OBZORY

4/2004(33)

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2004(33)

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2004 (33)

Periodické funkcie

Jozef Doboš

Abstract: In this paper an elementary approach to periodic functions is presented.

Pre študentov, ktorí sa uchádzajú o vysokoškolské štúdium, vydávajú univerzity rôzne zbierky úloh z matematiky, ktoré im majú pomôcť pri príprave na prijímacie skúšky. Pravidelne sa v nich objavujú úlohy o periodických funkciách. A to aj napriek tomu, že ich korektné riešenia sú často za hranicami školskej matematiky.

Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je *periodická*, ak existuje taká kladná konštanta p, že pre každé $x \in D(f)$ platí[1]:

1) $x - p \in D(f), x + p \in D(f)$;
2) $f(x+p) = f(x)$.

Konštantu p voláme *perióda* funkcie $y = f(x)$. Najmenšie také p (pokiaľ existuje) sa volá *základná perióda* funkcie $y = f(x)$. Napríklad konštantná funkcia je periodická, ale nemá základnú periódu.

Úloha 1

Dokážte, že funkcia $y = \mathrm{tg}(x + \sin x)$ je periodická.

Riešenie. Funkcia sínus má periódu $p = 2\pi$. Ukážeme, že číslo $p = 2\pi$ je periódou funkcie $y = \mathrm{tg}(x + \sin x)$. Definičným oborom danej funkcie je množina

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ \forall k \in \mathbb{Z}:\ x + \sin x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}.$$

Nech x je ľubovoľné reálne číslo. Ak existuje také celé číslo k, že platí

$$x + 2\pi + \sin(x + 2\pi) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ resp. } x - 2\pi + \sin(x - 2\pi) = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

potom

$$x + \sin x = \frac{\pi}{2} + (k-2)\pi, \text{ resp. } x + \sin x = \frac{\pi}{2} + (k+2)\pi.$$

[1] Symbolom $D(f)$ označujeme definičný obor funkcie $y = f(x)$.

Tým sme ukázali, že pre každé reálne číslo x platí

$$x \pm 2\pi \notin D(f) \Rightarrow x \notin D(f).$$

Odtiaľ vyplýva, že množina $D(f)$ spĺňa podmienku 1).

Pretože číslo $p = 2\pi$ je spoločnou periódou funkcií sínus a tangens, pre každé $x \in D(f)$ platí

$$\operatorname{tg}(x + 2\pi + \sin(x + 2\pi)) = \operatorname{tg}(x + 2\pi + \sin x) = \operatorname{tg}(x + \sin x).$$

Odtiaľ vyplýva, že daná funkcia spĺňa podmienku 2).

Úloha 2

Nájdite základnú periódu funkcie $y = \operatorname{tg}(x + \sin x)$.

Riešenie. Nech $p > 0$ je perióda danej funkcie. Pretože pre každé $x \in D(f)$ platí

$$\operatorname{tg}(x + p + \sin(x + p)) = \operatorname{tg}(x + \sin x),$$

pre $x = 0$ máme

$$\operatorname{tg}(p + \sin p) = 0.$$

Teda existuje také celé číslo k, pre ktoré platí $p + \sin p = k\pi$. Potom

$$\sin p = k\pi - p. \tag{1}$$

Rozlíšime dva prípady.

a) Predpokladajme, že k je párne, t. j. že existuje také celé číslo n, že $k = 2n$. Potom

$$\sin(k\pi - p) = \sin(2n\pi - p) = -\sin p.$$

b) Predpokladajme, že k je nepárne, t. j. že existuje také celé číslo m, že $k = 2m + 1$. Potom

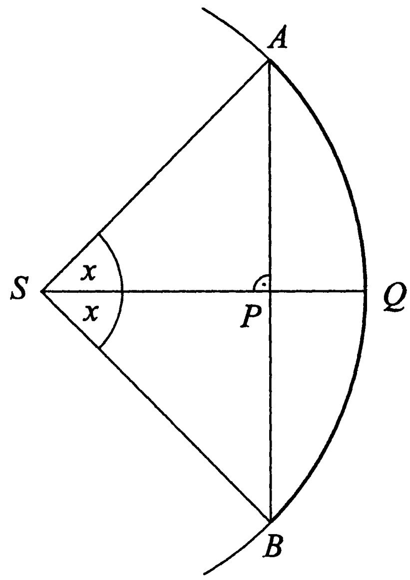
$$\sin(k\pi - p) = \sin((2m + 1)\pi - p) = \sin p.$$

V obidvoch prípadoch teda platí

$$|\sin(k\pi - p)| = |\sin p|,$$

odkiaľ podľa (1) dostávame

$$|\sin(k\pi - p)| = |k\pi - p|. \tag{2}$$



Obr. 1

Ukážeme, že rovnica

$$|\sin x| = |x| \tag{3}$$

má jediný reálny koreň $x = 0$.

