OBZORY

1/2004(33)

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2004(33)

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

Vedeckí redaktori:

matematickej časti: Beloslav Riečan
fyzikálnej časti: Daniel Kluvanec

Výkonní redaktori:

matematickej časti: Peter Maličký
fyzikálnej časti: Aba Teleki

Redakčná rada:

Matematická a informatická časť:

Hynek Bachratý	Karel Horák	Božena Mihalíková	Robert Szelepcsényi
Viera Blahová	Vladimír Jodas	Anna Michalcová	Ladislav Topoľský
Pavol Černek	Vladimír Jodas	Gustáv Nagy	János Tóth
Jozef Doboš	Viera Kyselicová	Zdeněk Půlpán	Jan Vinař
Martin Gavalec	Marian Macko	Mária Sadloňová	Michal Winczer
Tomáš Hecht	Peter Maličký	Bohuš Sivák	Viktor Witkovský

Fyzikálna časť:

Mária Barbierová	Václav Havel	Václav Koubek	Juraj Šebesta
Michal Blaško	Árpád Kecskés	Stanislav Ondrejka	Eva Tomanová
Anna Jankovýchová	Dalibor Krupa	Anna Pribišová	Ivo Volf

Recenzenti:

Matematická a informatická časť:

Mária Benešová	Pavel Konôpka	Peter Maličký	Beloslav Riečan

Fyzikálna časť:

Ján Greguš	Daniel Kluvanec	Milan Noga	Juraj Šebesta
Árpád Kecskés	Ladislav Morvay	Mária Rakovská	Aba Teleki

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2004 (33)

Lokálne extrémy

Jozef Doboš

Abstract: In this paper an elementary approach to relative extrema of a function $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ is presented.

Reforma maturity je na spadnutie. Svedčí o tom aj publikácia [1], ktorá vyšla začiatkom roka 2004. Trochu prekvapujúco pôsobí skutočnosť, že diferenciálny počet je zastúpený jedinou úlohou. Pritom autori píšu: *jedine riešenie tejto úlohy skutočne vyžaduje použitie aparátu diferenciálneho počtu.* Položme si provokatívnu otázku, či je to skutočne tak. Nedokážeme vyriešiť túto úlohu bez použitia diferenciálneho počtu? Veď skúmaná funkcia vôbec nie je zložitá:

Úloha. (Pozri [1], str. 79, pr. 25.)

Nájdite lokálne maximum[1)] funkcie

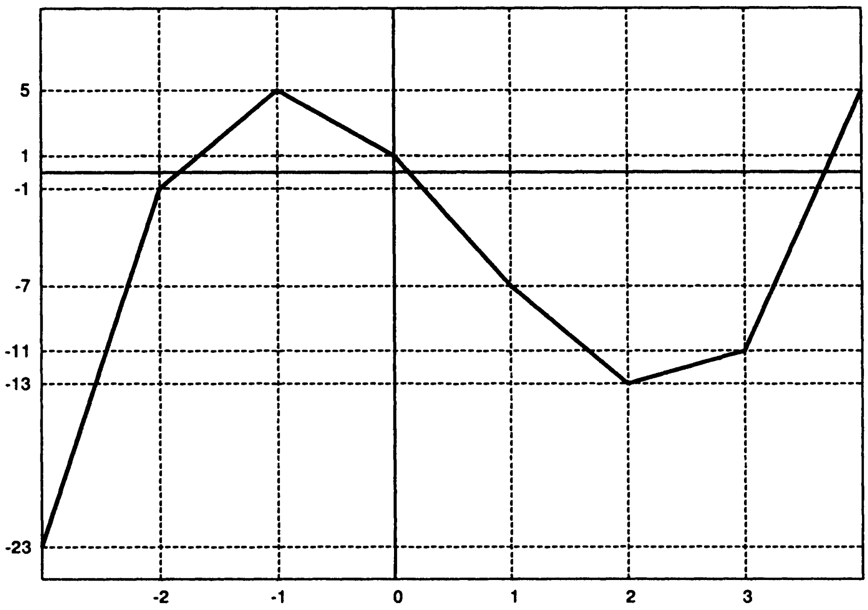
$$y = x^3 - 2x^2 - 7x + 1. \tag{1}$$

Riešenie. Aby sme získali predstavu o grafe tejto funkcie, najskôr pomocou rovnice (1) vypočítame súradnice niektorých bodov ležiacich na tomto grafe. Vypočítané hodnoty usporiadame do tabuľky:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-23	-1	5	1	-7	-13	-11	5

V pravouhlom súradnicovom systéme znázorníme tieto body grafu a spojíme ich lomenou čiarou (pozri obrázok 1), ktorá nám v hrubých rysoch naznačuje priebeh grafu danej funkcie.

