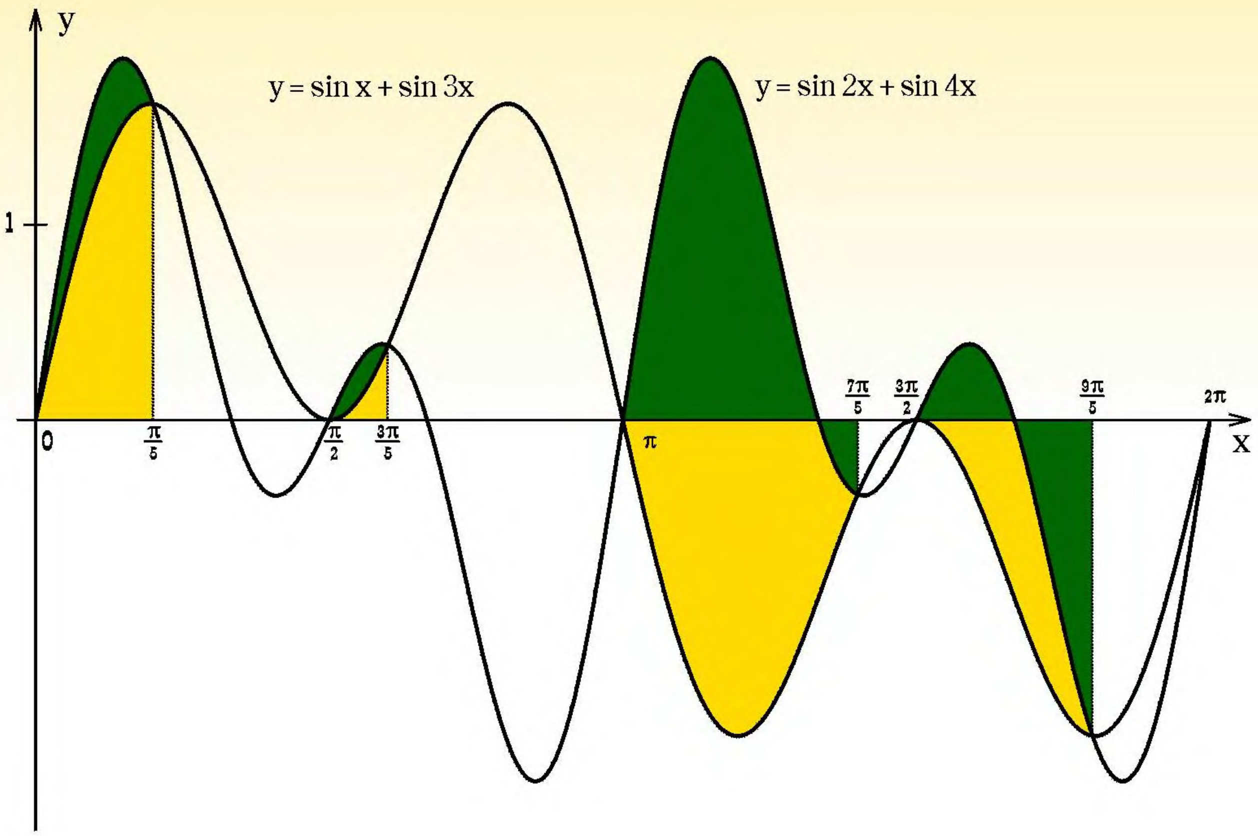
ROVNICE A NEROVNICE

Jozef Doboš



BOLCHAZY - CARDUCCI PUBLISHERS, INC.

Rovnice a nerovnice

Jozef Doboš

Bolchazy-Carducci Publishers, Inc.

Rovnice a nerovnice
Jozef Doboš

Printed in Slovakia
2003

Published by
BOLCHAZY-CARDUCCI PUBLISHERS, INC.
1000 Brown Street, Unit 101
Wauconda, Illinois 60084 U.S.A.
www.bolchazy.com

ISBN: 0-86516-558-0

Úvod

Úspešnosť pri riešení matematických úloh, s ktorými sa uchádzači o vysokoškolské štúdium musia popasovať na prijímačkách, závisí nielen od kvality výuky na strednej škole, ale aj od kvality individuálnej prípravy každého študenta.

Vysoké školy vydávajú pre stredoškolákov zbierky úloh z matematiky. Treba si však uvedomiť, že aj keď sa pritom rešpektujú mantinely určené stredoškolskými osnovami, úlohy svojou náročnosťou často idú nad rámec možností školskej prípravy. Slabou stránkou týchto zbierok úloh je nedostatočný počet podrobne vyriešených náročnejších príkladov. Poukazuje na to prekvitanie rôznych foriem doučovania, resp. mimoškolských prípravných kurzov.

Prvým pokusom o vyplnenie medzery, ktorá dlhodobo existuje v literatúre určenej študentom stredných škôl, bola kniha [15]. Sú v nej podrobne vyriešené príklady, ktoré robia najväčšie problémy uchádzačom o štúdium na Ekonomickej univerzite. V mojej databáze sa však nachádzali aj ďalšie zaujímavé úlohy podobnej obtiažnosti. Niekde tu vznikla myšlienka napísať knihu so širším záberom, ktorá nebude iba príručkou na prijímačky, ale ktorá by mohla osloviť každého, kto má záľubu v riešení náročnejších matematických úloh.

Hlavným cieľom tejto publikácie je prezentovať čo najširšie spektrum klasických metód riešenia rovníc a nerovníc. Základným číselným oborom, v ktorom hľadáme riešenia úloh, je množina všetkých reálnych čísel. Výnimkou sú algebraické rovnice, pre ktoré je prirodzenejším oborom množina všetkých komplexných čísel. Základná veta algebry, ktorá hovorí, že teleso komplexných čísel je algebraicky uzavreté, nám umožňuje určiť počet koreňov algebraických rovníc v komplexnom obore.

Iná situácia je pri nealgebraických rovniciach, kde často nemáme k dispozícii nástroje na určenie počtu koreňov. Vypuklo sa to prejavuje v prípade, keď korene dokážeme uhádnuť. Študenti často nepociťujú potrebu dokazovať, že iné korene rovnica nemá. Bez toho však riešenie príkladu nemôže byť akceptované.

Niektoré užitočné poznatky sú spracované na konci knihy v dodatkoch. V zozname literatúry sú uvedené knižné a časopisecké zdroje, ktoré boli použité pri príprave tejto publikácie. K štúdiu ich však nevyhnutne nepotrebujete. Niektoré ďalšie materiály nájdete na internetovej adrese `http://www.prof.jozef.doboš.eu/`

Vyjadrujem poďakovanie recenzentom za starostlivé posúdenie publikácie, ako aj za cenné pripomienky, ktoré prispeli k jej skvalitneniu.

Košice, november 2002 Jozef Doboš

1. Sústavy lineárnych rovníc

Pri riešení sústav lineárnych rovníc majú niektorí študenti problém s diskusiou vzhľadom na parameter. Preto si na ukážku uvedieme dve takéto sústavy.

Príklad 1.1. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc, kde reálne číslo a je parameter:

$$\left.\begin{aligned} x + ay &= 1 \\ ax - 3ay &= 2a + 3. \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Postupujeme klasickým spôsobom:

$$\begin{array}{rcl} x + ay &=& 1 \qquad / \cdot 3 \\ ax - 3ay &=& 2a + 3 \\ \hline 3x + 3ay &=& 3 \\ ax - 3ay &=& 2a + 3 \\ \hline (a+3)x &=& 2(a+3) \end{array}$$

Potrebovali by sme predeliť dvojčlenom $a + 3$. Rozlíšime dva prípady.

a) Ak $a + 3 = 0$, t. j. $a = -3$, potom sústava (1.1) bude mať tvar

$$\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ -3x + 9y &= -3 \end{aligned}$$

Pretože druhá rovnica je násobkom prvej, táto sústava má nekonečne veľa riešení. Môžeme ich vyjadriť nasledujúcim spôsobom:

$$[x, y] \in \{[3t + 1, t]; t \in \mathbb{R}\}.$$

b) Ak $a + 3 \neq 0$, t. j. $a \neq -3$, potom z rovnice $(a + 3)x = 2(a + 3)$ dostávame $x = 2$. Po dosadení $x = 2$ do sústavy (1.1) máme

$$ay = -1.$$

Pre $a = 0$ táto rovnica nemá riešenie. Pre $a \neq 0$ má táto rovnica jediný koreň

$$y = -\frac{1}{a}.$$

Záver. V prípade, že $a = -3$, sústava (1.1) má nekonečne veľa riešení. Môžeme ich vyjadriť v tvare

$$[x, y] \in \{[3t + 1, t]; t \in \mathbb{R}\}.$$

V prípade, že $a = 0$, sústava (1.1) nemá riešenie.
V prípade, že $a \neq -3$, $a \neq 0$, sústava (1.1) má jediné riešenie

$$[x, y] = [2, -\tfrac{1}{a}].$$

Príklad 1.2. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc, kde reálne číslo a je parameter:

$$\left.\begin{aligned} ax + y &= a^2 \\ x + ay &= a^3. \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Postupujeme klasickým spôsobom:

