OBZORY

1/2009 (38)

HORIZONS OF
MATHEMATICS, PHYSICS
AND COMPUTER SCIENCES

1/2009 Volume 38

REPRINT

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2009 ročník 38

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 1/2009 Volume 38

Journal for Theory and Applied Issues of Mathematics, Informatics and Physics Teaching at Primary and Secondary Schools

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2009 (38)

Integrálne súčty

Jozef Doboš

Abstract: The aim of this paper is to improve teaching of the Riemann integral.

V základnom kurze matematickej analýzy sa študenti oboznamujú s určitým integrálom podľa schémy:

integrálne súčty $\to$ Riemannov integrál $\to$ Newton-Leibnizov vzorec

Táto cesta však nemusí byť jednosmerná. Výklad môžeme obohatiť úlohami na výpočet istých typov limít, kde rozpoznanie integrálnych súčtov vedie k elegantnému riešeniu. (Pozri napr. [2] str. 301, [11] str. 256, alebo [3] str. 256.) Takéto úlohy sú obľúbené v rôznych študentských súťažiach, pretože ich riešenie často vyžaduje istú dávku invencie. Na ilustráciu si ukážeme rekonštrukciu vzniku takejto úlohy. Začneme nasledujúcim integrálom[1]:

$$\int_0^1 x\ln x\,dx = -\frac{1}{4}. \tag{1}$$

Pripomeňme si definíciu Riemannových integrálnych súčtov funkcie f:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

kde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

je delenie intervalu $\langle a,b\rangle$, pričom $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$ pre každé $k = 1,2\ldots,n$.

Ich špeciálnym prípadom sú *ľavé súčty*, ktoré dostaneme voľbou $\xi_k = x_{k-1}$ pre každé $k = 1,2\ldots,n$, ako aj *pravé súčty*, ktoré dostaneme voľbou $\xi_k = x_k$ pre každé

[1] Pri výpočte tohto integrálu pracujeme v skutočnosti s funkciou f definovanou predpisom $f(x) = x\ln x$ pre $x > 0$ a $f(x) = 0$ pre $x = 0$, ktorá je spojitá na intervale $\langle 0,1\rangle$. Táto funkcia má primitívnu funkciu F, ktorá je definovaná predpisom $F(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$ pre $x > 0$ a $F(x) = 0$ pre $x = 0$.

$k = 1,2\dots,n$. Pritom budeme predpokladať, že deliace body sú v intervale $\langle a,b\rangle$ rozložené rovnomerne, t.j. rozdiel $x_k - x_{k-1}$ sa rovná konštante $(b-a)/n$ pre každé $k = 1,2\dots,n$. Pre integrovateľnú funkciu f potom jej integrál sa rovná limite ľavých (aj pravých) integrálnych súčtov pre $n \to \infty$. Poznamenajme, že ľavé a pravé súčty nie sú vhodné na definovanie Riemannovho integrálu (pozri [9] str. 282). Na druhej strane, Riemannov integrál možno korektne vybudovať s vylúčením ľavých a pravých súčtov, t.j. iba na základe integrálnych súčtov splňujúcich požiadavku $x_{k-1} < \xi_k < x_k$ pre každé $k = 1,2\dots,n$ (pozri [1] str. 9–20).

Pravé súčty pre integrál (1) sú

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln k - \frac{\ln n}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\ln(k^k) - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n \qquad \left[\text{pretože } \sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}\right]. \end{aligned}$$

Aby sme zamaskovali logaritmy, prejdeme od s_n ku postupnosti

$$a_n = \mathrm{e}^{s_n} = n^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})}\left(\prod_{k=1}^{n}k^k\right)^{\frac{1}{n^2}}.$$

Dostali sme sa až k formulácii jednej súťažnej úlohy[2] z roku 2008.

Úloha 1.

Vypočítajte limitu

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})}\left(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdots n^n\right)^{\frac{1}{n^2}}.$$

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že táto limita sa rovná číslu $\mathrm{e}^{-1/4}$.

Takéto úlohy nemusia byť samoúčelné, ako ukazuje nasledujúci príklad.

Úloha 2.

