom školskom veku a adekvátna príprava učiteľov - elementaristov

KEGA -> 3/7340/09 - Diverzifikácia prípravy učiteľov a metodikov predprimárneho a primárneho vzdelávania s dôrazom na prípravu učiteľov z matematiky

a Akademickým klubom FPV UKF V Nitre.

Schválené vedením FPV dňa 30. 9. 2009

Rukopisy príspevkov prešli odbornou oponentúrou, ale neboli jazykovo upravované.

ISBN 978-80-8094-614-2
EAN 9788080946142

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 12

VYUČOVANIE MATEMATIKY AKO INTELEKTUÁLNA VÝZVA

JOZEF DOBOŠ

ABSTRACT. The aim of this paper is to introduce the reader into the mathematical examples that are used during entrance examinations of Japanese universities.

Začneme citátom z článku [2]: „Neustále sebazdokonaľovanie učiteľa je nevyhnutnou podmienkou pre rast kvality jeho pedagogickej práce. Pritom nielen pre jeho žiakov, ale aj preňho samotného táto snaha prináša cenné výsledky. Predovšetkým mu prináša isté duševné uspokojenie, čisté svedomie, že urobil, čo bolo v jeho silách pri slabších výsledkoch študentov, prináša obyčajne zlepšenie výsledkov jeho práce v pedagogickom procese, čo ho iste napĺňa sebauspokojením. Učiteľ, ktorý sa sám intenzívne zdokonaľuje, je aj psychicky bližší študentom, lebo sám je študent. Ďalej jeho osobný príklad strháva žiakov k zanietenému štúdiu matematiky oveľa účinnejšie, než by sa to dalo docieliť najlepšími kazateľskými výkonmi.“

Jednou z možností ako dosiahnuť naplnenie tohto cieľa, je vyhľadávanie a riešenie zaujímavých úloh. Bohatým zdrojom je matematická olympiáda, avšak tieto úlohy okrem učiteľa oslovia len veľmi malú skupinu študentov. Ďalšou možnosťou sú študijné materiály pre prijímačky na vysoké školy. Pretože úroveň domácich je diskutabilná, odporúčame siahnuť po zahraničných. Pri ruských zdrojoch okrem vyššej obtiažnosti je problémom aj azbuka. Atraktívnosť štúdia v anglicky hovoriacich krajinách zvyšuje záujem našich študentov o prípravu na SAT (Scholastic Assessment Test): náročnosť úloh je nižšia, stačí zvládnuť matematickú terminológiu. V tomto príspevku sa zameriame na zaujímavé úlohy z japonských materiálov, ktoré sú u nás ťažšie dostupné.

1. Je dané číslo $\sqrt{12-\sqrt{108}}$. Nájdite jeho celú časť $a = \square$, jeho desatinnú časť $b = \square - \sqrt{\square}$. Potom vypočítajte hodnoty výrazov $\dfrac{1}{a+b-1} + \dfrac{1}{a-b+3} = \square$, $a + \sqrt{2b} = \square - \sqrt{\square}$.

Komentár. Všimnite si, že je tu predpísaný tvar výsledku – do obdĺžnikov máme doplniť vhodné celé čísla. Inak by študent mohol hľadať veličiny v desatinnom tvare (napríklad pomocou kalkulačky). Pri riešení úlohy si precvičíme vzorec

$$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b},$$

ktorý platí pre $a > b > 0$. Keď rozložíme číslo 108 na súčin $108 = 2^2 \times 3^3$, ľahko vidieť, že platí $\sqrt{12-\sqrt{108}} = \sqrt{9+3-6\sqrt{3}} = 3-\sqrt{3}$. Odtiaľ dostávame $a = 1$, $b = 2-\sqrt{3}$. Podobne postupujeme aj v ďalšej časti úlohy.