[1] Funkcia $y = f(x)$ má v bode x_1 *ostré lokálne maximum*, ak existuje taký otvorený interval I, ktorý obsahuje bod x_1, pričom pre každé $x \in I$, $x \neq x_1$ platí $f(x) < f(x_1)$.



Obrázok 1

Ako vidíme na obrázku, hľadané lokálne maximum môžeme očakávať v okolí bodu $x_1 = -1$. Použijeme substitúciu $x = t + x_1$. Po dosadení $x = t - 1$ do danej funkcie máme:

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 7x + 1 &= t^3 - 3t^2 + 3t - 1 - 2t^2 + 4t - 7t + 7 + 1 \\ &= t^3 - 5t^2 + 5 = t^2 \cdot (t-5) + 5. \end{aligned}$$

Návratom v substitúcii $t = x + 1$ potom dostávame:

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 1 = t^2 \cdot (t-5) + 5 = (x+1)^2 \cdot (x-4) + 5.$$

Hľadáme teda lokálne maximum funkcie

$$f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-4) + 5. \tag{2}$$

Pre $x \neq -1$, $x < 4$ platí:

$$\left.\begin{array}{lll} x \neq -1 & \Rightarrow & (x-1)^2 > 0 \\ x < 4 & \Rightarrow & x - 4 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = \underbrace{\underbrace{(x+1)^2}_{>0} \cdot \underbrace{(x-4)}_{<0}}_{<0} + 5 < 5 = f(-1).$$

Tým sme ukázali, že pre každé $x \in (-\infty, 4)$, $x \neq -1$ platí $f(x) < f(-1)$.
Teda daná funkcia má v bode $x_1 = -1$ ostré lokálne maximum.

Pokúsme sa nájsť aj lokálne minimum[2)] danej funkcie. Budeme sa inšpirovať tvarom pravej strany vo vzorci (2), ktorý nás privádza k myšlienke vyjadriť danú funkciu nasledujúcim spôsobom:

$$x^3-2x^2-7x+1=(x+r)^2(x+s)+p.$$

Počítajme:

$$\begin{aligned}x^3-2x^2-7x+1 &= (x+r)^2(x+s)+p=(x^2+2rx+r^2)(x+s)+p\\ &= x^3+2rx^2+r^2x+sx^2+2rsx+r^2s+p\\ &= x^3+(2r+s)x^2+(r^2+2rs)x+r^2s+p.\end{aligned}$$

Porovnaním zodpovedajúcich si koeficientov pri jednotlivých mocninách premennej x dostávame nasledujúcu sústavu rovníc:

$$\begin{aligned}-2&=2r+s\\ -7&=r^2+2rs\\ 1&=r^2s+p\end{aligned}$$

Z prvej rovnice vyjadríme $s=-2-2r$. Dosadíme do druhej rovnice:

$$\begin{aligned}-7&=r^2+2r(-2-2r)\\ -7&=r^2-4r-4r^2\\ 3r^2+4r-7&=0\\ (r-1)(3r+7)&=0\end{aligned}$$

V prípade $r-1=0$ dostaneme vyjadrenie danej funkcie v tvare (2).
V prípade $3r+7=0$ dostaneme: $r=-\frac{7}{3}$, $s=-2-r=\frac{8}{3}$, $p=1-r^2s=-\frac{365}{27}$.
Teda máme:

$$f(x)=x^3-2x^2-7x+1=\left(x-\frac{7}{3}\right)^2\left(x+\frac{8}{3}\right)-\frac{365}{27}.$$

Pre $x\neq\frac{7}{3}$, $x>-\frac{8}{3}$ platí:

$$f(x)=\left(x-\frac{7}{3}\right)^2\left(x+\frac{8}{3}\right)-\frac{365}{27}>-\frac{365}{27}=f\left(\frac{7}{3}\right).$$

[2)] Funkcia $y=f(x)$ má v bode x_2 *ostré lokálne minimum*, ak existuje taký otvorený interval J, ktorý obsahuje bod x_2, pričom pre každé $x\in J$, $x\neq x_2$ platí $f(x)>f(x_2)$.

Tým sme ukázali, že daná funkcia má ostré lokálne minimum v bode $x_2 = \frac{7}{3}$.