Všimnime si, že ak číslo $x = x_0$ je koreňom rovnice (3), potom aj číslo $x = -x_0$ je jej koreňom. Pretože číslo $x = 0$ je zrejme koreňom rovnice (3), stačí ukázať, že rovnica (3) nemá kladné korene. Pretože pre každé reálne číslo x platí $|\sin x| \leqq 1$, prípadný kladný koreň rovnice (3) musí spĺňať podmienku $|x| \leqq 1$.

Ukážeme, že platí $-x < \sin x < x$ pre každé $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Prvá nerovnosť je zrejmá, pretože $-x < 0 < \sin x$. Dôkaz druhej nerovnosti vychádza z definície funkcie sínus. Na jednotkovej kružnici si znázorníme uhly $\angle ASQ$ a $\angle BSQ$, ktoré majú rovnakú veľkosť x (pozri obr. 1). Pretože číslo x je vyjadrením veľkosti uhla v oblúkovej miere, každý z oblúkov $\overset{\frown}{AQ}$ a $\overset{\frown}{BQ}$ má dĺžku rovnú číslu x. Z toho istého dôvodu sa dĺžky úsečiek $\overline{AP}$ a $\overline{BP}$ rovnajú číslu $\sin x$. Pretože úsečka je najkratšou spojnicou dvoch bodov, úsečka $\overline{AB}$ je kratšia ako oblúk $\overset{\frown}{AB}$, čiže $2 \sin x < 2x$. Teda pre každé $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x$.

Tým sme ukázali, že na intervale $(0, \frac{\pi}{2})$ platí $|\sin x| < |x|$. Odtiaľ vyplýva, že rovnica (3) nemá kladné korene. Pretože rovnica (2) má jediný reálny koreň $x = 0$, z (2) dostávame $k\pi - p = 0$, t. j. $p = k\pi$. Pretože $p > 0$, číslo k musí byť kladné. V predchádzajúcej úlohe sme ukázali, že číslo $p = 2\pi$ je periódou danej funkcie.

Zostáva nám preskúmať číslo $p = \pi$. Pretože platí

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \neq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right),$$

číslo π nie periódou danej funkcie. Základnou periódou je teda číslo 2π.

V ďalšom sa zameriame na funkcie, ktoré nie sú periodické. V takýchto úlohách študenti často nevedia svoj názor podložiť argumentami, a to dokonca ani v jednoduchých prípadoch.

Pri niektorých elementárnych funkciách už nie je splnená podmienka 1) z definície periodickej funkcie. Ak napríklad definičným oborom funkcie $y = f(x)$ je niektorý z intervalov (a,∞), $\langle a,\infty)$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a\rangle$, potom táto funkcia nie je periodická. Skutočne, ak by číslo $p > 0$ bolo jej periódou, potom by nastala jedna z nasledujúcich situácií:

$$x = a + \frac{p}{2} \in D(f), \text{ ale } x - p \notin D(f), \text{ resp.}$$

$$x = a - \frac{p}{2} \in D(f), \text{ ale } x + p \notin D(f).$$

Z tohto dôvodu napríklad funkcia $y = \sin\sqrt{x}$ nemôže byť periodická.

Ďalším typom funkcií, ktoré nemôžu byť periodické, sú prosté funkcie. Skutočne, pre prostú funkciu $y = f(x)$ z rovnosti $f(x+p) = f(x)$ vyplýva $x+p = x$, čiže $p = 0$. Z tohto dôvodu napríklad funkcia $y = 3^x$ nie je periodická.

Predchádzajúcu požiadavku môžeme oslabiť. Stačí napríklad predpokladať, že definičný obor funkcie $y = f(x)$ obsahuje taký interval $\langle a,\infty)$, na ktorom je funkcia $y = f(x)$ prostá. Skutočne, pre takúto funkciu z rovnosti $f(a+p) = f(a)$ vyplýva $a + p = a$, čiže $p = 0$. Z tohto dôvodu napríklad funkcia $y = |x-3| + 2$ nie je periodická.

Lema 1.

Predpokladajme, že funkcia $y = f(x)$ je ohraničená na každom uzavretom intervale[2)]. Ak je funkcia $y = f(x)$ periodická, potom je ohraničená na celom svojom definičnom obore.

Poznámka 1. Túto lemu často používame pri dokazovaní, že daná funkcia nie je periodická. Ak totiž daná funkcia je ohraničená na každom uzavretom intervale, ale pritom na celom definičnom obore nie je ohraničená, nemôže byť periodická.