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & y & = & a^2 \qquad / \cdot a \\ x & + & ay & = & a^3 \\ \hline a^2x & + & ay & = & a^3 \\ x & + & ay & = & a^3 \\ \hline \multicolumn{5}{l}{(a^2 - 1) \cdot x = 0} \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} -$$

Rozlíšime tri prípady.

a) Pre $a = 1$ prejde sústava (1.2) do tvaru

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= 1, \end{aligned}$$

ktorá má nekonečne veľa riešení. Môžeme ich vyjadriť nasledujúcim spôsobom:

$$[x, y] \in \{[t, 1 - t]; t \in \mathbb{R}\}.$$

b) Pre $a = -1$ prejde sústava (1.2) do tvaru

$$\begin{aligned} -x + y &= 1 \\ x - y &= -1, \end{aligned}$$

ktorá má nekonečne veľa riešení. Môžeme ich vyjadriť nasledujúcim spôsobom:

$$[x, y] \in \{[t, 1 + t]; t \in \mathbb{R}\}.$$

c) Pre $a \neq 1$, $a \neq -1$ z rovnice $(a^2 - 1) \cdot x = 0$ dostávame $x = 0$. Po dosadení $x = 0$ do sústavy (1.2) máme

$$y = a^2.$$

Záver. V prípade, že $a = 1$, sústava (1.2) má nekonečne veľa riešení. Môžeme ich vyjadriť v tvare
$$[x, y] \in \{[t, 1 - t]; t \in \mathbb{R}\}.$$
V prípade, že $a = -1$, sústava (1.2) má nekonečne veľa riešení. Môžeme ich vyjadriť v tvare
$$[x, y] \in \{[t, 1 + t]; t \in \mathbb{R}\}.$$
V prípade, že $a \neq 1$, $a \neq -1$, sústava (1.2) má jediné riešenie
$$[x, y] = [0, a^2].$$

2. Kvadratické rovnice a nerovnice

Poviete si – čo už môže byť na kvadratických rovniciach zaujímavé? Preto sme na úvod vybrali nasledujúci príklad. Vyriešte si ho najskôr samostatne. Nie je v tom nič ťažké, ale zabehnutý stereotyp môže spôsobiť, že vaše riešenie nebude úplné.

Príklad 2.1. Nájdite všetky reálne čísla p, pre ktoré nasledujúca rovnica má jediné riešenie v obore reálnych čísel:

$$p \cdot 2^x + 2^{-x} = 5. \tag{2.1}$$

Použijeme substitúciu $2^x = y$ a danú rovnicu upravíme do tvaru

$$p \cdot y^2 - 5y + 1 = 0. \tag{2.2}$$

$$\text{Rovnica (2.2) je} \quad \begin{cases} \text{lineárna} & \text{pre } p = 0, \\ \text{kvadratická} & \text{pre } p \neq 0. \end{cases}$$

Pre $p = 0$ má rovnica (2.2) jediné riešenie $y = 1/5$. Pre $p \neq 0$ má rovnica (2.2) jediné riešenie práve vtedy, keď jej diskriminant $D = 25 - 4p$ je rovný nule, t. j. pre $p = 25/4$. Tým sme ukázali, že rovnica (2.2) má jediné riešenie práve vtedy, keď $p \in \{0; 25/4\}$. V tomto okamihu študenti pokladajú príklad za vyriešený.

Ukážeme, že to tak nie je. Položme napríklad $p = -24$. Napriek tomu, že rovnica $(-24) \cdot y^2 - 5y + 1 = 0$ má dva reálne korene $y_1 = 1/8$ a $y_2 = -1/3$, rovnica $(-24) \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$ má jediné riešenie $x = -3$.

Pretože pre každé reálne číslo x platí $2^x > 0$, rovnica (2.1) má jediné riešenie práve vtedy, keď rovnica (2.2) má jediné kladné riešenie. Dokončenie príkladu už môžeme prenechať čitateľovi ako užitočné cvičenie.

Záver. Rovnica (2.1) má jediné riešenie práve vtedy, keď $p \in (-\infty; 0\rangle \cup \{25/4\}$.

Riešiť kvadratickú rovnicu pomocou diskriminantu je relatívne jednoduché. Stačí poznať vzorec a trochu trénovať. Avšak, nemusí to byť práve najefektívnejšie. Typickým príkladom sú rovnice

$$x^2 + px = 0, \qquad x^2 + q = 0,$$

ktoré rieši pomocou diskriminantu naozaj iba veľmi málo študentov. Cieľom tohto odseku je ukázať niektoré jednoduché techniky, ktoré nám často umožňujú riešiť kvadratické rovnice bez použitia diskriminantu. Ak si urobíte malý prieskum v zbierkach úloh, zistíte, že tieto postupy možno použiť prekvapujúco často. Investícia do ich zvládnutia sa teda určite vráti.

Pomerne ľahko môžeme overiť, či niektoré z čísel 1 a -1 nie je koreňom rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{2.3}$$

Číslo $x_1 = 1$ je koreňom rovnice (2.3) práve vtedy, keď platí $a + b + c = 0$. V takomto prípade máme

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = ax^2 + bx - a - b &= a(x^2 - 1) + b(x - 1) = \\ &= a(x - 1)(x + 1) + b(x - 1) = \\ &= (x - 1)(ax + a + b) = (x - 1)(ax - c). \end{aligned}$$

Druhý koreň x_2 nájdeme riešením rovnice $ax - c = 0$. Teda $x_2 = c/a$.

Zhrnutie. *Ak $a + b + c = 0$, potom rovnica (2.3) má korene $x_1 = 1$, $x_2 = c/a$.*

Číslo $x_1 = -1$ je koreňom rovnice (2.3) práve vtedy, keď platí $a - b + c = 0$. V takomto prípade máme

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = ax^2 + bx - a + b &= a(x^2 - 1) + b(x + 1) = \\ &= a(x - 1)(x + 1) + b(x + 1) = \\ &= (x + 1)(ax - a + b) = (x + 1)(ax + c). \end{aligned}$$

Druhý koreň x_2 nájdeme riešením rovnice $ax + c = 0$. Teda $x_2 = -c/a$.

Zhrnutie. *Ak $a - b + c = 0$, potom rovnica (2.3) má korene $x_1 = -1$, $x_2 = -c/a$.*

Príklad 2.2. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$3x^2 - 14x - 17 = 0. \tag{2.4}$$

Pretože $a - b + c = 3 + 14 - 17 = 0$, číslo $x_1 = -1$ je koreňom rovnice (2.4). Pre druhý koreň potom platí $x_2 = -c/a$. Teda $x_2 = 17/3$. Pre porovnanie vyriešte rovnicu (2.4) aj pomocou diskriminantu.

Záver. Rovnica (2.4) má korene $x_1 = -1$, $x_2 = 17/3$.

Teraz si ukážeme, ako možno nájsť druhý koreň kvadratickej rovnice za predpokladu, že jeden už poznáme.

Položme $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nech r je pevne zvolené reálne číslo. Pretože

$$\begin{aligned} f(x) - f(r) &= (ax^2 + bx + c) - (ar^2 + br + c) = a(x^2 - r^2) + b(x - r) = \\ &= a(x - r)(x + r) + b(x - r) = (x - r)(ax + ar + b), \end{aligned}$$

máme

$$f(x) = (x - r)(ax + ar + b) + f(r),$$

odkiaľ

$$ax^2 + bx + c = (x - r)(ax + b_1) + c_1, \tag{2.5}$$

kde $b_1 = ar + b$ a $c_1 = f(r) = ar^2 + br + c = r(ar + b) + c = b_1 r + c$.

Ukážeme si, ako možno uvedený postup pomocou Hornerovej schémy efektívne zmechanizovať. Postupujeme v troch riadkoch. Prvý riadok obsahuje všetky koeficienty daného kvadratického trojčlena $f(x) = ax^2 + bx + c$. Do tretieho riadku najskôr opíšeme číslo a.

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ r & & & \\ \hline & a & & \end{array}$$

Potom vynásobíme číslo a číslom r a výsledok zapíšeme do druhého riadku pod číslo b.

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ r & & ar & \\ \hline & a & & \end{array}$$

Čísla v tomto stĺpci sčítame a výsledok (ktorý sme označili symbolom b_1) zapíšeme do tretieho riadku.

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ r & & ar & \\ \hline & a & b_1 & \end{array}$$

Postup opakujeme. Vynásobíme číslo $b_1 = b + ar$ číslom r a výsledok zapíšeme pod číslo c. Čísla v tomto stĺpci sčítame a výsledok (ktorý sme označili symbolom c_1) zapíšeme do tretieho riadku.

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ r & & ar & b_1 r \\ \hline & a & b_1 & \boxed{c_1} = f(r) \end{array}$$

V treťom riadku máme čísla a, b_1 a c_1. Čísla a a b_1 sú koeficienty čiastočného podielu, ktorým je dvojčlen $ax + b_1$. Číslo c_1 je zvyšok, ktorý dostaneme pri delení kvadratického trojčlena $f(x) = ax^2 + bx + c$ dvojčlenom $x - r$.