Teraz ukážeme, že daná funkcia iné lokálne extrémy nemá. Použijeme lineárnu substitúciu $x = t + \bar{x}$, kde $\bar{x}$ je stred intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$. Vypočítame

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2) = \frac{1}{2} \cdot \left(-1 + \frac{7}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Po dosadení $x = t + \frac{2}{3}$ do danej funkcie (po úprave) dostávame

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 1 = \left(t + \frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(t + \frac{2}{3}\right)^2 - 7\left(t + \frac{2}{3}\right) + 1 = t^3 - \frac{25}{3}t - \frac{115}{27}.$$

Zo substitúcie $x = t + \frac{2}{3}$ vyjadríme $t = x - \frac{2}{3}$ a vypočítame

$$t_1 = x_1 - \frac{2}{3} = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}, \qquad t_2 = x_2 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Položme

$$g(t) = t^3 - \frac{25}{3}t - \frac{115}{27}. \tag{3}$$

Preskúmame monotónnosť tejto funkcie. Ak $u < v$, potom

$$\begin{aligned} g(v) - g(u) &= v^3 - \frac{25}{3}v - \frac{115}{27} - \left(u^3 - \frac{25}{3}u - \frac{115}{27}\right) = v^3 - u^3 - \frac{25}{3}(v-u) \\ &= (v-u)(v^2 + uv + v^2) - \frac{25}{3}(v-u) = \underbrace{(v-u)}_{>0} \cdot \left(v^2 + uv + u^2 - \frac{25}{3}\right). \end{aligned}$$

Teda o znamienku rozdielu $g(v) - g(u)$ rozhoduje znamienko výrazu $v^2 + uv + u^2 - \frac{25}{3}$.

a) Ukážeme, že funkcia (3) je na intervale $\langle t_2, \infty)$ rastúca. Nech $t_2 \leqq u < v$,

t. j. $\frac{5}{3} \leqq u < v$. Odtiaľ vyplýva, že platí $v^2 > \frac{25}{9}$, $uv \geqq \frac{25}{9}$, $u^2 \geqq \frac{25}{9}$. Teda

$$v^2 + uv + u^2 - \frac{25}{3} > \frac{25}{9} + \frac{25}{9} + \frac{25}{9} - \frac{25}{3} = 0.$$

Tým sme ukázali, že $g(v) - g(u) = \underbrace{(v-u)}_{>0} \cdot \underbrace{\left(v^2 + uv + u^2 - \frac{25}{3}\right)}_{>0} > 0$,

t. j. že $g(u) < g(v)$.

b) Ukážeme, že funkcia (3) je na intervale $\langle t_1, t_2\rangle$ klesajúca. Nech $t_1 \leqq u < v \leqq t_2$, t. j. $-\frac{5}{3} \leqq u < v \leqq \frac{5}{3}$. Odtiaľ vyplýva, že $u^2 \leqq \frac{25}{9}$, $v^2 \leqq \frac{25}{9}$. Ukážeme, že platí $uv < \frac{25}{9}$. Skutočne:

$$\left.\begin{array}{lll} u \geqq -\frac{5}{3} & \Rightarrow & u+\frac{5}{3} \geqq 0 \\ v \leqq \frac{5}{3} & \Rightarrow & \frac{5}{3} - v \geqq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad \left(u+\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3}-v\right) \geqq 0$$

$$\frac{5}{3}u + \frac{25}{9} - uv - \frac{5}{3}v \geqq 0$$

$$\frac{25}{9} \geqq uv + \frac{5}{3}\cdot \underbrace{(v-u)}_{>0} > uv.$$

Potom $v^2 + uv + u^2 - \frac{25}{3} < \frac{25}{9} + \frac{25}{9} + \frac{25}{9} - \frac{25}{3} = 0.$

Tým sme ukázali, že $g(v) - g(u) = \underbrace{(v-u)}_{>0} \cdot \underbrace{\left(v^2 + uv + u^2 - \frac{25}{3}\right)}_{<0} < 0$,
t. j. že $g(u) > g(v)$.

c) Podobne ako v prípade a) možno ukázať, že funkcia (3) je na intervale $(-\infty, t_1\rangle$ rastúca.

Z dokázaného vyplýva, že funkcia (3) má jediné lokálne maximum v bode t_1 a jediné lokálne minimum v bode t_2. Tým sme dokázali, že funkcia $f(x) = g\left(x - \frac{2}{3}\right)$ má jediné lokálne maximum v bode x_1 a jediné lokálne minimum v bode x_2.