Ukážte, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right) = \ln 2.$$

Riešenie. Najskôr daný výraz upravíme do tvaru, v ktorom môžeme ľahko rozpoznať integrálny súčet:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

---

[2] 11th Annual Harvard-MIT Mathematics Tournament

Pretože ide o pravý integrálny súčet, platí

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\ln 2.$$

Túto limitu môžeme teraz použiť pri hľadaní súčtu nasledujúceho radu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}. \tag{2}$$

Pre jeho čiastočné súčty máme:

$$\begin{aligned}
s_{2n}&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\
&=1+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\right)\\
&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\
&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

Pritom v prvom kroku sme záporné členy upravili podľa schémy $x=-x+2x$.

Odtiaľ vyplýva, že $\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n}=\ln 2$. Pretože $s_{2n+1}=s_{2n}+\frac{1}{2n+1}$, máme tiež $\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n+1}=\ln 2$. Tým sme ukázali, že číslo $\ln 2$ je súčtom radu (2).

Poslednú časť tohto článku venujeme nasledujúcej limite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}. \tag{3}$$

Pretože pre postupnosti s kladnými členmi platí (pozri napr. [13] str. 16)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

(za predpokladu, že limita vpravo existuje), limita (3) sa redukuje na výpočet

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

Niektorí autori však odporúčajú použiť integrál (pozri napr. [6] a [12]). Aby sme rozpoznali integrálny súčet, použijeme

$$\ln\left(\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}\right)=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right).$$

Pretože ide o pravý integrálny súčet, máme

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}\right) = -\int_0^1 \ln x\,dx = 1, \tag{4}$$

odkiaľ už priamo vyplýva rovnosť (3). Táto argumentácia však nie je úplná. Musíme si uvedomiť, že integrál na pravej strane v (4) je nevlastný[3]. Je to spôsobené tým, že funkcia $y = -\ln x$ nie je ohraničená na polouzavretom intervale $(0,1\rangle$, teda nie je Riemannovsky integrovateľná.

V práci [8] možno nájsť jednoduchý príklad funkcie f definovanej na intervale $\langle 0,1\rangle$, ktorej nevlastný integrál $\int_0^1 f(x)\,dx$ absolútne konverguje, ale limita pravých súčtov sa rovná ∞. Položme $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$. Funkciu f definujeme predpisom $f(x) = n^2$ pre $x \in A$, $x = \frac{1}{n}$, pričom pre $x \notin A$ kladieme $f(x) = 0$. Na každom intervale $\langle t,1\rangle$, kde $0 < t < 1$, je funkcia f rovná nule okrem konečného počtu bodov, preto $\int_t^1 f(x)\,dx = 0$. Odtiaľ vyplýva, že jej nevlastný integrál $\int_0^1 f(x)\,dx$ absolútne konverguje k nule. Pretože funkcia f je nezáporná, pre pravé súčty máme nasledujúci odhad:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = n. \tag{5}$$

Odtiaľ vyplýva, že limita pravých súčtov je ∞.

Všimnime si, že funkcia f je nespojitá v bodoch množiny A. Ukážeme, že istou modifikáciou tejto funkcie možno dosiahnuť, že výsledná funkcia bude naviac spojitá na intervale $(0,1\rangle$. K tomuto účelu je potrebné každý bod $x = \frac{1}{n}$ množiny A obaliť intervalom $\langle a_n, b_n\rangle = \langle \frac{1}{n} - \delta_n, \frac{1}{n} + \delta_n\rangle$ tak, aby tieto intervaly boli po dvoch disjunktné. Funkciu f potom definujeme tak, aby zostala zachovaná vlastnosť $f(x) = n^2$ pre každé $x = \frac{1}{n} \in A$ a aby platilo $f(x) = 0$ pre každé reálne číslo x, ktoré neleží v žiadnom z intervalov $\langle a_n, b_n\rangle$. Spojitosť zabezpečíme najjednoduchšie tak, že funkcia f bude lineárna na intervaloch tvaru $\langle a_n, \frac{1}{n}\rangle$, $\langle \frac{1}{n}, b_n\rangle$. Môžeme to urobiť prostredníctvom pomocnej funkcie g, ktorá má nasledujúce vlastnosti:

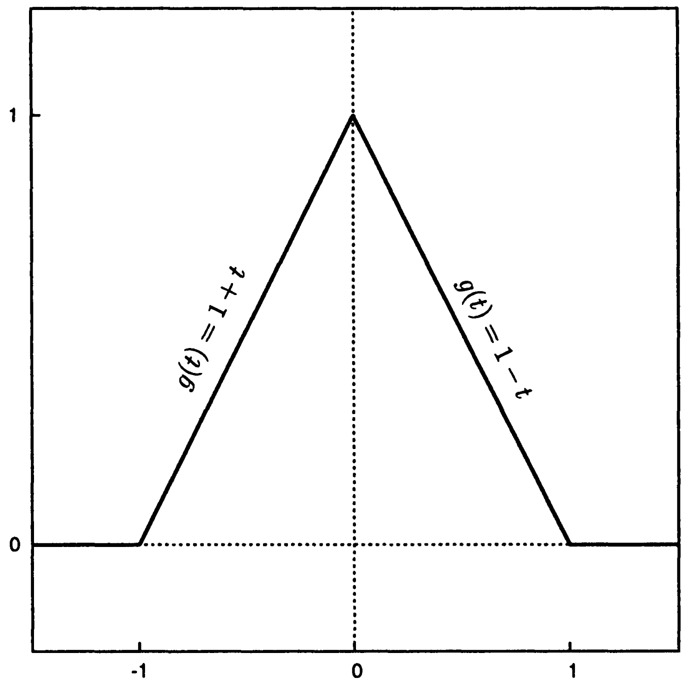
a) $g(t) = 0$ pre každé reálne číslo t s vlastnosťou $|t| \geq 1$,

b) $g(0) = 1$,

c) g je lineárna na každom z intervalov $\langle -1,0\rangle$, $\langle 0,1\rangle$.

---

[3] Zmienka o tom v prácach [6] a [12] chýba.



Obr. 1: Graf pomocnej funkcie g.

Ľahko sa overí, že platí

$$g(t)=\begin{cases}0 & \text{ak } t\le -1,\\ 1+t & \text{ak } -1\le t\le 0,\\ 1-t & \text{ak } 0\le t\le 1,\\ 0 & \text{ak } t\ge 1.\end{cases}$$

Funkciu g možno elegantne vyjadriť pomocou absolútnej hodnoty (pozri [4]) predpisom $g(t)=\frac{1}{2}(1-|t|+|1-|t||)$, pre každé reálne číslo t.

Pre každé prirodzené číslo n definujme funkciu f_n predpisom

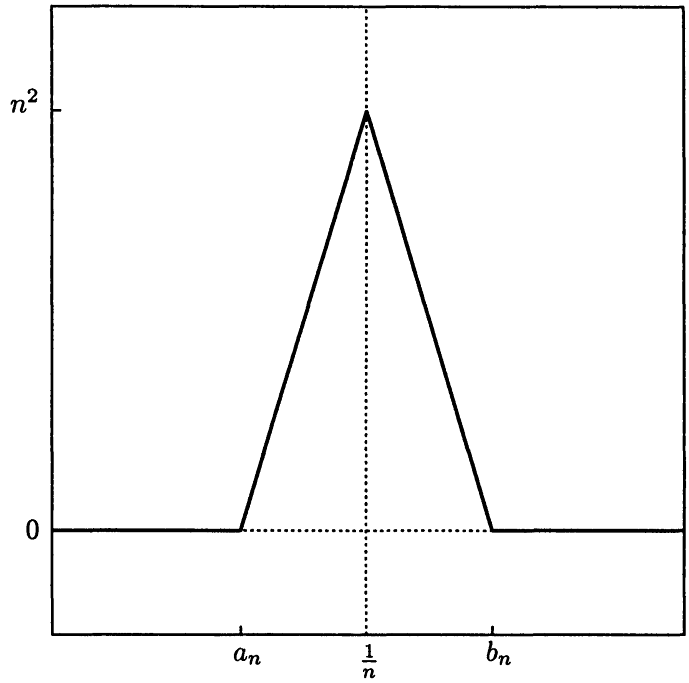
$$f_n(x)=n^2 g\left(\frac{1}{\delta_n}\left(x-\frac{1}{n}\right)\right)$$

pre každé reálne číslo x. Z vyššie uvedených vlastností funkcie g vyplýva, že pre funkciu f_n platí:

a) $f_n(x)=0$ pre každé reálne číslo x s vlastnosťou $\left|x-\dfrac{1}{n}\right|\ge\delta_n$,

b) $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=n^2$,

c) f_n je lineárna na každom z intervalov $\langle a_n,\frac{1}{n}\rangle$, $\langle\frac{1}{n},b_n\rangle$.



Obr. 2: Graf funkcie f_n.

