# OBZORY

3/2005(34)

# MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

# OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2005 ročník 34

## HORIZONS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCES 3/2005 Volume 34

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2005 (34)

# Poznámka o spojitosti

## Jozef Doboš

**Abstract:** In this paper an alternative approach to study of the notions of continuity and uniform continuity of real functions is presented.

Naši študenti, ktorí sa uchádzajú o vysokoškolské štúdium v USA, musia okrem TOEFL absolvovať aj SAT (Scholastic Assessment Test). Podrobnejšie informácie o testoch z matematiky môžeme získať napr. z publikácií [11] a [12], ktoré slúžia na samostatnú prípravu študentov.

Nasledujúca úloha je zo vzorových testov pre školský rok 2004/2005, ktoré boli zverejnené v informačnom bulletine organizácie CollegeBoard.

**Úloha 1**

If $f(x) = x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 4$, for how many real numbers $k$ does $f(k) = 2$ ?
(A) None (B) One (C) Two (D) Three (E) Four.

*Riešenie:* Úlohou je zistiť počet reálnych koreňov rovnice[1)]

$$k^4 - 3k^3 - 9k^2 + 4 = 2.$$

Podľa Bolzanovej vety (pozri napr. [13]) každá reálna funkcia $f$ reálnej premennej, ktorá je spojitá v uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$, nadobúda vo vnútri tohto intervalu všetky hodnoty medzi $f(a)$ a $f(b)$.

Vypočítame niekoľko hodnôt funkcie $f$ a zapíšeme ich do tabuľky:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ |
| $8$ | $-1$ | $4$ | $-7$ | $-40$ | $-77$ | $-76$ | $29$ |

Pretože $f(-2) = 8 > 2 > -1 = f(-1)$, podľa Bolzanovej vety funkcia $f$ nadobúda hodnotu 2 v intervale $(-2, -1)$, t. j. existuje $k_1 \in (-2, -1)$ také, že $f(k_1) = 2$.

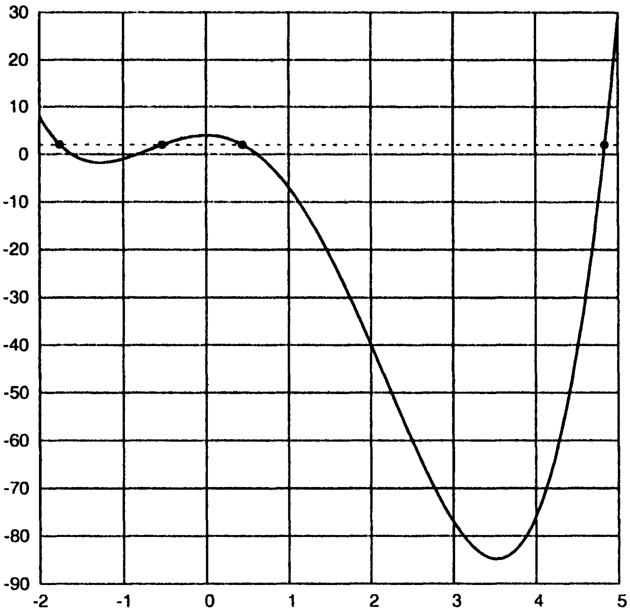
[1)] Algebraická rovnica štvrtého stupňa má najviac štyri korene v obore komplexných čísel, reálnych koreňov teda nemôže mať viac.

Pretože $f(-1) = -1 < 2 < 4 = f(0)$, podľa Bolzanovej vety funkcia $f$ nadobúda hodnotu 2

v intervale $(-1,0)$, t. j. existuje $k_2 \in (-1,0)$ také, že $f(k_2) = 2$.

Pretože $f(0) = 4 > 2 > -7 = f(1)$, podľa Bolzanovej vety funkcia $f$ nadobúda hodnotu 2 v intervale $(0,1)$, t. j. existuje $k_3 \in (0,1)$ také, že $f(k_3) = 2$.