[2] čiže pre každý uzavretý interval $\langle a,b\rangle$ existuje taká reálna konštanta k, že platí:

$$\text{ak } x \in \langle a,b\rangle \cap D(f), \text{ potom } |f(x)| \leqq k$$

Pretože spojité funkcie sú ohraničené na každom uzavretom intervale, ktorý celý leží v ich definičnom obore, podľa lemy 1 platí:

Veta 1.

Predpokladajme, že funkcia $y = f(x)$ je definovaná a spojitá na celom $\mathbb{R}$. Ak funkcia $y = f(x)$ nie je ohraničená, potom nemôže byť periodická.

Úloha 3.

Dokážte, že funkcia $y = x \cdot \cos(2x)$ nie je periodická.

Riešenie. Zrejme platí $D(f) = \mathbb{R}$. Ukážeme, že daná funkcia nie je ohraničená. Nech k je ľubovoľná reálna konštanta. Nech n je také prirodzené číslo, že $n\pi > k$. Potom platí $|f(n\pi)| = |n\pi \cdot \cos(2n\pi)| = n\pi > k$.

Úloha 4.

Dokážte, že funkcia $y = x \cdot \sin^2 x - x^3$ nie je periodická.

Riešenie. Zrejme platí $D(f) = \mathbb{R}$. Ukážeme, že daná funkcia nie je ohraničená. Nech k je ľubovoľná reálna konštanta. Nech n je také prirodzené číslo, že $(n\pi)^3 > k$. Potom platí $|f(n\pi)| = |n\pi \cdot \sin^2(n\pi) - (n\pi)^3| = (n\pi)^3 > k$.

Úloha 5.

Dokážte, že funkcia $y = x \cdot \sin x \cdot \sin(x^2)$ nie je periodická.

Riešenie. Ukážeme, že daná funkcia nie je ohraničená. Nech k je ľubovoľné prirodzené číslo. Položme

$$\alpha_k = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} + 2k\right)^2 - \frac{1}{4}, \quad \beta_k = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{5}{6} + 2k\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Teraz rozdelíme celú číselnú os na intervaly

$$\ldots, \ \langle -2, -1), \ \langle -1, 0), \ \langle 0, 1), \ \langle 1, 2), \ \langle 2, 3), \ \langle 3, 4), \ \ldots$$

Číslo α_k leží v jednom z týchto intervalov, teda existuje také celé číslo n, že platí $n - 1 \leqq \alpha_k < n$. Nie je ťažké overiť, že potom $n \leqq 1 + \alpha_k < \beta_k$. Odtiaľ vyplýva, že platí $\alpha_k < n < \beta_k$. Úpravou tejto nerovnosti dostávame[3)]

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

[3]Pretože $\alpha_k > 0$, číslo n je prirodzené.

Potom platí

$$f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right)=\underbrace{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\cdot}_{>\frac{\pi}{6}+2k\pi}\ \underbrace{\sin\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\cdot}_{>\frac{1}{2}}\ \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}_{=1}>\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\cdot\frac{1}{2}>k.$$

Teda podľa vety 1 daná funkcia nie je periodická.

Veta 2.

Derivácia periodickej funkcie je periodická funkcia.

Dôkaz. Stačí zderivovať rovnosť $f(x+p)=f(x)$. Dostaneme $f'(x+p)=f'(x)$.

Úloha 6.

Dokážte, že funkcia $y=\sin(x^2)$ nie je periodická.

Riešenie. Ukážeme, že funkcia $y'=2x\cdot\cos(x^2)$ nie je periodická.

Položme $f(x)=2x\cdot\cos(x^2)$. Nech k je ľubovoľná reálna konštanta. Nech n je také prirodzené číslo, že $8n\pi>k^2$. Potom platí

$$|f(\sqrt{2n\pi})|=|2\cdot\sqrt{2n\pi}\cdot\cos(2n\pi)|=2\cdot\sqrt{2n\pi}>k.$$

Tým sme ukázali, že funkcia y' nie je ohraničená. Teda podľa vety 1 funkcia y' nie je periodická. Potom z vety 2 vyplýva, že funkcia $y=\sin(x^2)$ nie je periodická.

Úloha 7.

Dokážte, že polynomická funkcia $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$ $(a_n\neq 0)$ nie je periodická.

Riešenie. Pretože funkcia $y^{(n-1)}=n!\cdot a_n\cdot x$ nie je ohraničená, podľa vety 1 nie je periodická. Potom z vety 2 vyplýva, že daná polynomická funkcia nie je periodická.

Úloha 8.

Dokážte, že funkcia $y=x\cdot\operatorname{cotg}x$ nie je periodická.