Položme $\delta_n = \frac{1}{n^4}$. Tým zabezpečíme, že intervaly $\langle a_n, b_n \rangle$ sú po dvoch disjunktné. K tomu stačí overiť platnosť nerovností

$$b_{n+1} < \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)}_{\substack{\text{stred intervalu} \\ \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)}} < a_n$$

pre každé prirodzené $n > 1$. Na to však stačí stredoškolská matematika.

Funkciu f definujeme predpisom

$$f(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{ak } a_n \leq x \leq b_n, \text{ kde } n \in \mathbb{N}, n > 1, \\ 0, & \text{pre ostatné reálne čísla } x. \end{cases}$$

Z konštrukcie funkcie f vyplýva, že je spojitá na intervale $\langle 0, 1 \rangle$. Pretože každá funkcia f_n nadobúda hodnotu nula mimo intervalu $\langle a_n, b_n \rangle$, pričom intervaly $\langle a_n, b_n \rangle$ sú po dvoch disjunktné, funkciu f môžeme vyjadriť v tvare

$$f = \sum_{n=2}^{\infty} f_n.$$

Potom integrál funkcie f bude sa bude rovnať súčtu radu $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, ktorý konverguje. Pretože vlastnosť (5) zostala zachovaná, limita pravých súčtov je ∞. Tým sme ukázali, že nevlastný Riemannov integrál $\int_0^1 f(x)\,dx$ sa nerovná limite pravých súčtov.

Tieto príklady ukazujú, že argumentáciu v (4) musíme doplniť. Našťastie existujú jednoduché postačujúce podmienky (napr. monotónnosť) za ktorých sa nevlastný integrál rovná limite svojich pravých súčtov. Napríklad [10] str. 589, [13] str. 53, dokonca v učebnici [5] str. 615 je tejto problematike venovaná celá kapitola. Takže našu argumentáciu pre rovnosť (4) môžeme doplniť napr. takto: Pretože ide o pravý integrálny súčet a pretože funkcia $y = -\ln x$ je klesajúca, platí (4). Na záver uvedieme niekoľko úloh[4] na precvičovanie:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{0}{n}\right)^3 + \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^3\right]$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}\right)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1}\right)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5n^2+1} + \frac{1}{5n^2+2} + \cdots + \frac{1}{6n^2}\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\ln\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} + \ln\sqrt[n]{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \ln\sqrt[n]{1+\frac{n}{n}}\right)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3}{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{4}{n+4k}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

---

[4]) Zaujímavé úlohy možno nájsť aj v práci [7].

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3kn}}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(\frac{2k}{n}+1\right)^3$

Literatúra

[1] Bear, H. S.: *A Primer of Lebesgue Integration*, Academic Press 2002.

[2] Brannan, D. A.: *A First Course in Mathematical Analysis*, Cambridge University Press 2006.

[3] Bressoud, D.: *A Radical Approach to Real Analysis*, The Mathematical Association of America, 2007.

[4] Doboš, J.: *Lomená čiara*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky **36**(4) (2007), 31–34.

[5] Фихтенгольц, Г. М.: *Курс дифференциального и интегрального исчисления, Том 2* Наука, Москва 1966.

[6] Goel, S. K. and Rodriguez, D. M.: *A note on evaluating limits using Riemann sums*, Mathematics Magazine **60** (1987), 225–228.

[7] Körtesi, P.: *Some applications of integral sums*, Creative Math. **12** (2003), 1–5.

[8] Kovács, G.: *Improper integrals and Riemann sums*, Creative Math. **12** (2003), 7–10.

[9] Kuttler, K.: *Calculus, Applications and Theory* 2008
`http://www.math.byu.edu/~klkuttle/calcbookB.pdf`

[10] Ляшко, И. И. и др.: *Справочное пособие по математическому анализу, ч. 1*, Вища школа, Киев 1978.

[11] Mattuck, A.: *Introduction to Analysis*, Prentice Hall, Inc. 1999.

[12] Mumma, Ch. C. II: *N! and The Root Test*, Amer. Math. Monthly **93** (1986), 561.

[13] Pólya, G. and Szegő, G.: *Problems and Theorems in Analysis I*, Springer-Verlag 1998.

Adresa autora:
Ústav matematických vied, PF UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice
e-mail: `jozef.dobos@upjs.sk`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: pvrabel@ukf.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

Objednávky a predplatné vybavuje
Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
1/2009 ročník 38

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným prispením
Ministerstva školstva Slovenskej republiky

Všetky príspevky prešli odbornou recenziou

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981

OBSAH

CONTENTS