Pretože $f(4) = -76 < 2 < 29 = f(5)$, podľa Bolzanovej vety funkcia $f$ nadobúda hodnotu 2 v intervale $(4,5)$, t. j. existuje $k_4 \in (4,5)$ také, že $f(k_4) = 2$.




*Obr. 1*

K tomu istému poznatku môžeme dospieť aj z grafu funkcie $f$. Ako vidíme na obr. 1, tento graf pretína priamku $y = 2$ v štyroch bodoch.

*Záver:* Rovnica $f(k) = 2$ má štyri reálne korene.

Ak rovnica nie je algebraická, na určenie počtu koreňov nemáme žiadnu jednoduchú metódu.

**Úloha 2.** (Pozri [14].)

Zistite počet reálnych koreňov rovnice $3^x = x^3$.

Nie je problém zistiť, že číslo $x = 3$ je koreňom danej rovnice.
Položme $f(x) = 3^x - x^3$. Zrejme platí $f(2) = 3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1 > 0$. Nasledujúce

ekvivalentné úpravy nás presvedčia o tom, že $f(\frac{5}{2}) < 0$.

$$
\begin{aligned}
3^{\frac{5}{2}} - \left(\frac{5}{2}\right)^3 &< 0 \\
3^{\frac{5}{2}} &< \left(\frac{5}{2}\right)^3 \\
3^5 &< \left(\frac{5}{2}\right)^6 \\
3^5 \cdot 2^6 &< 5^6 \\
15\,552 &< 15\,625.
\end{aligned}
$$

Pretože funkcia $y = f(x)$ je spojitá, podľa Bolzanovej vety medzi číslami 2 a $\frac{5}{2}$ musí ležať aspoň jeden koreň rovnice $f(x) = 0$.

Tým sme overili, že daná rovnica má aspoň dva reálne korene – jedným je číslo $x = 3$, druhý leží v intervale $(2, \frac{5}{2})$. Ukážeme, že ďalšie korene nemá.

Daná rovnica nemôže mať záporné korene. Skutočne, pre $x < 0$ je ľavá strana danej rovnice kladná, ale pravá strana je záporná.

Číslo $x = 0$ zrejme tiež nie je jej koreňom.

Pre $x > 0$ môžeme danú rovnicu upraviť do ekvivalentného tvaru:

$$x \cdot \ln 3 = 3 \cdot \ln x.$$

Položme $g(x) = x \cdot \ln 3 - 3 \cdot \ln x$. Potom platí:

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \ln 3 - \frac{3}{x}, \\
g''(x) &= \frac{3}{x^2}.
\end{aligned}
$$

Pretože pre každé $x > 0$ platí $g''(x) > 0$, funkcia $y = g'(x)$ je rastúca. Položme

$$x_0 = \frac{3}{\ln 3}.$$

Pretože $g'(x_0) = 0$, pre každé $x > 0$ platí:

1) ak $x \in (0, x_0)$, potom $g'(x) < 0$,
2) ak $x \in (x_0, \infty)$, potom $g'(x) > 0$.

Funkcia $y = g(x)$ je teda na intervale $(0, x_0\rangle$ klesajúca a na intervale $\langle x_0, \infty)$ je rastúca.

Tým sme ukázali, že na každom z týchto dvoch intervalov môže mať rovnica $g(x) = 0$ najviac jeden reálny koreň. Teda rovnica $g(x) = 0$ nemôže mať viac ako dva reálne korene na intervale $(0, \infty)$.

*Záver:* Daná rovnica má práve dva reálne korene: jedným je číslo $x = 3$, druhý leží v intervale $(2, \frac{5}{2})$.

