

**OBSOLETE**

**1/2009 (38)**

**HORIZONS OF  
MATHEMATICS, PHYSICS  
AND COMPUTER SCIENCES  
1/2009 Volume 38**

**REPRINT**

*MATEMATIKY  
FYZIKY a  
INFORMATIKY*

# OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2009 ročník 38

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,  
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

## HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 1/2009 Volume 38

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and  
Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

**Editors in Chief:** Beloslav Riečan (Mathematics and Computer Sciences)  
Daniel Kluvanec (Physics)

### International Editorial Board:

|                            |                                |
|----------------------------|--------------------------------|
| András Ambrus (Hungary)    | Ján Pišút (Slovak republic)    |
| Giuliana Cavagioni (Italy) | Adam Plocki (Poland)           |
| Gábor Galambos (Hungary)   | Zdeněk Půlpán (Czech republic) |
| Hans Jordens (Netherland)  | Ladislav Emanuel Roth (USA)    |
| László Nánya (Hungary)     | Ivo Volf (Czech republic)      |

**Executive Editors:** Peter Vrábel (Mathematics and Computer Sciences)  
Aba Teleki (Physics)

### Editorial Board:

#### Mathematics and Computer Sciences:

|                |                |                |              |
|----------------|----------------|----------------|--------------|
| Vojtech Bálint | Ivan Kalaš     | Peter Maličký  | Dušan Šveda  |
| Jozef Doboš    | Ladislav Kvasz | Milan Matejdes | Peter Vrábel |

#### Physics:

|                   |               |                 |              |
|-------------------|---------------|-----------------|--------------|
| Ivan Červeň       | Árpád Kecskés | Stanislav Holec | Endre Szabó  |
| Václav Havel      | Václav Koubek | Vladimír Šebeň  | Eva Tomanová |
| Anna Jankovychová | Dalibor Krupa | Juraj Šebesta   | Ivo Volf     |

### Reviewers:

#### Mathematics and Computer Sciences:

|                  |                  |                 |                 |
|------------------|------------------|-----------------|-----------------|
| Jozef Doboš      | Mária Kmeťová    | Beloslav Riečan | Marián Trenkler |
| Blahoslav Harman | Daniel Palumbíny | Štefan Solčan   | Peter Vrábel    |

#### Physics:

|               |                  |                 |               |
|---------------|------------------|-----------------|---------------|
| Árpád Kecskés | Daniel Kluvanec  | Ladislav Morvay | Juraj Šebesta |
| Ján Klíma     | Miroslav Kolesík | Mária Rakovská  | Aba Teleki    |

---

## Integrálne súčty

**Jozef Doboš**

**Abstract:** The aim of this paper is to improve teaching of the Riemann integral.

V základnom kurze matematickej analýzy sa študenti oboznamujú s určitým integrálom podľa schémy:

integrálne súčty  $\rightarrow$  Riemannov integrál  $\rightarrow$  Newton-Leibnizov vzorec

Táto cesta však nemusí byť jednosmerná. Výklad môžeme obohatiť úlohami na výpočet istých typov limit, kde rozpoznanie integrálnych súčtov vedie k elegantnému riešeniu. (Pozri napr. [2] str. 301, [11] str. 256, alebo [3] str. 256.) Takéto úlohy sú obľúbené v rôznych študentských súťažiach, pretože ich riešenie často vyžaduje istú dávku invencie. Na ilustráciu si ukážeme rekonštrukciu vzniku takejto úlohy. Začneme nasledujúcim integrálom<sup>1</sup>:

$$(1) \quad \int_0^1 x \ln x dx = -\frac{1}{4}.$$

Pripomeňme si definíciu Riemannových integrálnych súčtov funkcie  $f$ :

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

kde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

je delenie intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pričom  $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$  pre každé  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Ich špeciálnym prípadom sú *ľavé súčty*, ktoré dostaneme voľbou  $\xi_k = x_{k-1}$  pre každé  $k = 1, 2, \dots, n$ , ako aj *pravé súčty*, ktoré dostaneme voľbou  $\xi_k = x_k$  pre každé