Predpokladajme, že x_1 je koreň kvadratickej rovnice (2.3). Potom pre $r = x_1$ platí $c_1 = f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c = 0$, teda podľa (2.5) máme

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(ax + b_1), \tag{2.6}$$

kde $b_1 = ax_1 + b$. Druhý koreň x_2 rovnice (2.3) nájdeme riešením lineárnej rovnice $ax + b_1 = 0$, t. j. $x_2 = -b_1/a$.

Príklad 2.3. Nájdite druhý koreň rovnice $x^2 - 9x + c = 0$, ak viete, že číslo $x_1 = 51$ je jej koreňom.

Použijeme Hornerovu schému:

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ x_1 & & ax_1 & b_1x_1 \\ \hline & a & b_1 & \boxed{c_1} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & -9 & c \\ 51 & & 51 & \\ \hline & 1 & 42 & \end{array}$$

Koreň x_2 nájdeme riešením rovnice $ax + b_1 = 0$, t. j. $x + 42 = 0$.

Záver. Druhý koreň danej rovnice je $x_2 = -42$.

Po malej úprave rovnosti (2.6) dostaneme rozklad kvadratického trojčlena na tzv. koreňové činitele

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2), \quad \text{resp.} \\ x^2 + px + q &= (x - x_1)(x - x_2), \end{aligned}$$

kde sme použili označenie $b/a = p$, $c/a = q$. Pritom

$$x^2 + px + q = 0$$

je tzv. *normovaný tvar* kvadratickej rovnice. Medzi jej koreňmi a koeficientami platia nasledujúce vzťahy, ktoré sa volajú *Viètove vzorce*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p, \\ x_1 \cdot x_2 &= q. \end{aligned}$$

Príklad 2.4. Riešte rovnicu

$$x^2 - (\sqrt{3} + 2) \cdot x + 2 \cdot \sqrt{3} = 0. \tag{2.7}$$

Použijeme Viètove vzorce. Hľadáme také čísla x_1 a x_2, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \sqrt{3} + 2, \\ x_1 \cdot x_2 &= 2 \cdot \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Nie je ťažké uhádnuť, že týmto podmienkam vyhovujú čísla $x_1 = \sqrt{3}$ a $x_2 = 2$.

Záver. Korene rovnice (2.7) sú $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = 2$.

Príklad 2.5. Riešte rovnicu

$$x^2 - 2x - 63 = 0. \tag{2.8}$$

Postupujeme rovnako ako v predchádzajúcom príklade.

$$x_1 + x_2 = 2 \qquad\qquad x_1 + x_2 = (-7) + 9$$
$$x_1 \cdot x_2 = -63 \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = (-7) \cdot 9$$

Číslo $q = -63$ sme rozložili na súčin dvoch čísel, ktorých súčet je 2.

Záver. Korene rovnice (2.8) sú $x_1 = -7$, $x_2 = 9$.

Kvadratické rovnice s celočíselnými koeficientami.

V tejto časti sa budeme zaoberať rovnicou (2.3), ktorej koeficienty a, b a c sú celé čísla. Táto situácia sa totiž v školských úlohách vyskytuje najčastejšie. Predpokladajme, že rovnica (2.3) má celočíselný koreň s. Pretože $s(as+b) = -c$, číslo s je deliteľom čísla c. Teda celočíselné korene rovnice (2.3) hľadáme medzi deliteľmi čísla c. Pritom s výhodou používame Hornerovu schému.

Príklad 2.6. Riešte rovnicu

$$2x^2 - 7x + 3 = 0. \tag{2.9}$$

Delitele čísla $c = 3$ sú 1, -1, 3, -3. Pretože platí $f(1) = 2 - 7 + 3 = -2$ a $f(-1) = 2 + 7 + 3 = 12$, čísla 1 a -1 nie sú koreňmi danej rovnice. Pomocou Hornerovej schémy postupne overujeme, ktoré z čísel 3 a -3 je hľadaným koreňom.

$$\begin{array}{c|ccc}
 & a & b & c \\
x_1 & & ax_1 & b_1x_1 \\
\hline
 & a & b_1 & \boxed{c_1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
 & 2 & -7 & 3 \\
3 & & 6 & -3 \\
\hline
 & 2 & -1 & \boxed{0}
\end{array}$$

Daná rovnica má teda celočíselný koreň $x_1 = 3$. Koreň x_2 nájdeme riešením rovnice $ax + b_1 = 0$, t. j. $2x - 1 = 0$. Teda $x_2 = 1/2$.

Záver. Korene rovnice (2.9) sú $x_1 = 3$, $x_2 = 1/2$.

V prípade, že počet deliteľov čísla c je relatívne veľký, ich postupné preverovanie je neefektívne. Môžeme však využiť skutočnosť, že číslo $s-1$ je deliteľom čísla $f(1)$.

Skutočne, pretože $a + b + c = f(1)$, platí:

$$\begin{aligned}
as^2 + bs + c &= 0,\\
as^2 + bs + f(1) - a - b &= 0,\\
a(s^2 - 1) + b(s - 1) + f(1) &= 0,\\
a(s-1)(s+1) + b(s-1) &= -f(1),\\
(s-1)(as + a + b) &= -f(1).
\end{aligned}$$

Príklad 2.7. Riešte rovnicu

$$2x^2 - 27x + 36 = 0. \tag{2.10}$$

Číslo $s-1$ bude ležať medzi deliteľmi čísla $f(1) = 2-27+36 = 11$, t. j. v množine $\{1; -1; 11; -11\}$. Potom $s \in \{2; 0; 12; -10\}$. Pretože s je deliteľom čísla $c = 36$, do úvahy prichádzajú iba čísla 2 a 12. Pomocou Hornerovej schémy overíme, že hľadaným celočíselným koreňom je číslo $x_1 = 12$.

	a	b	c
x_1		ax_1	b_1x_1
	a	b_1	$\boxed{c_1}$

	2	−27	36
12		24	−36
	2	−3	$\boxed{0}$

Koreň x_2 nájdeme riešením rovnice $ax + b_1 = 0$, t. j. $2x - 3 = 0$. Teda $x_2 = 3/2$.

Záver. Korene rovnice (2.10) sú $x_1 = 12$, $x_2 = 3/2$.

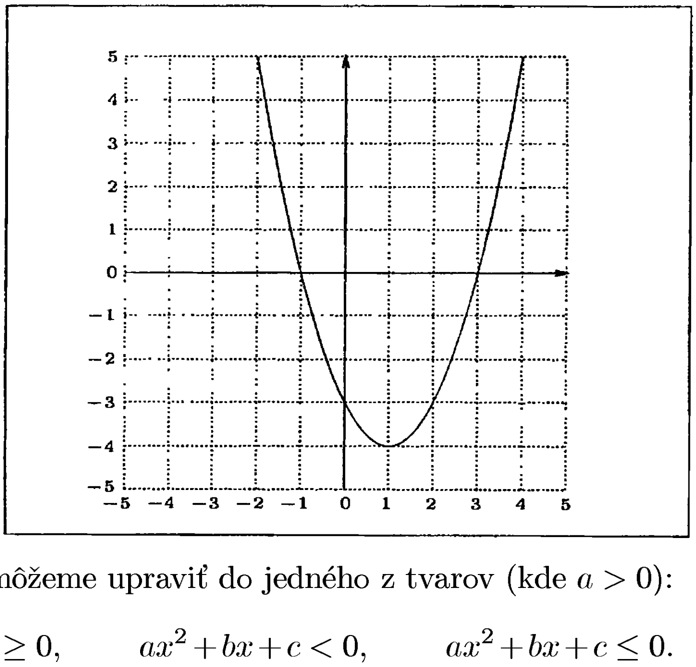
Podobne možno využiť skutočnosť, že číslo $s+1$ je deliteľom čísla $f(-1)$. Dôkaz tohto tvrdenia si premyslite samostatne.

Kvadratické nerovnice.

V tejto časti sa budeme zaoberať kvadratickými nerovnicami. Dôležitú úlohu bude mať grafická analýza.

Úloha. Na vedľajšom obrázku je graf kvadratického trojčlena $y = ax^2 + bx + c$. Zistite pre ktoré hodnoty premennej x
a) sú hodnoty y tejto funkcie rovné nule,
b) sú hodnoty y tejto funkcie kladné,
c) sú hodnoty y tejto funkcie záporné,
d) je táto funkcia rastúca,
e) je táto funkcia klesajúca.