*Poznámka:* Ukážeme, že rovnica $3^x = x^3$ nemá racionálny koreň v intervale $(0,3)$. Sporom. Predpokladajme, že $x = \dfrac{p}{q} \in (0,3)$ je jej racionálny koreň, pričom je zapísaný v základnom tvare (t. j. v zlomku $\dfrac{p}{q}$ už nie je možné krátiť). Potom platí $0 < p < 3q$. Po dosadení do rovnice dostávame:

$$
\begin{aligned}
3^{\frac{p}{q}} &= \left(\frac{p}{q}\right)^3 \\
3^p &= \left(\frac{p}{q}\right)^{3q} \\
3^p \cdot q^{3q} &= p^{3q}.
\end{aligned}
$$

Ľavá strana je deliteľná tromi, preto aj pravá strana musí byť deliteľná tromi. Pretože číslo tri je prvočíslo, číslo $p$ musí byť deliteľné tromi. Teda $p = 3r$, kde $r$ je prirodzené číslo. Pretože $0 < p < 3q$, po dosadení máme $0 < 3r < 3q$, teda $r < q$.

Potom

$$
\begin{aligned}
3^{3r} \cdot q^{3q} &= (3r)^{3q} \\
3^{3r} \cdot q^{3q} &= 3^{3q} \cdot r^{3q} \\
q^{3q} &= 3^{3q-3r} \cdot r^{3q} \\
q^{3q} &= 3^{3(q-r)} \cdot r^{3q}.
\end{aligned}
$$

Pretože $q - r > 0$, pravá strana je deliteľná tromi. Preto aj ľavá strana musí byť deliteľná tromi. Pretože číslo tri je prvočíslo, číslo $q$ musí byť deliteľné tromi.

Podarilo sa nám ukázať, že obidve čísla $p$, $q$ sú deliteľné tromi, čo je v spore s predpokladom, že zlomok $\dfrac{p}{q}$ je v základnom tvare.

Jeden z koreňov rovnice $3^x = x^3$ je teda iracionálny. Pomocou výpočtovej techniky môžeme nájsť jeho približnú hodnotu $x \doteq 2{,}478\,052\,680\,288\,302$.

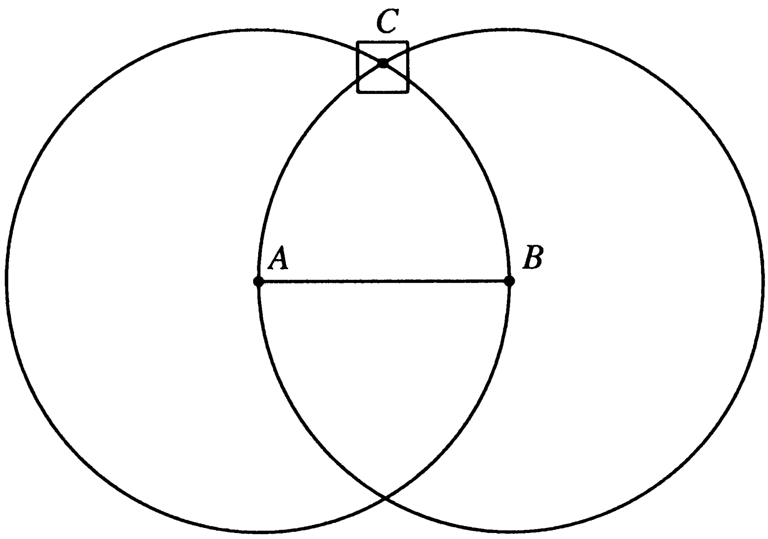
*Poznámka:* Podobne aj počet koreňov rovnice $a^x = \log_a x$ môže byť pre študentov prekvapujúci. Napríklad pre $a = \frac{1}{16}$ má táto rovnica tri reálne korene. Z toho dva sú racionálne $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ a tretí je iracionálny, pričom leží medzi $x_1$ a $x_2$. Podrobné riešenie tejto úlohy je uvedené v knihe [3].

Pri riešení predchádzajúcich úloh sme podstatným spôsobom využívali spojitosť. Pozrime sa teda na spojitosť podrobnejšie.