2. Nech a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sú také prirodzené čísla, pre ktoré platí $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Položme $P = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $Q = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$. Nájdite tieto čísla, ak viete, že

(A) $P \cap Q = \{a_3, a_4\}$,

(B) $a_3 + a_4 = 13$,

(C) súčet všetkých čísel, ktoré ležia v množine $P \cup Q$, je 225.

Komentár. V tejto úlohe si precvičíte usporiadanie čísel, prienik a zjednotenie dvoch množín, ako aj riešenie kvadratickej rovnice. Premyslite si, ako sa zmení úloha, keď hľadané čísla budú celé, resp. reálne.

3. Každá z nasledujúcich konfigurácií obsahuje tie isté čísla:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 2 & & \\ & 3 & & 3 & & 3 & \\ 4 & & 4 & & 4 & & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 3 & & 4 & & \\ & 2 & & 3 & & 4 & \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 4 & & 3 & & \\ & 4 & & 3 & & 2 & \\ 4 & & 3 & & 2 & & 1 \end{array}$$

Súčet týchto čísel je $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + (2+2) + (3+3+3) + (4+4+4+4)$. Na druhej strane, súčet čísel na rovnakých pozíciách je $1+4+4=9$, $2+3+4=9$, atď. Teda $3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 9(1+2+3+4)$. Na základe tohto pozorovania nájdite vyjadrenie súčtu štvorcov po sebe idúcich prirodzených čísel.

Komentár. Pokúste sa dokázať, že súčty trojíc čísel na rovnakých pozíciách sú rovné číslu $1+n+n = 2n+1$. Krása tejto úlohy je v tom, že nám odhaľuje jednoduchosť jazyka geometrických konfigurácií, ktorý nám dovoľuje objavovať zákonitosti z ríše čísel. Cesta k vzorcu je už potom jednoduchá:

$$3\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right) = (2n+1)(1+2+3+\cdots+n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

4. Usporiadame prirodzené čísla do nasledujúcej tabuľky:

(1) Zistite, akým číslom začína 8. riadok.

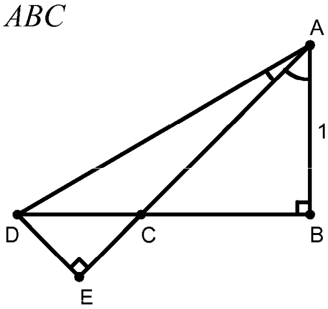
(2) Zistite, v ktorom riadku leží číslo 100.

(3) Nájdite súčet čísel v 10. riadku.

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 2, & 3 & & \\ 4, & 5, & 6 & \\ 7, & 8, & 9, & 10 \\ 11, & 12, & \ldots & \\ \vdots & & & \end{array}$$

Komentár. Túto úlohu možno samozrejme riešiť „hrubou silou“. Stačí však zmeniť zadanie, napr. „V ktorom riadku leží číslo 2^{10}?“ a už máme zaujímavejšiu úlohu. Označme symbolom a_n číslo na konci n-tého riadku. Potom $a_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Hľadáme teda také n, pre ktoré platí $a_{n-1} < 1024 \le a_n$.

5. Nasledujúci obrázok popisuje situáciu, kde ΔABC má pravý uhol pri vrchole B, jeho odvesna AB má jednotkovú dĺžku a uhol $\angle BAC$ má veľkosť 45°. Ďalej, ΔADE má pravý uhol pri vrchole E, Pričom uhol $\angle BAD$ má veľkosť 60°. Nájdite



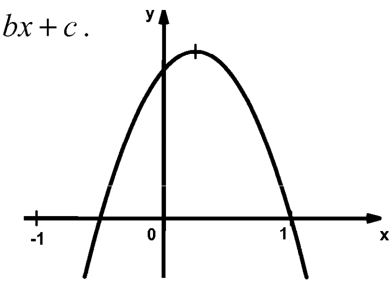
$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{\square} + \sqrt{\square}}{\square}.$$