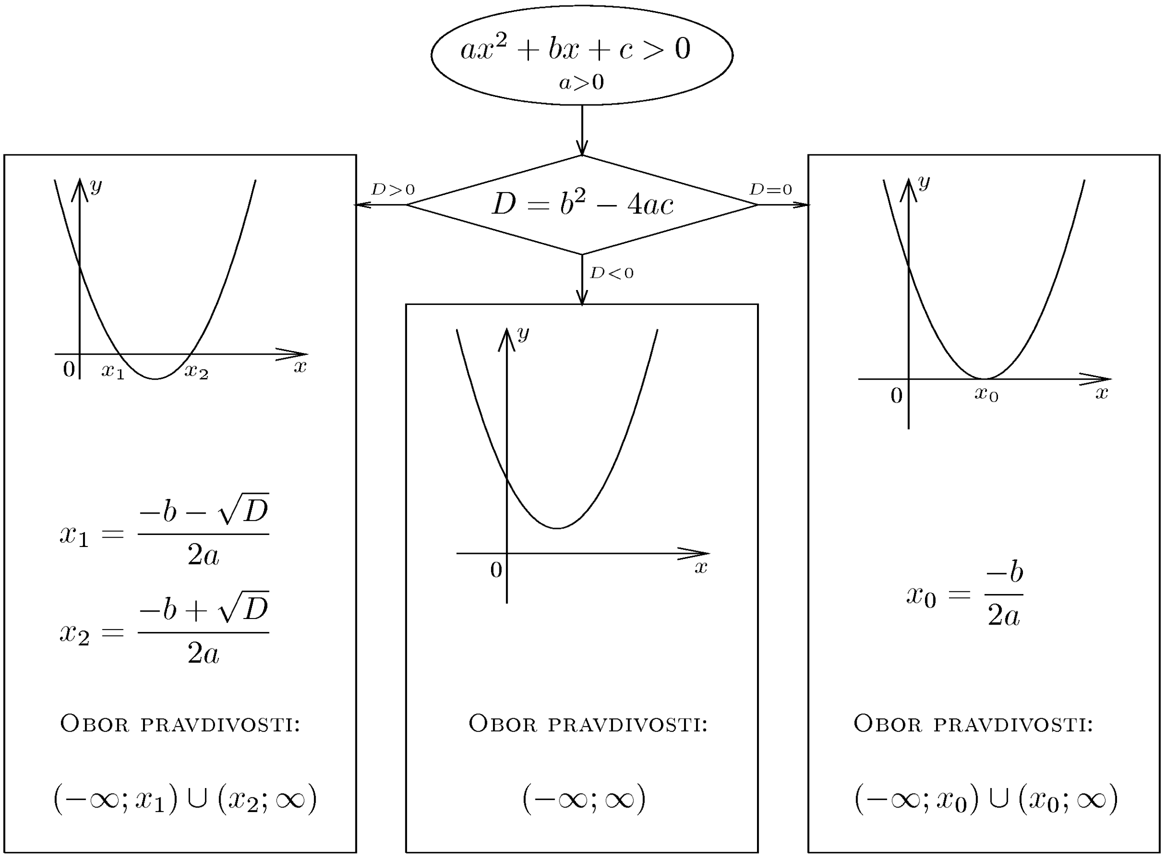
a) $x \in \{-1; 3\}$, b) $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$, c) $x \in (-1; 3)$, d) $x \in \langle 1; +\infty)$, e) $x \in (-\infty; 1\rangle$.

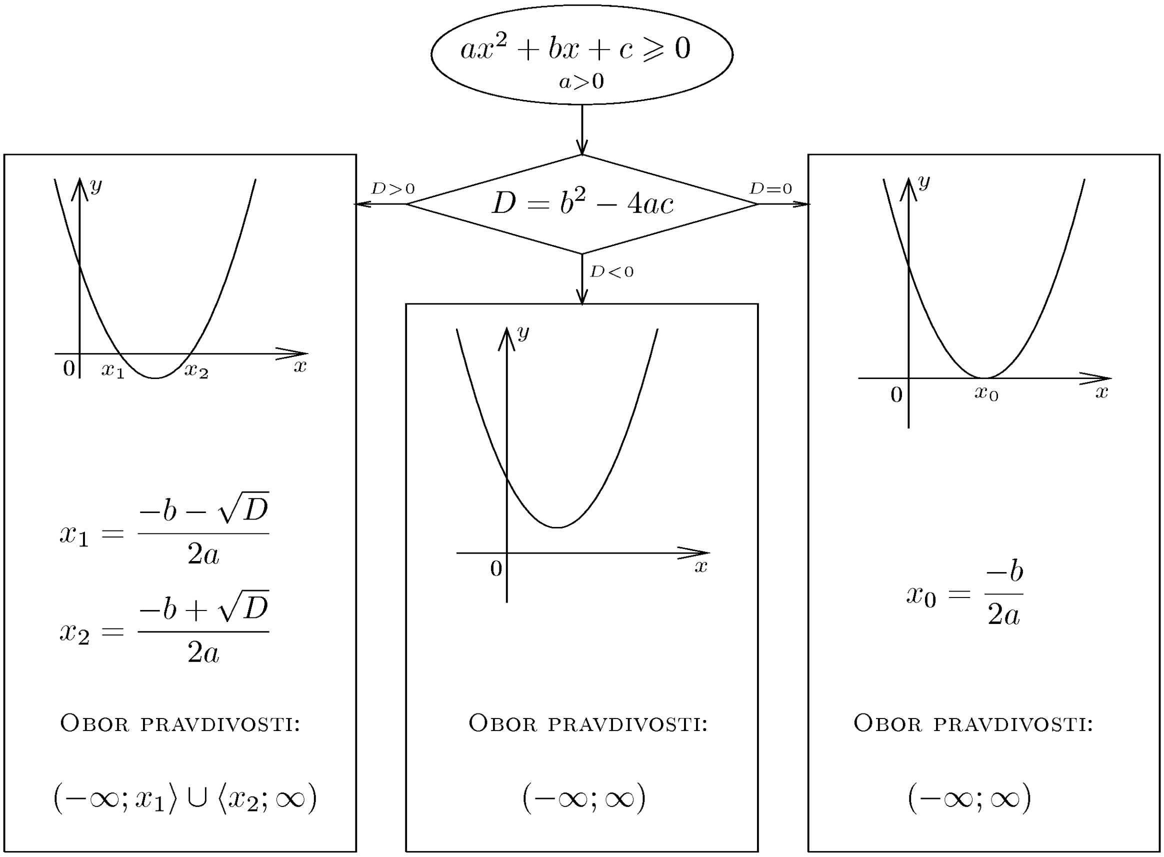


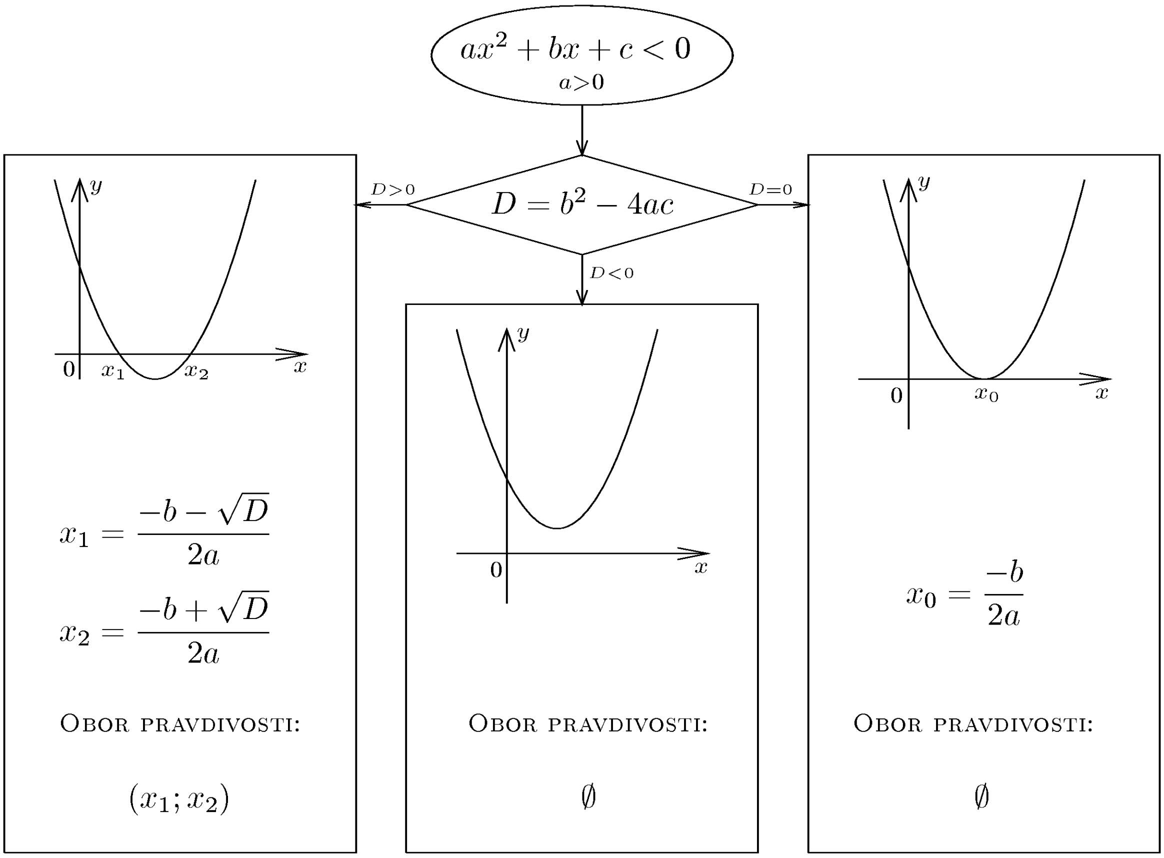
Každú kvadratickú nerovnicu môžeme upraviť do jedného z tvarov (kde $a > 0$):