S pojmom spojitosti sa stretávame už v staroveku. Je tesne spojený s otázkami o stavbe hmoty, ktoré boli v tej dobe v centre záujmu učencov. Napr. Aristoteles vysvetľoval podstatu spojitosti nasledujúcim spôsobom: *„Spojitosť je to, čo v procese pohybu neprejavuje prerušenia, spojitosť je absolútne spojenie nasledujúceho s predchádzajúcim.“*

Pri zrode pojmu spojitej funkcie stáli intuitívne predstavy o nepretržitej čiare. Túto vlastnosť majú čiary, ktoré môžeme opísať pohybom bodu. V starovekom Grécku to boli predovšetkým najjednoduchšie čiary: úsečky a kružnice.

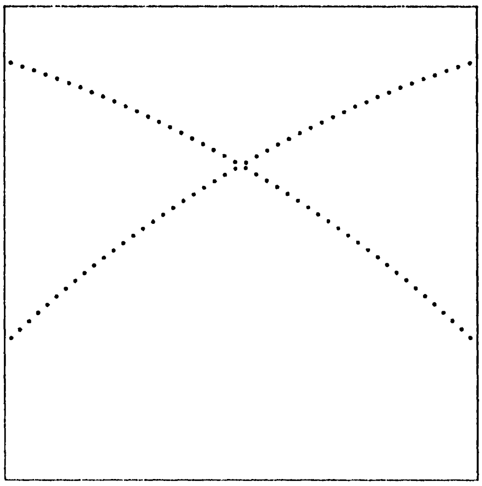
V Euklidových „Základoch“ sa skúma úloha o zostrojení rovnostranného trojuholníka nad úsečkou $AB$ (obr. 2).




*Obr. 2*

*Riešenie:* Zostrojíme kružnicu so stredom v bode $A$ a polomerom $|AB|$. Zostrojíme kružnicu so stredom v bode $B$ a polomerom $|AB|$. Bod $C$, v ktorom sa tieto kružnice pretínajú, spojíme s bodmi $A$ a $B$ úsečkami $CA$ a $CB$. Trojuholník $ABC$ bude hľadaný trojuholník [4, str. 38].

Tvrdenie, že kružnice sa pretínajú, je založené na ich spojitosti. Nebolo by to možné, ak by kružnice pozostávali z diskrétnych bodov. Vizuálnu predstavu o takejto situácii si môžeme vytvoriť podľa obr. 3, kde vidíme zväčšený výrez z obr. 2. Skutočne, tieto dve kružnice, ktoré pozostávajú z diskrétnych bodov, sa nepretínajú. V Euklidovských konštrukciách však body vznikajú ako priesečníky úsečiek a kružníc. Z tohto dôvodu musíme predstavu kružnice, ktorá pozostáva z diskrétnych bodov, zamietnuť.



*Obr. 3*

V učebniciach sa nie vždy dostatočne zdôrazňuje, že naše obrázky sú iba prostriedkom, ktorý nám umožňuje nahliadnuť do geometrického sveta [9, str. 17]. V tomto by sme si mohli vziať príklad z kvalitných učebníc, ktoré sa v minulosti u nás používali. Ukážku nám poskytuje kniha [1], z ktorej si dovolím odcitovať:

> *Línia má len jeden rozmer (dĺžku), ale nemá hrúbky. Preto nie je viditeľná. Označujeme ju teda spôsobom viditeľným, totiž telesom, u ktorého prevláda najmä jeden rozmer. Pri rysovaní obrazom línie je uzučký pruh barvidla (kriedy, tuhy, atramentu a pod.), nanesený na nákresňu. Obraz tento menujeme čiarou.*
>
> *Línia (čiara) vznikne, keď sa bod pohybuje a necháva po sebe stopu.*
>
> *(Príklady: blesk, padajúce hviezdy, rakety pri ohňostrojoch atď.)*