Komentár. Krása tejto úlohy je znovu v prepojení geometrie s výpočtami. Potrebujeme len Pytagorovu vetu a vyjadrenie kosínusu uhla v pravouhlom trojuholníku. Hľadaný výraz je: $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

6. Nech a, b sú reálne čísla. Na intervale $-3 \le x \le 1$ uvažujme funkcie $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $g(x) = a(x^2 + 2x + 2)^2 - 6a(x^2 + 2x + 2) + 9a + b$. Určte obor hodnôt funkcie $f(x)$ v tvare $\square \le f(x) \le \square$. Ak obor hodnôt funkcie $g(x)$ je $-2 \le g(x) \le 10$, potom $a = \square$, $b = \square$, alebo $a = \square$, $b = \square$.

Komentár. Obor hodnôt funkcie $f(x) = (x+1)^2 + 1$ je $1 \le f(x) \le 5$ (pre $-3 \le x \le 1$), čo je zároveň definičným oborom funkcie $h(y) = a(y-3)^2 + b$, t.j. $1 \le y \le 5$, pretože $g(x) = h(f(x))$. Po tejto substitúcii už úlohu ľahko vyriešime: ak obor hodnôt funkcie $h(y)$ je interval $-2 \le h(y) \le 10$, potom $a = 3$, $b = -2$; alebo $a = -3$, $b = 10$.

7. Na obrázku vidíme graf funkcie $y = ax^2 + bx + c$. Určte znamienka koeficientov a, b, c, ako aj znamienka výrazov $b^2 - 4ac$, $a + b + c$, $a - b + c$.



Komentár. Vrchol paraboly leží v prvom kvadrante, pričom zrejme $a < 0$. Ďalej využijeme že platí $f(0) > 0$, $f(1) = 0$, $f(-1) < 0$. Potom $b > 0$, $c > 0$, $b^2 - 4ac > 0$, $a + b + c = 0$, $a - b + c < 0$.

8. Postupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sú dané rekurentne takto: $a_1 = 3$, $b_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + b_n$, $b_{n+1} = a_n + 2b_n$. Máme nájsť ich vyjadrenia v tvare $a_n = \square \times \square^{n-1} + \square$, $b_n = \square \times \square^{n-1} - \square$.

Komentár. Položme $s_n = a_n + b_n$, $t_n = a_n - b_n$. Ľahko sa overí, že ide o geometrické postupnosti, pričom $s_n = 4 \times 3^{n-1}$, $t_n = 2$.

9. Predpokladajme, že funkcia $f(x)$ má deriváciu v bode $x = 5$ rovnú číslu 4. Vypočítajte $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(5+2h) - f(5-h)}{h} = \boxed{}$.

Komentár. V tejto úlohe si precvičíte definíciu derivácie.

10. Uvažujme Clairautovu diferenciálnu rovnicu $y = xy' + 2(y')^2$.

(1) Funkcia $y = ax + b$ je riešením tejto rovnice pre $b = \boxed{}\, a^2$.

(2) Parabola $y = cx^2$ je riešením tejto rovnice pre $c = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$.

(3) Priamka (1) je dotyčnicou paraboly (2) v bode $x = \boxed{}\, a$.

Komentár. Cieľom tejto úlohy je na jednoduchom materiáli ukázať, že Cauchyho úloha nemusí mať jediné riešenie.

11. Nájdite funkcie $f(x)$ a $g(x)$, ak viete, že $f(0) = 1$, $g(0) = 2$, $\dfrac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = 5$, $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = 12x + 7$.

Komentár. V tejto úlohe si precvičíte základné pravidlá integrovania.

12. Nájdite funkciu $f(x)$, ak viete, že $f(x) = x^2 + x\int\limits_0^1 f(t)dt + \int\limits_0^2 f(t)dt$.

Komentár. Prvé stretnutie s integrálnou rovnicou môže byť nenáročné, ako ukazuje táto úloha. Riešením je vhodná kvadratická funkcia.