Na záver ukážeme, že použitý postup má širšiu platnosť. Budeme hľadať lokálne extrémy funkcie

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Danú funkciu vyjadríme nasledujúcim spôsobom:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x+r)^2(x+s) + p.$$

Po úprave máme:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 + (2r+s)x^2 + (r^2 + 2rs)x + r^2 s + p.$$

Odtiaľ dostávame sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} a &= 2r+s \\ b &= r^2+2rs \\ c &= r^2s+p \end{aligned}$$

Z prvej rovnice vyjadríme $s = a-2r$. Dosadíme do druhej rovnice:

$$\begin{aligned} b &= r^2+2r(a-2r) \\ b &= r^2+2ar-4r^2 \\ 3r^2-2ar+b &= 0. \end{aligned}$$

Za predpokladu $D = 4(a^2-3b) > 0$ má táto rovnica dva reálne korene

$$r_1 = \frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3}, \quad r_2 = \frac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3}.$$

Zo vzťahu $s = a-2r$ vypočítame im odpovedajúce hodnoty

$$s_1 = \frac{a-2\cdot\sqrt{a^2-3b}}{3} \quad s_2 = \frac{a+2\cdot\sqrt{a^2-3b}}{3}.$$

Zo vzťahu $c = r^2s+p$ môžeme vypočítať hodnoty $p_{1,2}$, ich presné vyjadrenie však nebudeme potrebovať.

Pre každé reálne číslo x také, že $x+r_1 \neq 0$, $x+s_1 < 0$ platí:

$$f(x) = x^3+ax^2+bx+c = \underbrace{\underbrace{(x+r_1)^2}_{>0}\cdot\underbrace{(x+s_1)}_{<0}}_{<0}+p_1 < p_1 = f(-r_1).$$

Pretože $r_1 > s_1$, platí $x_1 = -r_1 \in (-\infty, -s_1)$. Tým sme ukázali, že daná funkcia má v bode $x_1 = -r_1$ ostré lokálne maximum.

Podobným spôsobom možno ukázať, že daná funkcia má v bode $x_2 = -r_2$ ostré lokálne minimum.

Zostáva nám prípad $D = 4(a^2-3b) \leqq 0$.

Použijeme lineárnu substitúciu $x = t+u$, kde u je vhodná konštanta. Pritom konštantu u vyberieme tak, aby koeficient pri druhej mocnine premennej t bol rovný nule, t. j. aby platilo $3u+a = 0$. Naša substitúcia má teda tvar $x = t-\frac{a}{3}$. To nám umožní vyjadriť danú funkciu nasledujúcim spôsobom:

$$x^3+ax^2+bx+c = \underbrace{\left(x+\frac{a}{3}\right)^3}_{\text{rastúca}} + \underbrace{\left(b-\frac{a^2}{3}\right)\cdot x+c-\frac{a^3}{27}}_{\text{neklesajúca}}.$$

Pretože podľa nášho predpokladu je $a^2-3b \leqq 0$, platí $b-\frac{a^2}{3} \geqq 0$. Odtiaľ vyplýva, že funkcia $y=\left(b-\frac{a^2}{3}\right)\cdot x+c-\frac{a^3}{27}$ je neklesajúca. Pretože funkcia $y=\left(x+\frac{a}{3}\right)^3$ je rastúca, súčet týchto dvoch funkcií je rastúcou funkciou. Tým sme dokázali, že v prípade $D=4(a^2-3b) \leqq 0$ daná funkcia lokálne extrémy nemá.

Literatúra

[1] Černek, P. – Kubáček, Z. *Monitor – Nová maturita – Matematika,* SPN, Bratislava 2004, ISBN 80-10-00333-6

Adresa autora:

Jozef Doboš, Katedra aplikovanej matematiky, SjF TU Košice

e-mail: `Jozef.Dobos@tuke.sk`, URL: `http://www.tuke.sk/dobos`

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

Adresa redakcie

Matematická a informatická časť
Katedra matematiky FPV UMB, Tajovského 40, 974 01 Banská Bystrica
(e-mail: malicky@fpv.umb.sk)

Fyzikálna časť
Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: ateleki@ukf.sk)

Objednávky a predplatné vybavuje
Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
1/2004(33)

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným prispením
Ministerstva školstva Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Beloslav Riečan, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Peter Maličký, Aba Teleki
Technická a grafická úprava: Mária Benešová, Vladimír Kutnár
Všetky príspevky prešli odbornou recenziou

Podávanie novinových zásielok povolené
Západoslovenským riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 3015/2003-OLB zo dňa 1.10.2003

ISSN 1335-4981

OBSAH

FROM CONTENTS