Budovanie matematického aparátu pre skúmanie pohybu spadá do XVI.–XVII. storočia. Pojem pohybu (a s ním zviazaný pojem spojitosti) stál pri zrode infinitezimálneho počtu. Jeho budovanie bolo sprevádzané skúmaním veľkého počtu špeciálnych kriviek. V tomto období do matematiky vstúpili Cassiniho krivky, Descartov list, lemniskáta, kardioida, strofoida, cykloidy a veľa ďalších kriviek. Z goniometrických kriviek bola ako prvá skúmaná sínusoida. Pomocou pohybu bola tiež získaná logaritmická krivka. Základným nástrojom pre skúmanie čiar sa stáva rovnica. Podľa Leibniza treba v matematike dovoliť všetky čiary, ktoré sa dajú vyjadriť pomocou rovníc.

Hlavnou úlohou matematickej analýzy v XVIII. storočí bolo skúmanie elementárnych funkcií na základe ich rovníc. Avšak na začiatku XIX. storočia sa funkcie skúmali prostredníctvom ich rozkladu podľa Taylorovej formuly. Niekde tu sa zrodila myšlienka skúmať všeobecnejší pojem funkcie ako závislosti premenných veličín.

V roku 1817 prišiel Bernard Bolzano so svojou definíciou spojitej funkcie v práci: *„Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewährten, wenigstens einer reele Wurzel der Gleichung liege"*. Práca podáva dôkaz vety, že funkcia $f$, ktorá je spojitá v uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$, nadobúda vo vnútri tohto intervalu všetky hodnoty medzi $f(a)$ a $f(b)$. Bolzanov pojem spojitosti je totožný s dnešným pojmom a je taký istý ako ten, ktorý používa Cauchy vo svojom diele *Course d'Analyse* (1821).

V XIX. storočí boli zostrojené spojité funkcie, ktoré nemajú deriváciu v žiadnom bode. Teda definícia spojitej funkcie neodráža názorné predstavy o spojitej čiare, opísanej pomocou pohybu. Napriek tomu však umožňuje dokázať základný princíp: *Spojitá funkcia pri prechode od kladnej hodnoty k zápornej nadobúda nulovú hodnotu.* Na základe tejto skutočnosti sa podarilo dosiahnuť hlboké a užitočné výsledky.

Ťažkosti pri vyučovaní pojmu spojitosti pramenia z kvantifikátorov, konkrétne z následnosti kvantifikátorov rôzneho typu. (Pozri [5], str. 112.) Skutočne, spojitosť funkcie $f$ znamená:

*Malým zmenám veličiny $x$ odpovedajú malé zmeny veličiny $f(x)$.*

Pritom prvé slovo *„malým"* skrýva v sebe všeobecný kvantifikátor a druhé slovo *„malým"* skrýva v sebe existenčný kvantifikátor.

Pritom slová „malým" a „malé" skrývajú v sebe existenčný, resp. všeobecný kvantifikátor. To sa nedá odhaliť zo slovnej formulácie. Aby sme to mohli pochopiť, musíme previesť logickú analýzu.

V ďalšej časti sa zameriame na alternatívny spôsob definovania spojitosti. Pod spojitosťou funkcie v bode $x_0$ sa rozumie skutočnosť, že bodom $x$ ležiacim blízko bodu $x_0$ sú priradené body $f(x)$ ležiace blízko bodu $f(x_0)$.

Na vyjadrenie blízkosti potrebujeme vedieť merať vzdialenosť. Začneme vzdialenosťou bodov na reálnej osi. K jej meraniu použijeme absolútnu hodnotu. Totiž vzdialenosť bodu $x$ od bodu $t$ vypočítame ako číslo $|x-t|$. Skutočne, ak $x \geqq t$, potom ich vzdialenosť je vyjadrená číslom $x-t$. Naproti tomu, ak $x < t$, potom ich vzdialenosť je vyjadrená číslom $t-x$. A tieto dve situácie sa dajú spojiť do jednej práve pomocou absolútnej hodnoty.