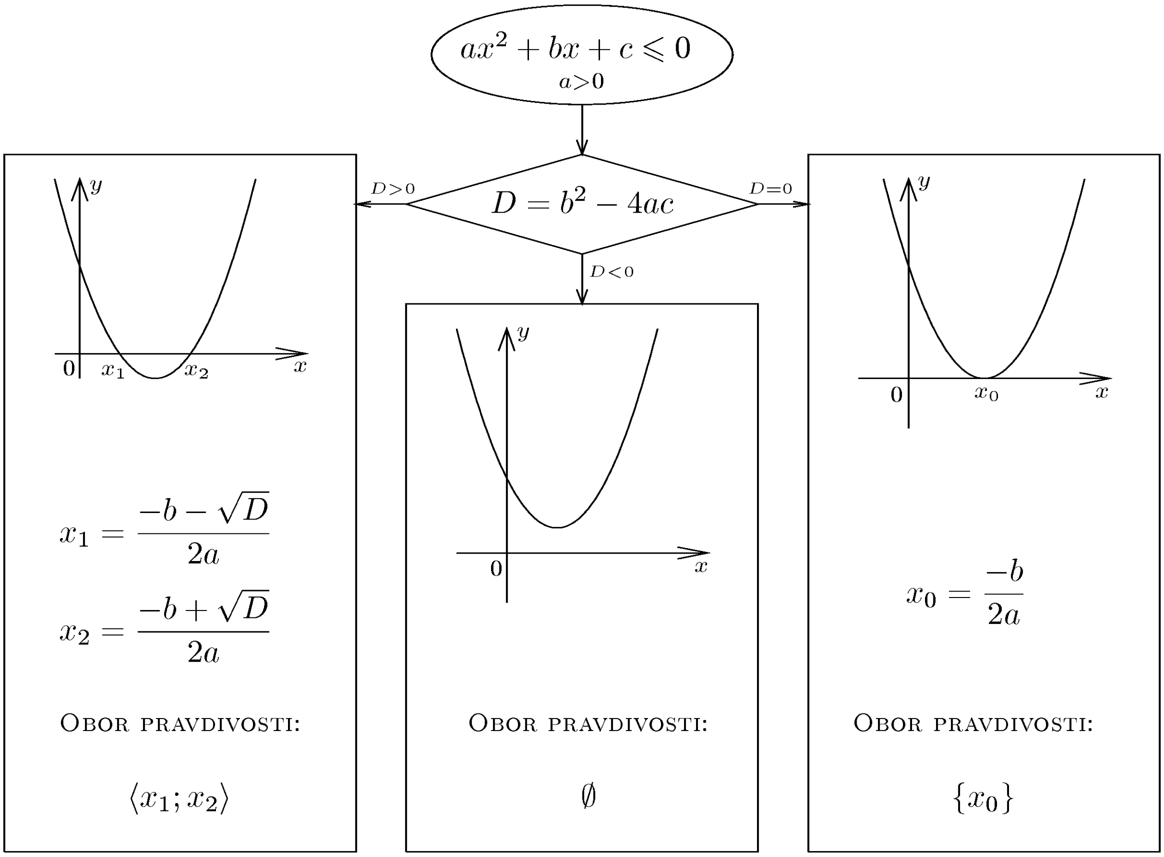
$$ax^2 + bx + c > 0. \qquad ax^2 + bx + c \geq 0, \qquad ax^2 + bx + c < 0, \qquad ax^2 + bx + c \leq 0.$$

Na záver uvedieme prehľadné tabuľky, ktoré nám v koncentrovanej podobe dávajú návod na riešenie týchto kvadratických nerovníc.


$ax^2 + bx + c > 0$
$a>0$
$D = b^2 - 4ac$
$D>0$
$D<0$
$D=0$
y
x
0
x_1
x_2
x_0
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$
$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$
$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
Obor pravdivosti:
$(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$
Obor pravdivosti:
$(-\infty; \infty)$
Obor pravdivosti:
$(-\infty; x_0) \cup (x_0; \infty)$


$ax^2 + bx + c \geqslant 0$
$a>0$
$D = b^2 - 4ac$
$D>0$
$D<0$
$D=0$
y
x
0
x_1
x_2
x_0
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$
$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$
$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
Obor pravdivosti:
$(-\infty; x_1\rangle \cup \langle x_2; \infty)$
Obor pravdivosti:
$(-\infty; \infty)$
Obor pravdivosti:
$(-\infty; \infty)$


$ax^2 + bx + c < 0$
$a>0$
$D = b^2 - 4ac$
$D>0$
$D<0$
$D=0$
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$
$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$
Obor pravdivosti:
$(x_1; x_2)$
Obor pravdivosti:
$\emptyset$
$x_0 = \frac{-b}{2a}$
Obor pravdivosti:
$\emptyset$


$ax^2 + bx + c \leqslant 0$
$a>0$
$D = b^2 - 4ac$
$D>0$
$D<0$
$D=0$
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$
$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$
Obor pravdivosti:
$\langle x_1; x_2\rangle$
Obor pravdivosti:
$\emptyset$
$x_0 = \frac{-b}{2a}$
Obor pravdivosti:
$\{x_0\}$

3. Rovnice tretieho stupňa

Príklad 3.1. V obore reálnych/komplexných čísel máme riešiť rovnicu:

$$x^3 - 9x^2 - 9x - 15 = 0. \tag{3.1}$$

Najskôr sa pomocou lineárnej substitúcie $x = y + a$ pokúsime eliminovať kvadratický člen:

$$\begin{aligned}
(y+a)^3 - 9(y+a)^2 - 9(y+a) - 15 &= 0\\
y^3 + 3ay^2 + 3a^2y + a^3 - 9(y^2 + 2ay + a^2) - 9(y+a) - 15 &= 0\\
y^3 + 3ay^2 + 3a^2y + a^3 - 9y^2 - 18ay - 9a^2 - 9y - 9a - 15 &= 0\\
y^3 + (3a-9)y^2 + (3a^2 - 18a - 9)y + (a^3 - 9a^2 - 9a - 15) &= 0. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Číslo a zvolíme tak, aby koeficient pri y^2 bol rovný nule, t. j. tak, aby platilo $3a - 9 = 0$. Položíme teda $a = 3$. Potom podľa (3.2) máme

$$\begin{aligned}
y^3 + (3\cdot 3^2 - 18\cdot 3 - 9)y + (3^3 - 9\cdot 3^2 - 9\cdot 3 - 15) &= 0\\
y^3 + (27 - 54 - 9)y + (27 - 81 - 27 - 15) &= 0\\
y^3 - 36y - 96 &= 0\\
y^3 &= 36y + 96. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Riešenie rovnice (3.3) budeme hľadať v tvare súčtu

$$y = u + v. \tag{3.4}$$

Potom platí:

$$\begin{aligned}
y^3 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + 3uv(u+v) + v^3 = u^3 + 3uvy + v^3\\
y^3 &= u^3 + 3uvy + v^3. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Podľa (3.5) a (3.3) máme:

$$3uvy + u^3 + v^3 = 36y + 96.$$

Porovnaním ľavej a pravej strany dostávame sústavu rovníc:

$$3uv = 36, \qquad u^3 + v^3 = 96. \tag{3.6}$$

Z prvej rovnice vyjadríme

$$v = \frac{36}{3u} = \frac{12}{u} \tag{3.7}$$

a dosadíme do druhej:

$$\begin{aligned} u^3 + \left(\frac{12}{u}\right)^3 &= 96 \\ u^3 + \frac{12^3}{u^3} &= 96 \quad \big/ \cdot u^3 \\ u^6 + 12^3 &= 96u^3 \quad \big/ -96u^3 \\ u^6 - 96u^3 + 12^3 &= 0 \\ (u^3 - 24)(u^3 - 72) &= 0. \end{aligned}$$

Posledná rovnica sa rozpadne na dve alternatívy:

$$u^3 - 24 = 0, \qquad\qquad u^3 - 72 = 0. \tag{3.8}$$

Pretože spôsob riešenia je u obidvoch rovnaký, vysvetlíme si ho na prvej z nich. Určite ste si všimli, že ide o binomické rovnice. Spôsob ich riešenia nájdete na strane 174. Chceme však ukázať, že tieto rovnice možno riešiť aj inak.