<sup>1)</sup> Pri výpočte tohto integrálu pracujeme v skutočnosti s funkciou  $f$  definovanou predpisom  $f(x) = x \ln x$  pre  $x > 0$  a  $f(x) = 0$  pre  $x = 0$ , ktorá je spojitá na intervale  $\langle 0, 1 \rangle$ . Táto funkcia má primitívnu funkciu  $F$ , ktorá je definovaná predpisom  $F(x) = \frac{x^2}{2} (\ln x - \frac{1}{2})$  pre  $x > 0$  a  $F(x) = 0$  pre  $x = 0$ .

$k = 1, 2, \dots, n$ . Pritom budeme predpokladať, že deliace body sú v intervale  $\langle a, b \rangle$  rozložené rovnomerne, t.j. rozdiel  $x_k - x_{k-1}$  sa rovná konštante  $(b - a)/n$  pre každé  $k = 1, 2, \dots, n$ . Pre integrovateľnú funkciu  $f$  potom jej integrál sa rovná limite ľavých (aj pravých) integrálnych súčtov pre  $n \rightarrow \infty$ . Poznamenajme, že ľavé a pravé súčty nie sú vhodné na definovanie Riemannovho integrálu (pozri [9] str. 282). Na druhej strane, Riemannov integrál možno korektné vybudovať s vylúčením ľavých a pravých súčtov, t.j. iba na základe integrálnych súčtov splňujúcich požiadavku  $x_{k-1} < \xi_k < x_k$  pre každé  $k = 1, 2, \dots, n$  (pozri [1] str. 9–20).

Pravé súčty pre integrál (1) sú

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left( \frac{k}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \ln k - \frac{\ln n}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \ln(k^k) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \ln n \quad \left[ \text{pretože } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \right]. \end{aligned}$$

Aby sme zamaskovali logaritmy, prejdeme od  $s_n$  ku postupnosti

$$a_n = e^{s_n} = n^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})} \left( \prod_{k=1}^n k^k \right)^{\frac{1}{n^2}}.$$

Dostali sme sa až k formulácii jednej súťažnej úlohy<sup>2</sup> z roku 2008.

### Úloha 1.

Vypočítajte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})} (1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n)^{\frac{1}{n^2}}.$$

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že táto limita sa rovná číslu  $e^{-1/4}$ .

Takéto úlohy nemusia byť samoučelné, ako ukazuje nasledujúci príklad.

### Úloha 2.

Ukážte, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = \ln 2.$$

*Riešenie.* Najskôr daný výraz upravíme do tvaru, v ktorom môžeme ľahko rozpoznať integrálny súčet:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

<sup>2)</sup> 11<sup>th</sup> Annual Harvard-MIT Mathematics Tournament

Pretože ide o pravý integrálny súčet, platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2.$$

Túto limitu môžeme teraz použiť pri hľadaní súčtu nasledujúceho radu:

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Pre jeho čiastočné súčty máme:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \dots + \frac{1}{2n-1} + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Pritom v prvom kroku sme záporné členy upravili podľa schémy  $x = -x + 2x$ .

Odtiaľ vyplýva, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \ln 2$ . Pretože  $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1}$ , máme tiež  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \ln 2$ . Tým sme ukázali, že číslo  $\ln 2$  je súčtom radu (2).

Poslednú časť tohto článku venujeme nasledujúcej limite:

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Pretože pre postupnosti s kladnými členmi platí (pozri napr. [13] str. 16)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

(za predpokladu, že limita vpravo existuje), limita (3) sa redukuje na výpočet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Niektorí autori však odporúčajú použiť integrál (pozri napr. [6] a [12]). Aby sme rozpoznali integrálny súčet, použijeme

$$\ln \left( \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \right) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{k}{n} \right).$$

Pretože ide o pravý integrálny súčet, máme

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \right) = - \int_0^1 \ln x \, dx = 1,$$

odkiaľ už priamo vyplýva rovnosť (3). Táto argumentácia však nie je úplná. Musíme si uvedomiť, že integrál na pravej strane v (4) je nevlastný<sup>3</sup>. Je to spôsobené tým, že funkcia  $y = -\ln x$  nie je ohraničená na polouzavretom intervale  $(0, 1)$ , teda nie je Riemannovsky integrovateľná.