Riešenie. Sporom. Budeme vychádzať z predpokladu, že daná funkcia je periodická. Potom existuje také kladné číslo p, že pre každé reálne číslo x z definičného oboru danej funkcie platí:

$$(x+p)\cdot\operatorname{cotg}(x+p)=x\cdot\operatorname{cotg}x. \tag{4}$$

Rovnosť (4) teda platí aj pre $x = \frac{\pi}{2}$. Po dosadení dostávame:

$$\left(\frac{\pi}{2}+p\right)\cdot\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+p\right) = \underbrace{\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}}_{=0}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}+p\right)}_{>0}\cdot\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+p\right) = 0$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+p\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{2}+p = \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$p = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Pretože p je kladné reálne číslo, máme:

$$p = k\pi,\ k\in\mathbb{N}.$$

Po dosadení do (4) dostávame:

$$(x+k\pi)\cdot\underbrace{\operatorname{cotg}(x+k\pi)}_{=\operatorname{cotg}x} = x\cdot\operatorname{cotg}x$$

$$(x+k\pi)\cdot\operatorname{cotg}x = x\cdot\operatorname{cotg}x$$

$$x\cdot\operatorname{cotg}x + k\pi\cdot\operatorname{cotg}x = x\cdot\operatorname{cotg}x$$

$$k\pi\cdot\operatorname{cotg}x = 0$$

$$\operatorname{cotg}x = 0.$$

Tým sme ukázali, že pre každé reálne číslo x z definičného oboru danej funkcie platí:

$$\operatorname{cotg}x = 0.$$

Tento spor ukazuje, že daná funkcia nemôže byť periodická.

Predchádzajúcu úlohu môžeme vyriešiť aj pomocou nasledujúcej vety.

Veta 3.

Nech $y = f(x)$ je periodická funkcia. Ak funkcia $y = x\cdot f(x)$ je periodická, potom $f(x) = 0$ pre každé $x\in D(f)$.

Dôkaz. Predpokladajme, že existujú konštanty $T > 0$ a $p > 0$ také, že pre každé $x\in D(f)$ platí:

(5) $$f(x+T) = f(x),$$

(6) $$(x+p)\cdot f(x+p) = x\cdot f(x).$$

Nech $x \in D(f)$. Potom podľa (5) a (6) máme:

$$
\begin{aligned}
((x+T)+p)\cdot f((x+T)+p) &= (x+T)\cdot \underbrace{f(x+T)}_{=f(x)} = (x+T)\cdot f(x) \\
&= x\cdot f(x) + T\cdot f(x)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
((x+p)+T)\cdot \underbrace{f((x+p)+T)}_{=f(x+p)} &= ((x+p)+T)\cdot f(x+p) \\
&= \underbrace{(x+p)\cdot f(x+p)}_{=x\cdot f(x)} + T\cdot f(x+p) \\
&= x\cdot f(x) + T\cdot f(x+p)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Podľa (7) a (8) máme:

$$
\begin{aligned}
x\cdot f(x) + T\cdot f(x) &= x\cdot f(x) + T\cdot f(x+p) \\
T\cdot f(x) &= T\cdot f(x+p) \\
f(x) &= f(x+p)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Podľa (6) a (9) máme:

$$
\begin{aligned}
(x+p)\cdot \underbrace{f(x+p)}_{=f(x)} &= x\cdot f(x) \\
(x+p)\cdot f(x) &= x\cdot f(x) \\
x\cdot f(x) + p\cdot f(x) &= x\cdot f(x) \\
p\cdot f(x) &= 0 \\
f(x) &= 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Na záver sa zamyslite nad otázkou, či funkcia $y = \log(\log(\sin x))$ je periodická.

Samozrejme, ide o malý chyták.

Skúmať funkciu s prázdnym definičným oborom totiž nemá žiadny praktický význam.

Literatúra

[1] Doboš, J.: *Úlohy o periodických funkciách*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky **56** (1999), 19–24

[2] Калинин, С. И. и др.: *Задачи и упражнения по началам математического анализа.* Пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики и для внеклассных занятий математикой, «Московский Лицей», Москва 2001, ISBN 5-7611-0265-x

[3] Peller, F. – Šáner, V. – Eliáš, J. – Pinda, Ľ.: *Matematika (krok za krokom na EU)*, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2002, ISBN 80-225-1529-9.

Adresa autora:
RNDr. Jozef Doboš CSc., Katedra aplikovanej matematiky, SjF TU Košice
e-mail: `Jozef.Dobostuke.sk`, URL: `http://www.tuke.sk/dobos`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky FPV UMB, Tajovského 40, 974 01 Banská Bystrica
(e-mail: malicky@fpv.umb.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

Objednávky a predplatné vybavuje
Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
4/2004(33)

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným prispením
Ministerstva školstva Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Beloslav Riečan, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Peter Maličký, Aba Teleki
Technická a grafická úprava: Mária Benešová, Vladimír Kutnár
Všetky príspevky prešli odbornou recenziou

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981

OBSAH

FROM CONTENTS