Substitúciou $u = \sqrt[3]{24} \cdot t$ prevedieme rovnicu $u^3 - 24 = 0$ do tvaru $24t^3 - 24 = 0$, ktorú riešime takto:

$$\begin{aligned} 24t^3 - 24 &= 0 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{24} \\ t^3 - 1 &= 0 \\ (t-1)(t^2 + t + 1) &= 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Odtiaľ dostávame:

$$t_1 = 1, \;\; t_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \boldsymbol{i}, \;\; t_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \boldsymbol{i}. \tag{3.10}$$

(Symbolom $\boldsymbol{i}$ sme označili imaginárnu jednotku. Pozri str. 174.) Vzťahmi (3.10) sú vyjadrené všetky riešenia rovnice (3.9). Návrat k substitúcii $u = \sqrt[3]{24} \cdot t$ nám dáva všetky riešenia rovnice $u^3 - 24 = 0$, ktoré môžeme zapísať takto:

$$u_1 = \sqrt[3]{24}, \quad u_2 = \sqrt[3]{24} \cdot \omega, \quad u_3 = \sqrt[3]{24} \cdot \overline{\omega},$$

kde sme použili označenie

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \boldsymbol{i}, \quad \overline{\omega} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \boldsymbol{i}.$$

Všimnime si, že platí $\omega^2 = \overline{\omega}$. Vzhľadom na to sa niekedy riešenia rovnice $u^3 - 24 = 0$ zapisujú v tvare

$$u_1 = \sqrt[3]{24}, \quad u_2 = \sqrt[3]{24} \cdot \omega, \quad u_3 = \sqrt[3]{24} \cdot \omega^2.$$

V ďalšom môžeme tiež s výhodou použiť rovnosť $\omega \cdot \overline{\omega} = 1$.

Použitím vzťahu (3.7) dostávame:

$$v_1 = \sqrt[3]{72}, \quad v_2 = \sqrt[3]{72} \cdot \overline{\omega}, \quad v_3 = \sqrt[3]{72} \cdot \omega.$$

Podľa (3.4) potom platí:

$$y_1 = \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{72}, \quad y_2 = \sqrt[3]{24} \cdot \omega + \sqrt[3]{72} \cdot \overline{\omega}, \quad y_3 = \sqrt[3]{24} \cdot \overline{\omega} + \sqrt[3]{72} \cdot \omega.$$

Poznamenajme, že riešením druhej rovnice z (3.8) dostaneme presne tie isté korene rovnice (3.3).

Návrat k substitúcii $x = y + a = y + 3$ nám dáva hľadané riešenia rovnice (3.1).

Záver. Rovnica (3.1) má v obore komplexných čísel tri korene:

$$x_1 = 3 + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{72}, \quad x_2 = 3 + \sqrt[3]{24} \cdot \omega + \sqrt[3]{72} \cdot \overline{\omega}, \quad x_3 = 3 + \sqrt[3]{24} \cdot \overline{\omega} + \sqrt[3]{72} \cdot \omega.$$

Rovnica (3.1) má v obore reálnych čísel jediný koreň:

$$x = 3 + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{72}.$$

Urobme si rekapituláciu použitého postupu. Rovnicu

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{3.11}$$

najskôr upravíme pomocou substitúcie $x = y - \frac{a}{3}$ do tvaru

$$y^3 + py + q = 0,$$

resp. (čo je pre ďalší výklad vhodnejšie) do tvaru[1)]

$$y^3 + 3ry - 2s = 0. \tag{3.12}$$

Riešenie rovnice (3.12) hľadáme v tvare súčtu $y = u + v$. Podľa (3.12) a (3.5) máme

$$u^3 + 3uvy + v^3 = -3ry + 2s. \tag{3.13}$$

Porovnaním ľavej a pravej strany dostávame sústavu rovníc:

$$uv = -r, \quad u^3 + v^3 = 2s. \tag{3.14}$$

Z prvej rovnice vyjadríme

$$v = -\frac{r}{u} \tag{3.15}$$

[1)] kde položíme $p = 3r$, $q = -2s$

a dosadíme do druhej[2)]

$$\begin{aligned} u^3 - \left(\frac{r}{u}\right)^3 &= 2s \quad /\cdot u^3 \\ u^6 - 2su^3 - r^3 &= 0 \\ \zeta^2 - 2s\zeta - r^3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Rovnica (3.16) sa nazýva *kvadratická rezolventa* kubickej rovnice (3.12). Riešenie kubickej rovnice sme teda transformovali na riešenie kvadratickej rovnice (3.16) a dvoch binomických rovníc tretieho stupňa $u^3 = \zeta_1$ a $u^3 = \zeta_2$. Ku každému z riešení u_1, u_2 a u_3 nájdeme príslušné v_1, v_2 a v_3 podľa vzťahu (3.15). Potom $y_1 = u_1 + v_1$, $y_2 = u_2 + v_2$ a $y_3 = u_3 + v_3$. Nakoniec máme $x_1 = y_1 - \frac{a}{3}$, $x_2 = y_2 - \frac{a}{3}$ a $x_3 = y_3 - \frac{a}{3}$.

Teraz však musíme prezradiť, že aj keď nám uvedený postup umožňuje riešiť ľubovoľnú kubickú rovnicu, jeho použiteľnosť pri praktických výpočtoch je veľmi obmedzená. Môžete sa o tom presvedčiť na príklade rovnice $x^3 - 7x - 6 = 0$. Ľahko môžete overiť, že jej korene sú $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ a $x_3 = 3$. Ale jej kvadratická rezolventa má korene $\zeta_{1,2} = 3 \pm \dfrac{10}{3\sqrt{3}} \cdot \boldsymbol{i}$. Pokúste sa dokončiť príklad naznačeným spôsobom samostatne.

Pomocou uvedeného postupu možno odvodiť tzv. *Cardanove vzorce*:

Pre korene y_1, y_2, y_3 rovnice (3.12) platí

$$y_1 = u + v, \quad y_2 = \omega \cdot u + \overline{\omega} \cdot v, \quad y_3 = \overline{\omega} \cdot u + \omega \cdot v,$$

kde

$$u = \sqrt[3]{s + \sqrt{s^2 + r^3}}, \quad v = \sqrt[3]{s - \sqrt{s^2 + r^3}},$$

pričom tretie odmocniny (v obore komplexných čísel) volíme tak, aby $uv = -r$.

[2)] pričom použijeme substitúciu $\zeta = u^3$

4. Rovnice štvrtého stupňa

Každý mnohočlen s reálnymi koeficientami (aspoň tretieho stupňa) možno rozložiť na súčin lineárnych a (nanajvýš) kvadratických činiteľov.[3)]

Príklad 4.1. Máme rozložiť na súčin mnohočlen

$$x^4 + x^2 + 1. \tag{4.1}$$

1) Chce to len trochu skúseností a hľadaný rozklad objavíme:

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x).$$

Ľahko sa môžete presvedčiť, že získané kvadratické trojčleny nemajú reálne korene. Pokiaľ teda pracujeme v reálnom obore, príklad je vyriešený.

Záver. Mnohočlen (4.1) môžeme rozložiť na súčin

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

2) V prípade náhleho výpadku invencie môžeme riešiť tento príklad metódou neurčitých koeficientov. Hľadáme rozklad v tvare

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1).$$

Pravú stranu roznásobíme a porovnáme koeficienty pri odpovedajúcich si mocninách premennej x.

$$\begin{aligned}
&& x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + ax^3 + x^2 + bx^3 + abx^2 + bx + x^2 + ax + 1\\
&& x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + (a+b)x^3 + (ab+2)x^2 + (a+b)x + 1\\
x^3: && 0 &= a + b\\
x^2: && 1 &= ab + 2\\
x^1: && 0 &= a + b
\end{aligned}$$

Riešením takto vzniknutej sústavy rovníc dostávame $a = 1$, $b = -1$, resp. $a = -1$, $b = 1$. Obidve možnosti vedú k tomu istému rozkladu (až na poradie činiteľov).

Záver. Mnohočlen (4.1) môžeme rozložiť na súčin

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

[3)] Schwarz, Š.: Základy náuky o riešení rovníc, Vydavateľstvo SAV, Bratislava, 1967, str. 52.

3) V tomto špeciálnom prípade sa nám ponúka ešte iná možnosť, pri ktorej nájdeme najskôr rozklad v obore komplexných čísel. Všimnime si, že mnohočlen (4.1) je bikvadratický, t. j. substitúciou $x^2 = t$ ho môžeme previesť na kvadratický trojčlen:

$$x^4 + x^2 + 1 = t^2 + t + 1.$$

Pretože korene mnohočlena $t^2 + t + 1$ sú

$$t_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \boldsymbol{i},$$

môžeme ho rozložiť na súčin koreňových činiteľov

$$t^2 + t + 1 = (t - t_1)(t - t_2).$$

Mnohočlen $x^4 + x^2 + 1$ sme teda rozložili na súčin

$$x^4 + x^2 + 1 = \left(x^2 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \boldsymbol{i}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \boldsymbol{i}\right).$$

Zostáva nám teda vyriešiť (v obore komplexných čísel) dve kvadratické rovnice

$$x^2 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \boldsymbol{i} = 0 \qquad \text{a} \qquad x^2 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \boldsymbol{i} = 0.$$

Ich korene sú[4)]

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \boldsymbol{i}, & x_3 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \boldsymbol{i}, \\ x_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \boldsymbol{i}, & x_4 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \boldsymbol{i}. \end{aligned}$$

Mnohočlen $x^4 + x^2 + 1$ sme teda rozložili na súčin

$$\begin{aligned} &x^4 + x^2 + 1 = (x - x_1)(x - x_3)(x - x_2)(x - x_4) = \\ &= \underbrace{\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \boldsymbol{i}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \boldsymbol{i}\right)}_{=x^2 - x + 1} \cdot \underbrace{\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \boldsymbol{i}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \boldsymbol{i}\right)}_{=x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

Záver. Mnohočlen (4.1) môžeme rozložiť na súčin

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

---

4) Môžeme ich nájsť napr. metódou neurčitých koeficientov, pričom položíme $x = r + s \cdot i$.