V práci [8] možno nájsť jednoduchý príklad funkcie  $f$  definovanej na intervale  $\langle 0, 1 \rangle$ , ktorej nevlastný integrál  $\int_0^1 f(x) \, dx$  absolútne konverguje, ale limita pravých súčtov sa rovná  $\infty$ . Položme  $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ . Funkciu  $f$  definujeme predpisom  $f(x) = n^2$  pre  $x \in A$ ,  $x = \frac{1}{n}$ , pričom pre  $x \notin A$  kladieme  $f(x) = 0$ . Na každom intervale  $\langle t, 1 \rangle$ , kde  $0 < t < 1$ , je funkcia  $f$  rovná nule okrem konečného počtu bodov, preto  $\int_t^1 f(x) \, dx = 0$ . Odtiaľ vyplýva, že jej nevlastný integrál  $\int_0^1 f(x) \, dx$  absolútne konverguje k nule. Pretože funkcia  $f$  je nezáporná, pre pravé súčty máme nasledujúci odhad:

$$(5) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = n.$$

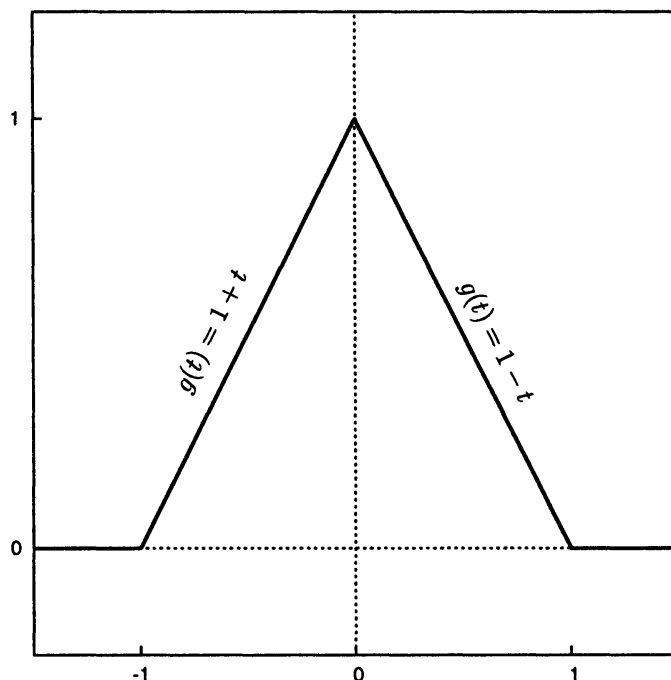
Odtiaľ vyplýva, že limita pravých súčtov je  $\infty$ .

Všimnime si, že funkcia  $f$  je nespojitá v bodoch množiny  $A$ . Ukážeme, že istou modifikáciou tejto funkcie možno dosiahnuť, že výsledná funkcia bude navyše spojitá na intervale  $(0, 1)$ . K tomuto účelu je potrebné každý bod  $x = \frac{1}{n}$  množiny  $A$  obaliť intervalom  $\langle a_n, b_n \rangle = \langle \frac{1}{n} - \delta_n, \frac{1}{n} + \delta_n \rangle$  tak, aby tieto intervaly boli po dvoch disjunktné. Funkciu  $f$  potom definujeme tak, aby zostala zachovaná vlastnosť  $f(x) = n^2$  pre každé  $x = \frac{1}{n} \in A$  a aby platilo  $f(x) = 0$  pre každé reálne číslo  $x$ , ktoré neleží v žiadnom z intervalov  $\langle a_n, b_n \rangle$ . Spojitosť zabezpečíme najjednoduchšie tak, že funkcia  $f$  bude lineárna na intervaloch tvaru  $\langle a_n, \frac{1}{n} \rangle$ ,  $\langle \frac{1}{n}, b_n \rangle$ . Môžeme to urobiť prostredníctvom pomocnej funkcie  $g$ , ktorá má nasledujúce vlastnosti:

- $g(t) = 0$  pre každé reálne číslo  $t$  s vlastnosťou  $|t| \geq 1$ ,
- $g(0) = 1$ ,
- $g$  je lineárna na každom z intervalov  $\langle -1, 0 \rangle$ ,  $\langle 0, 1 \rangle$ .

---

<sup>3)</sup> Zmienka o tom v prácach [6] a [12] chýba.

Obr. 1: Graf pomocnej funkcie  $g$ .

Ľahko sa overí, že platí

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{ak } t \leq -1, \\ 1+t & \text{ak } -1 \leq t \leq 0, \\ 1-t & \text{ak } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{ak } t \geq 1. \end{cases}$$

Funkciu  $g$  možno elegantne vyjadriť pomocou absolútnej hodnoty (pozri [4]) predpisom  $g(t) = \frac{1}{2}(1 - |t| + |1 - |t||)$ , pre každé reálne číslo  $t$ .

Pre každé prirodzené číslo  $n$  definujme funkciu  $f_n$  predpisom

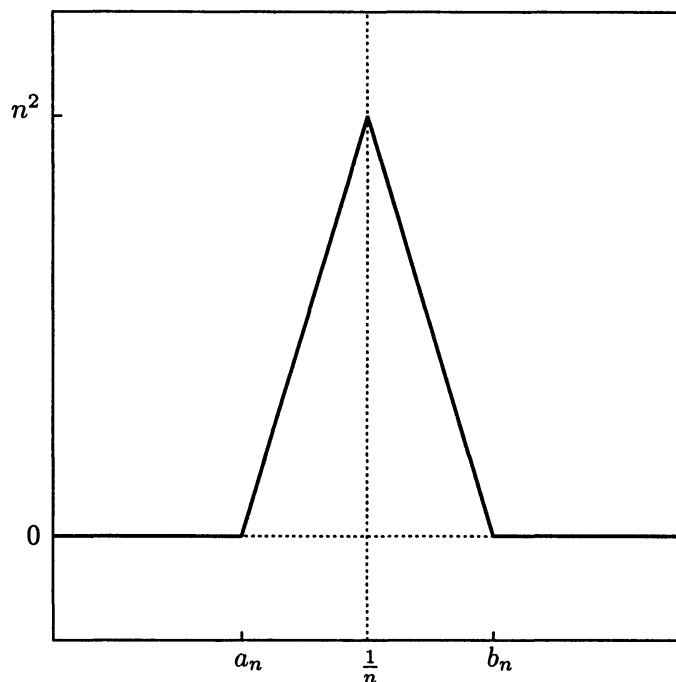
$$f_n(x) = n^2 g\left(\frac{1}{\delta_n} \left(x - \frac{1}{n}\right)\right)$$

pre každé reálne číslo  $x$ . Z vyššie uvedených vlastností funkcie  $g$  vyplýva, že pre funkciu  $f_n$  platí:

a)  $f_n(x) = 0$  pre každé reálne číslo  $x$  s vlastnosťou  $\left|x - \frac{1}{n}\right| \geq \delta_n$ ,

b)  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^2$ ,

c)  $f_n$  je lineárna na každom z intervalov  $\langle a_n, \frac{1}{n} \rangle$ ,  $\langle \frac{1}{n}, b_n \rangle$ .

Obr. 2: Graf funkcie  $f_n$ .