13. Grafom funkcie $y = x^2$ je parabola C, grafom funkcie $y = ax$ je priamka l. Nech $0 < a < 1$. Plošný obsah útvaru ohraničeného parabolu C a priamkou l označme S_1. Plošný obsah útvaru ohraničeného parabolu C, priamkou l a priamkou $x = 1$ označme S_2. Máme nájsť najmenšiu možnú hodnotu veličiny $S = S_1 + S_2$.

Komentár. V tejto úlohe si precvičíte počítanie obsahu pomocou integrálu a zároveň hľadanie extrému funkcie. Odpoveď pritom nie je zrejmá ani z obrázka.

14. Ak vieme, že $\int_1^x f(t)dt = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + ax + b$, máme nájsť $f(x) = x^2 - \boxed{}\, x + a$, $f'(x) = \boxed{}\, x - \boxed{}$. Graf funkcie $y = f(x)$ má dve dotyčnice prechádzajúce bodom $(1,1)$ práve vtedy, keď $a > \boxed{}$. Tieto dve dotyčnice sú na seba kolmé práve vtedy, keď $a = \frac{\square}{\square}$, $b = \frac{\square}{\square}$.

Komentár. Komplexná úloha s precvičovaním integrálu, rovnice dotyčnice a kolmosti priamok.

Ukončíme citátom z článku [1]: „Teda aký by mal byť učiteľ matematiky? Krátko by sme mohli zhrnúť jeho vlastnosti takto: Mal by to byť človek, ktorý má rád svojich žiakov a matematiku. Teda človek, ktorý má rád to, čo má učiť a toho, koho to má učiť. Pri porovnaní s týmto kľúčovým kritériom všetky ostatné znaky sú zanedbateľné.“

Literatúra

[1] Riečan, B.: *O vysokoškolských učebniciach a tvorivej práci budúcich učiteľov matematiky*, In: Didaktické a metodologické aspekty vyučovania matematiky na vysokých školách univerzitného smeru, Editor: T. Šalát, Ústav rozvoja vysokých škôl SSR, Bratislava, 1986.

[2] Šalát, T.: *O matematickej kultúre učiteľa matematiky*, Matematické obzory, 19/1982, 1–9.

[3] Wu, Ling-Erl Eileen T.: *Japanese University Entrance Examination Problems in Mathematics,* The Mathematical Association of America, 1993 (dostupné online na adrese http://www.maa.org/juee/).

Prof. RNDr. Jozef Doboš, CSc.
Ústav matematických vied
Prírodovedecká fakulta
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Jesenná 5
SK – 040 01 Košice
e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

Názov:	ACTA MATHEMATICA 12
Vydavateľ:	Fakulta prírodných vied UKF v Nitre
Zostavovatelia:	prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
	prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.
	prof. RNDr. Anna Tirpáková, CSc.
	doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.
	RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Technická spolupráca:	PaedDr. Janka Melušová, PhD.
	RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.
Rok vydania:	2009
Poradie vydania:	prvé
Počet strán:	334
Počet výtlačkov:	120 ks
Tlač:	Štatistické a evidenčné vydavateľstvo tlačív, a.s. (ŠEVT a.s.), Plynárenská 6, 821 09 Bratislava

ISBN 978-80-8094-614-2
EAN 9788080946142

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY
IN NITRA

Prof. RNDr. Jozef Doboš, CSc.
ÚSTAV MATEMATICKÝCH VIED
PF UPJŠ
Jesenná 5
041 54 Košice

INVITATION LETTER

Dear Professor,

we have the pleasure of inviting you to the **7th Nitra Mathematical Conference** to be held at Department of Mathematics, Constantine the Philosopher University in Nitra, Slovakia from September 24th to 25th, 2009. You are kindly invited to give a lecture in the plenary part of the conference.

We sincerely hope that you will join us in making 7th Nitra Mathematical Conference a success.

Yours sincerely,

----

prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
Conference Chair