Príklad 4.2. Máme rozložiť na súčin mnohočlen

$$x^4 - x^2 + 1. \tag{4.2}$$

Mechanické kopírovanie postupu z predchádzajúceho príkladu na prvý pohľad nevedie k cieľu:

$$x^4 - x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 = (x^2 - 1)^2 + x^2.$$

Nie je to však pravda. Stačí prejsť ku komplexným číslam a využiť pritom vzorec

$$a^2 + b^2 = (a + b \cdot \boldsymbol{i})(a - b \cdot \boldsymbol{i}).$$

Potom

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 + x^2 = (x^2 - 1 + x \cdot \boldsymbol{i})(x^2 - 1 - x \cdot \boldsymbol{i}).$$

Zostáva nám teda vyriešiť (v obore komplexných čísel) dve kvadratické rovnice

$$x^2 + x \cdot \boldsymbol{i} - 1 = 0 \qquad \text{a} \qquad x^2 - x \cdot \boldsymbol{i} - 1 = 0.$$

Dokončenie tohto riešenia[5)] prenechávame čitateľovi ako užitočné cvičenie.

Namiesto toho si ukážeme, že pôvodná myšlienka nebola zlá, len sme mali postupovať rafinovanejšie[6)]

$$x^4 - x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2 = (x^2 + 1)^2 - 3x^2 = (x^2 + 1 + \sqrt{3}x)(x^2 + 1 - \sqrt{3}x).$$

Záver. Mnohočlen (4.2) môžeme rozložiť na súčin

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1).$$

Poznámka. V tomto príklade by sme mohli použiť aj ostatné spôsoby riešenia, ktoré boli naznačené v príklade 4.1. Presvedčte sa o tom samostatne, je to užitočné cvičenie.

---

5) V prvej rovnici použijeme substitúciu $x = t - \frac{1}{2} \cdot i$, v druhej $x = t + \frac{1}{2} \cdot i$.

6) Príbeh tohto príkladu je veľmi poučný, pozrite si článok
Dag Hrubý: O jednom rozkladu, Učitel matematiky 8, 3(35), 2000, 172–173.

Príklad 4.3. Máme rozložiť na súčin mnohočlen

$$x^8 + x^4 + 1. \tag{4.3}$$

S využitím skúseností, ktoré sme získali pri riešení príkladu 4.1, dostávame

$$x^8 + x^4 + 1 = x^8 + 2x^4 + 1 - x^4 = (x^4 + 1)^2 - x^4 = (x^4 + 1 - x^2)(x^4 + 1 + x^2).$$

Rozklady mnohočlenov $x^4 - x^2 + 1$ a $x^4 + x^2 + 1$ sme už našli v predchádzajúcich príkladoch.

Záver. Mnohočlen (4.3) môžeme rozložiť na súčin

$$x^8 - x^4 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1).$$

Poznámka. Substitúciou $x^2 = t$ môžeme previesť mnohočlen (4.3) do tvaru

$$x^8 + x^4 + 1 = t^4 + t^2 + 1,$$

t. j. na mnohočlen (4.1), avšak vyjadrený pomocou premennej t. Teda s využitím príkladu 4.1 dostávame

$$x^8 + x^4 + 1 = t^4 + t^2 + 1 = (t^2 - t + 1)(t^2 + t + 1) = (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1).$$

S algebraickými rovnicami štvrtého stupňa sa môžeme často stretnúť pri riešení iracionálnych rovníc. Budeme to ilustrovať na príklade.

Príklad 4.4. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$x^2 + \sqrt{x + 5} = 5. \tag{4.4}$$

Umocnením a jednoduchými úpravami ju prevedieme na rovnicu

$$x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0, \tag{4.5}$$

ktorá však s rovnicou (4.4) nie je ekvivalentná. Preto budeme musieť na záver vykonať skúšku správnosti.

Použijeme metódou neurčitých koeficientov.

$$x^4 - 10x^2 - x + 20 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d). \tag{4.6}$$

Roznásobením pravej strany a porovnaním koeficientov pri jednotlivých mocninách premennej x dostávame sústavu rovníc

$$\begin{aligned} a + c &= 0, \\ ac + b + d &= -10, \\ ad + bc &= -1, \\ bd &= 20. \end{aligned}$$

Táto sústava je nelineárna. Pri jej riešení použijeme podobnú myšlienku ako pri hľadaní celočíselných koreňov algebraických rovníc. Z poslednej rovnice tejto sústavy vyplýva, že ak čísla b a d sú celé, treba ich hľadať medzi deliteľmi čísla 20. Za b postupne dosadzujeme čísla 1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5. Sústavu, ktorá má riešenie, dostaneme pre $b = -4$. Táto sústava má potom tvar:

$$\begin{aligned} a + c &= 0, \\ ac &= -1, \\ -5a - 4c &= -1. \end{aligned}$$

Jej riešením sú čísla $a = 1$, $c = -1$, $d = -5$. Teda rovnicu (4.5) môžeme napísať v tvare

$$(x^2 + x - 4)(x^2 - x - 5) = 0.$$

Jej korene sú

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2},\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2},\ x_3 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2},\ x_4 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}.$$

Skúškou správnosti sa môžeme presvedčiť, že riešením rovnice (4.4) sú iba čísla x_1 a x_4. Pre ilustráciu prevedieme skúšku pre x_1. Dosadením $a = 9$, $b = 64$ do vzorca

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b}}$$

dostávame identitu

$$\sqrt{17} + 1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{9 + \sqrt{17}},$$

ktorú použijeme v nasledujúcich úpravách:

$$x_1^2 + \sqrt{x_1 + 5} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{9 + \sqrt{17}}}{\sqrt{2}} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{17} + 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 5.$$

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (4.4) je množina

$$P = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \right\}.$$

Príklad 4.5. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0. \tag{4.7}$$

Metódou neurčitých koeficientov sa dostaneme k nasledujúcej sústave rovníc.

$$\begin{aligned} a + c &= -1, \\ ac + b + d &= -3, \\ ad + bc &= 1, \\ bd &= 1. \end{aligned}$$

Pre $b = -1$ dostávame $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $c = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $d = -1$. Potom rovnicu (4.7) upravíme do tvaru

$$\left(x^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot x - 1\right) \cdot \left(x^2 - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot x - 1\right) = 0.$$

Záver. Korene rovnice (4.7) sú

$$x_{1,2} = \frac{1+\sqrt{5} \pm \sqrt{22 + 2\cdot\sqrt{5}}}{4}, \ x_{3,4} = \frac{1-\sqrt{5} \pm \sqrt{22 - 2\cdot\sqrt{5}}}{4}.$$

Nasledujúci príklad ukazuje silu metódy neurčitých koeficientov.

Príklad 4.6. Máme rozložiť na súčin mnohočlen

$$x^4 + x^3 + 5x^2 + 2x + 4. \tag{4.8}$$

Rozklad mnohočlena (4.8) budeme hľadať v tvare

$$x^4 + x^3 + 5x^2 + 2x + 4 = (x^2 + px + q) \cdot (x^2 + rx + s). \tag{4.9}$$

Po roznásobení pravej strany a porovnaní koeficientov pri rovnakých mocninách premennej x dostávame sústavu rovníc. Sústavu, ktorá má riešenie, dostaneme pre $q = 2$. Táto sústava má potom tvar:

$$\begin{aligned} p + r &= 1 \\ 4 + pr &= 5 \\ 2p + 2r &= 2. \end{aligned}$$

Po jej vyriešení a dosadení do (4.9) dostávame

$$x^4 + x^3 + 5x^2 + 2x + 4 = \left(x^2 + \frac{1 + \sqrt{3} \cdot \boldsymbol{i}}{2} \cdot x + 2\right) \cdot \left(x^2 + \frac{1 - \sqrt{3} \cdot \boldsymbol{i}}{2} \cdot x + 2\right).$$

Tým sa nám otvára cesta k nájdeniu všetkých koreňov daného mnohočlena a teda aj k nájdeniu rozkladu s reálnymi koeficientami. Pokúste sa dokončiť tento príklad samostatne.

Záver. Mnohočlen (4.8) môžeme rozložiť na súčin

$$\left(x^2 + \tfrac{1+A}{2} \cdot x + \tfrac{1+\sqrt{73}}{4} + \tfrac{A+\sqrt{3}\cdot B}{8}\right) \cdot \left(x^2 + \tfrac{1-A}{2} \cdot x + \tfrac{1+\sqrt{73}}{4} - \tfrac{A+\sqrt{3}\cdot B}{8}\right),$$

kde

$$A = \sqrt{2 \cdot \sqrt{73} - 17}, \qquad B = \sqrt{2 \cdot \sqrt{73} + 17}.$$

Na záver poznamenajme, že aj keď sa metódou neurčitých koeficientov nedá riešiť každá rovnica štvrtého stupňa s celočíselnými koeficientami[7)], jednoduchosť tejto metódy nás oprávňuje odporúčať jej používanie.