Položme  $\delta_n = \frac{1}{n^4}$ . Tým zabezpečíme, že intervaly  $\langle a_n, b_n \rangle$  sú po dvoch disjunktné. K tomu stačí overiť platnosť nerovností

$$b_{n+1} < \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right)}_{\text{stred intervalu } \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)} < a_n$$

pre každé prirodzené  $n > 1$ . Na to však stačí stredoškolská matematika.

Funkciu  $f$  definujeme predpisom

$$f(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{ak } a_n \leq x \leq b_n, \text{ kde } n \in \mathbb{N}, n > 1, \\ 0, & \text{pre ostatné reálne čísla } x. \end{cases}$$

Z konštrukcie funkcie  $f$  vyplýva, že je spojitá na intervale  $(0, 1)$ . Pretože každá funkcia  $f_n$  nadobúda hodnotu nula mimo intervalu  $\langle a_n, b_n \rangle$ , pričom intervaly  $\langle a_n, b_n \rangle$  sú po dvoch disjunktné, funkciu  $f$  môžeme vyjadriť v tvare

$$f = \sum_{n=2}^{\infty} f_n.$$



Potom integrál funkcie  $f$  bude sa bude rovnat' súčtu radu  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , ktorý konverguje. Pretože vlastnosť (5) zostala zachovaná, limita pravých súčtov je  $\infty$ . Tým sme ukázali, že nevlastný Riemannov integrál  $\int_0^1 f(x) dx$  sa nerovná limite pravých súčtov.

Tieto príklady ukazujú, že argumentáciu v (4) musíme doplniť. Našťastie existujú jednoduché postačujúce podmienky (napr. monotónnosť) za ktorých sa nevlastný integrál rovná limite svojich pravých súčtov. Napríklad [10] str. 589, [13] str. 53, dokonca v učebnici [5] str. 615 je tejto problematike venovaná celá kapitola. Takže našu argumentáciu pre rovnosť (4) môžeme doplniť napr. takto: Pretože ide o pravý integrálny súčet a pretože funkcia  $y = -\ln x$  je klesajúca, platí (4). Na záver uvedieme niekoľko úloh<sup>4</sup> na precvičovanie:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \left(\frac{0}{n}\right)^3 + \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 \right]$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} \right)$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} \right)$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{5n^2+1} + \frac{1}{5n^2+2} + \dots + \frac{1}{6n^2} \right)$
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} + \ln \sqrt[n]{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \ln \sqrt[n]{1 + \frac{n}{n}} \right)$
6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3}{n} \sqrt{1 + \frac{3k}{n}}$
7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$
8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4}{n + 4k}$
9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} \sin \left( \frac{k\pi}{n} \right)$

---

<sup>4)</sup> Zaujímavé úlohy možno nájsť aj v práci [7].

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3kn}}$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} \left( \frac{2k}{n} + 1 \right)^3$$

## Literatúra

- [1] Bear, H. S.: *A Primer of Lebesgue Integration*, Academic Press 2002.
- [2] Brannan, D. A.: *A First Course in Mathematical Analysis*, Cambridge University Press 2006.
- [3] Bressoud, D.: *A Radical Approach to Real Analysis*, The Mathematical Association of America, 2007.
- [4] Doboš, J.: *Lomená čiara*, *Obzory matematiky, fyziky a informatiky* **36**(4) (2007), 31–34.
- [5] Фихтенгольц, Г. М.: *Курс дифференциального и интегрального исчисления, Том 2* Наука, Москва 1966.
- [6] Goel, S. K. and Rodriguez, D. M.: *A note on evaluating limits using Riemann sums*, *Mathematics Magazine* **60** (1987), 225–228.
- [7] Körtesi, P.: *Some applications of integral sums*, *Creative Math.* **12** (2003), 1–5.
- [8] Kovács, G.: *Improper integrals and Riemann sums*, *Creative Math.* **12** (2003), 7–10.
- [9] Kuttler, K.: *Calculus, Applications and Theory* 2008  
<http://www.math.byu.edu/~klkuttler/calcbokB.pdf>
- [10] Ляшко, И. И. и др.: *Справочное пособие по математическому анализу, ч. 1*, Вища школа, Киев 1978.
- [11] Mattuck, A.: *Introduction to Analysis*, Prentice Hall, Inc. 1999.
- [12] Mumma, Ch. C. II: *N! and The Root Test*, *Amer. Math. Monthly* **93** (1986), 561.
- [13] Pólya, G. and Szegő, G.: *Problems and Theorems in Analysis I*, Springer-Verlag 1998.