Teraz si vysvetlíme, ktoré množiny sú blízke danému bodu. Najskôr ošetríme triviálny prípad. Ak nejaká množina $T$ obsahuje daný bod $t_0$, potom prehlásime, že je tomuto bodu blízka. V ďalšom budeme predpokladať, že množina $T$ neobsahuje bod $t_0$. Zamyslime sa nad nasledujúcou situáciou. Otvorený interval síce neobsahuje svoje krajné body, ale obsahuje body, ktoré ležia k nim ľubovoľne blízko. Iný vhodný ilustračný príklad poskytuje množina $T$ prevrátených hodnôt všetkých prirodzených čísel (symbolicky ju môžeme zapísať v tvare $T = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$), ktorá je blízka bodu $t_0 = 0$. Matematicky precízne vyjadrenie pojmu „blízko" dáva nasledujúca formulácia:

*Ak vezmeme ľubovoľne malé kladné reálne číslo $r$, v množine $T$ je možné nájsť taký bod $t$, ktorého vzdialenosť od bodu $t_0$ je menšia ako $r$.*

Pomocou kvantifikátorov to môžeme vyjadriť nasledujúcim spôsobom:

*Množina $T \neq \emptyset$ je blízka danému bodu $t_0$, ak*

$$\forall\, r > 0\ \exists\, t \in T : |t - t_0| < r.$$

V topologickej terminológii to znamená, že bod $t_0$ patrí do uzáveru množiny $T$.

Funkcia $f$ priradí každému číslu $s$ z jej definičného oboru číslo $f(s)$. Toto priraďovanie môžeme rozšíriť aj na množiny čísel. Predpokladajme, že množina $T$ je časťou definičného oboru funkcie $f$. Funkcia $f$ priradí množine $T$ množinu

$$f[T] = \{f(t);\ t \in T\}.$$

Teraz už máme vybudované všetky nástroje potrebné k vysloveniu korektnej definícii spojitosti.

*Hovoríme, že funkcia $f$ je spojitá v bode $x_0$, ak pre ľubovoľnú neprázdnu množinu $M$, ktorá je časťou definičného oboru funkcie $f$, platí:*

*Ak množina $M$ je blízka bodu $x_0$, potom množina $f[M]$ je blízka bodu $f(x_0)$.*

Poznamenajme, že táto definícia spojitosti funkcie je ekvivalentná s definíciami bežne používanými v učebniciach.

Zo spojitosti sa odvodzujú iné dôležité vlastnosti funkcií, napríklad integrovateľnosť. Aby sme dokázali, že spojitá funkcia je integrovateľná, k tomu najskôr potrebujeme dokázať, že spojitá funkcia je na uzavretom intervale rovnomerne spojitá. Z tohto dôvodu by bolo rozumnejšie najskôr definovať pojem rovnomernej spojitosti (pozri [5], str. 111).

V práci [2] sa definuje rovnomerná spojitosť nasledujúcim spôsobom:

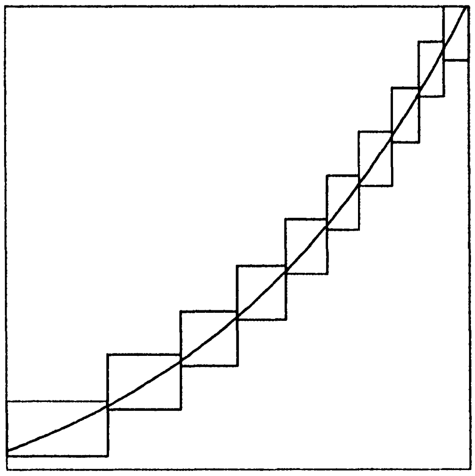
*Funkcia $f$ je rovnomerne spojitá na intervale $I$, ak pre každú dvojicu neprázdnych množín $A, B \imath I$ platí: Ak množiny $A$ a $B$ sú si blízke, potom aj množiny $f[A]$ a $f[B]$ sú si blízke.*

Zostáva nám ešte vysvetliť, kedy sú si dve neprázdne množiny blízke. Množiny $U$ a $V$ sú si blízke, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existujú body $u \in U$, $v \in V$ také, že $|u - v| < \varepsilon$.

Na záver si ukážeme odlišný prístup, ktorý navrhol M. Lynch v [8]:

*Funkcia $f$ je rovnomerne spojitá na intervale $I$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje konečne veľa obdĺžnikov postupne sa dotýkajúcich svojimi vertikálnymi stranami, ktoré pokrývajú graf funkcie $f$, pričom každý z týchto obdĺžnikov má výšku*[2] *menšiu ako číslo $\varepsilon$.*

Vizuálnu predstavu o takomto pokrývaní poskytuje obr. 4.



*Obr. 4*

## Literatúra


[1] Buzek, K. – Sivák, J. *Meroveda a rysovanie pre meštianske školy I.* Nákladom Československej grafickej Unie úč. spol. Praha–Prešov 1934.

[2] Cleveland, R. *A global characterization of uniform continuity,* Amer. Math. Monthly **80** (1973), 64–66.

[3] Doboš, J. *Rovnice a nerovnice* Bolchazy-Carducci Publishers, Inc. Wauconda, Illinois, USA, 2003, ISBN 0-86516-558-0.

[4] Дорофеева, А. В. *Формирование понятия непрерывной функции,* История и методология естественных наук, выпуск *ШИ,* Математика, механика (Редакторы тома: И. Г. Башмакова, И. А. Тюлина), *Издательство Московского Университета Москва 1971, 37–50.*

[5] Фройденталь, Г. *Математика как педагогическая задача, часть 2,* Просвещение Москва 1983.

[6] Fulier, J. *Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy,* Fakulta prírodných vied UKF v Nitre 2001, ISBN 80-8050-418-0.

[7] Jarník, V. *Bolzano a základy matematické analýzy,* Jednota československých matematiků a fyziků, Praha 1981.

[8] Lynch, M. *Advanced Calculus Reform: Continuity and Integration,* Int. J. Math. Ed. Sci. Technol. 25 (1994), 563–571.

[9] Vopěnka, P. *Rozpravy s geometrií,* Panorama Praha 1989, ISBN 80-7038-031-4.

[10] `http://www.collegeboard.com/student/testing/sat/about.html`


---

[2] t. j. dĺžku vertikálnej strany

[11] Leff, L. S. *Barron's Math Workbook for the SAT*I,* Barron's Educational Series, Inc., New York 2000, ISBN 0-7641-0768-2.
[12] SparkNotes$^{TM}$ *5 Praktice Tests for the SAT II Math IC,* Spark Publishing, New York,r 2003, ISBN 1-58663-868-8.
[13] Rychlík, K. *Úvod do analytické theorie mnohočlenů s reálnými koeficienty,* Nakladatelství ČSAV, Praha 1957.
[14] Печерский, Л. Б. „$n^x = x^n$", Квант (1983) 31.

Adresa autora: Katedra aplikovanej matematiky SjF TU, Letná 9, Košice
e-mail: `Jozef.Dobos@tuke.sk`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

## Adresa redakcie

**Matematická a informatická časť**
Katedra matematiky FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: pvrabel@ukf.sk)

**Fyzikálna časť**
Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

**Objednávky a predplatné vybavuje**
Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra

## OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
## 3/2005 ročník 34

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným prispením
Ministerstva školstva Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Beloslav Riečan, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Peter Vrábel, Aba Teleki
Technická a grafická úprava: Mária Benešová, Vladimír Kutnár
Všetky príspevky prešli odbornou recenziou

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č. j. 3015/2003-OLB zo dňa 1. 10. 2003

ISSN 1335-4981

# OBSAH



# FROM CONTENTS