Adresa autora:

Ústav matematických vied, PF UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice

e-mail: jozef.dobos@upjs.sk

Jednota slovenských matematikov a fyzikov  
Matematický ústav SAV  
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

---

### **Adresa redakcie**

#### **Matematická a informatická časť**

Katedra matematiky FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra  
(e-mail: pvrabel@ukf.sk)

#### **Fyzikálna časť**

Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra  
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

#### **Objednávky a predplatné vybavuje**

Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra


## **OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY** **1/2009 ročník 38**

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci  
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným príspevím  
Ministerstva školstva Slovenskej republiky  
Vedeckí redaktori: Beloslav Riečan, Daniel Klivanec  
Výkonní redaktori: Peter Vrábel, Aba Teleki  
Technická a grafická úprava: Mária Benešová, Vladimír Kutnár  
Všetky príspevky prešli odbornou recenziou


Podávanie novinových zásielok povolené  
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava  
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981

## OBSAH

|  |    |
|--|----|
| <i>Škola, základ života</i>  |    |
| Beloslav Riečan: Od pravdepodobnosti ku kombinatorike a nie naopak   | 1  |
| Jozef Doboš: Integrálne súčty .....  | 13 |
| Monika Dillingerová: Hry s matematikou, matematika v hrách .....   | 21 |
| Dušan Jedinák: Podnetná literatúra pre motiváciu a popularizáciu matematiky                                      | 30 |
| Matematické nástroje (Rubriku vedie Peter Vrábel).<br>Extremálny princíp (Peter Vrábel) .....                    | 31 |
| Igor Štubňa: Práca magnetickej sily? .....   | 35 |
| Michal Demetrian: Keplerova úloha – algebraické riešenie .....   | 42 |
|  <b>REFORMA ŠKOLSKEJ FYZIKY</b> |    |
| Jozef Beňuška: Polrok po začiatku reformy .....  | 51 |
| Zuzana Ješková: Učitelia zo Slovenska už dvakrát navštívili CERN....   | 59 |
| <b>JUBILEUM</b>  |    |
| Alfonz Haviar sedemdesiatročný<br>(Gabriela Monoszová a Ľubomír Snoha) .....                                     | 70 |

## CONTENTS

|   |    |
|---|----|
| <i>School - the Basis of the Life</i>   |    |
| Beloslav Riečan: From Probability to Combinatorics and not Vice Versa ..  | 1  |
| Jozef Doboš: Integral Counts .....  | 13 |
| Monika Dillingerová: Games with Mathematics,<br>Mathematics in Games .....  | 21 |
| Dušan Jedinák: Stimulating Literature for Motivation<br>and Popularization of Mathematics .....                     | 30 |
| Mathematical Tools (Guided by Peter Vrábel)<br>Extremal Principle (Peter Vrábel) .....                              | 31 |
| Igor Štubňa: Work of Magnetic Force? .....  | 35 |
| Michal Demetrian: Algebraic Solution of the Kepler Problem.....   | 42 |
|  <b>REFORM OF SCHOOL PHYSICS</b> |    |
| Jozef Beňuška: Half-year After the School Reform Beginning .....  | 51 |
| Zuzana Ješková: Slovak Teachers Have Already<br>Visited CERN Two Times .....  | 59 |
| <b>JUBILEE</b>  |    |
| Alfonz Haviar is Seventy (Gabriela Monoszová a Ľubomír Snoha).....  | 70 |