[7)] napr. $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0$

5. Rovnice piateho stupňa

Príklad 5.1. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$x^5 + x + 1 = 0. \tag{5.1}$$

Položme $f(x) = x^5 + x + 1$. Pretože funkcia $y = f(x)$ je spojitá, $f(-1) = -1$ a $f(0) = 1$, rovnica (5.1) má aspoň jeden reálny koreň ležiaci medzi číslami -1 a 0. Pretože funkcia $y = f(x)$ je rastúca[8)], tento koreň je jediný.

Pokúsime sa rozložiť polynóm $x^5 + x + 1$ na súčin dvoch polynómov nižšieho stupňa metódou neurčitých koeficientov:

$$x^5 + x + 1 = (x^3 + ax^2 + bx + 1) \cdot (x^2 + cx + 1). \tag{5.2}$$

Najskôr roznásobíme pravú stranu:

$$x^5 + x + 1 = x^5 + (a + c)x^4 + (b + ac + 1)x^3 + (a + bc + 1)x^2 + (b + c)x + 1$$

a potom porovnáme medzi sebou koeficienty pri jednotlivých mocninách x, čím dostaneme sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} a + c &= 0 \\ b + ac + 1 &= 0 \\ a + bc + 1 &= 0 \\ b + c &= 1 \end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy dostávame čísla $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$. Po ich dosadení do (5.2) dostávame hľadaný rozklad:

$$x^5 + x + 1 = (x^3 - x^2 + 1) \cdot (x^2 + x + 1). \tag{5.3}$$

Pretože rovnica $x^2 + x + 1 = 0$ nemá reálne korene, zostáva nám vyriešiť rovnicu

$$x^3 - x^2 + 1 = 0. \tag{5.4}$$

Spôsob riešenia kubickej rovnice bol vysvetlený v kapitole 3. Z tohto dôvodu riešenie rovnice (5.4) prenecháme čitateľovi ako užitočné cvičenie.

Záver. Jediným reálnym koreňom rovnice (5.1) je číslo

$$x = \frac{1}{3} - \sqrt[3]{\frac{25 - 3\sqrt{69}}{54}} - \sqrt[3]{\frac{25 + 3\sqrt{69}}{54}}.$$

Poznamenajme, že pomocou rozkladu (5.3) môžeme nájsť všetky riešenia rovnice (5.1) v obore komplexných čísel.

8) funkcia $y = f(x)$ je súčtom dvoch rastúcich funkcií $y = x^5$ a $y = x + 1$

Pred ďalším príkladom si najskôr pripravíme niektoré nástroje. Budeme uvažovať rovnicu

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{5.5}$$

ktorej všetky koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú celé čísla, pričom a_0 a a_n sú rôzne od nuly.

Teoréma 5.1. *Ak α je celočíselný koreň rovnice (5.5), potom číslo α je deliteľom čísla a_n.*

Tento jednoduchý poznatok nám dovoľuje nájsť všetky celočíselné korene rovnice (5.5). Stačí urobiť skúšku správnosti pre všetky celočíselné delitele čísla a_n. V prípade, že tento koeficient má veľa deliteľov, uvedený postup je zdĺhavý. Pomôže nám však nasledujúce tvrdenie. Položme

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \tag{5.6}$$

Teoréma 5.2. *Nech α je celočíselný koreň rovnice (5.5). Nech k je také celé číslo, že $f(k) \neq 0$. Potom číslo $\alpha - k$ je deliteľom čísla $f(k)$.*

Pri počítaní hodnôt funkcie $y = f(x)$ podľa vzorca (5.6) s výhodou používame Hornerovu schému. Podrobne bola vysvetlená v kapitole o kvadratických rovniciach.

Príklad 5.2. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 24x - 32 = 0. \tag{5.7}$$

Pretože delitele čísla $a_5 = -32$ sú $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16, \pm32$, skúšku správnosti by sme museli robiť pre 12 potenciálnych koreňov. Takže najskôr vypočítame hodnotu $f(1) = 1 + 3 - 1 + 2 - 24 - 32 = -51$. Podľa teorémy 5.2 číslo $\alpha - 1$ je deliteľom čísla $f(1) = -51$. Teda

$$\begin{gathered}\alpha - 1 \in \{-51, -17, -3, -1, 1, 3, 17, 51\}, \text{ t.j.}\\ \alpha \in \{-50, -16, -2, 0, 2, 4, 18, 52\}.\end{gathered}$$

Pretože α musí byť zároveň deliteľom čísla $a_5 = -32$, do úvahy prichádzajú iba čísla

$$\alpha \in \{-16, -2, 2, 4\}.$$

Teraz vypočítame hodnotu $f(-1) = -1+3+1+2+24-32 = -3$. Podľa teorémy 5.2 číslo $\alpha + 1$ je deliteľom čísla $f(-1) = -3$. Teda

$$\begin{gathered}\alpha + 1 \in \{-3, -1, 1, 3\}, \text{ t.j.}\\ \alpha \in \{-4, -2, 0, 2\}.\end{gathered}$$

Výber sa nám takto zúžil len na dvojicu čísel ± 2. Urobíme pre ne skúšku správnosti. Použijeme Hornerovu schému. (Skúšku správnosti môžeme robiť aj bez Hornerovej schémy, nie je to však také pohodlné.)

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 3 & -1 & 2 & -24 & -32 \\ -2 & & -2 & -2 & 6 & -16 & 80 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & 8 & -40 & \boxed{48} \end{array}$$

Pretože $f(-2) = 48 \neq 0$, číslo $x = -2$ nie je koreňom rovnice (5.7).

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 3 & -1 & 2 & -24 & -32 \\ 2 & & 2 & 10 & 18 & 40 & 32 \\ \hline & 1 & 5 & 9 & 20 & 16 & \boxed{0} \end{array}$$

Pretože $f(2) = 0$, číslo $x = 2$ je koreňom rovnice (5.7). Čísla v poslednom riadku Hornerovej schémy sú koeficienty mnohočlena

$$x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 20x + 16. \tag{5.8}$$

Mnohočlen (5.8) rozložíme na súčin dvoch kvadratických trojčlenov. Môžeme použiť metódu neurčitých koeficientov. Táto metóda je vysvetlená v kapitole 4. Pokúste sa dokončiť príklad touto metódou samostatne. Hľadaný rozklad je

$$x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 20x + 16 = \left(x^2 + \frac{5+\sqrt{21}}{2} \cdot x + 4\right) \cdot \left(x^2 + \frac{5-\sqrt{21}}{2} \cdot x + 4\right).$$

Zostáva nám vyriešiť iba dve kvadratické rovnice, čo si láskavý čitateľ urobí sám. Namiesto toho si ukážeme metódu, ktorá sa používa pri recipročných rovniciach. Zrejme číslo $x = 0$ nie je koreňom rovnice

$$x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 20x + 16 = 0. \tag{5.9}$$

Teda môžeme postupovať nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 20x + 16 &= 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{x^2} \\ x^2 + 5x + 9 + \frac{20}{x} + \frac{16}{x^2} &= 0 \\ \left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) + 5 \cdot \left(x + \frac{4}{x}\right) + 9 &= 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Položme $x + \dfrac{4}{x} = y$. Potom platí:

$$y^2 = \left(x + \frac{4}{x}\right)^2 = x^2 + 8 + \frac{16}{x^2},$$

odkiaľ dostávame

$$x^2 + \frac{16}{x^2} = y^2 - 8.$$

Po dosadení do rovnice (5.10) a po malej úprave dostávame kvadratickú rovnicu

$$y^2 + 5y + 1 = 0.$$

Ostatné výpočty prenechávame čitateľovi.

Záver. Korene rovnice (5.7) sú

$$x_1 = 2, \qquad x_{2,3} = \frac{-5 - \sqrt{21} \pm \sqrt{10 \cdot \sqrt{21} - 18}}{4}.$$

Nasledujúce tvrdenia hovoria o racionálnych koreňoch.

Teoréma 5.3. *Nech $\alpha = \frac{p}{q}$ je racionálny koreň rovnice (5.5). Predpokladajme, že zlomok $\frac{p}{q}$ je v základnom tvare*[9]*. Potom číslo p je deliteľom koeficienta a_n a číslo q je deliteľom koeficienta a_0.*

Teoréma 5.4. *Nech $\alpha = \frac{p}{q}$ je racionálny koreň rovnice (5.5). Predpokladajme, že zlomok $\frac{p}{q}$ je v základnom tvare. Nech k je také celé číslo, že $f(k) \neq 0$. Potom číslo $p - kq$ je deliteľom čísla $f(k)$.*

Príklad 5.3. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$4x^5 + 12x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 12x + 4 = 0. \tag{5.11}$$

Táto rovnica je síce recipročná, budeme ju však riešiť iným spôsobom. Pre $x = 1$ je ľavá strana rovnice (5.11) kladné číslo. Dosadením ľahko overíme, že číslo $x = -1$ je koreňom tejto rovnice. Výhodné je použiť Hornerovu schému.

	4	12	11	11	12	4
-1		-4	-8	-3	-8	-4
	4	8	3	8	4	$\boxed{0}$

Čísla v poslednom riadku Hornerovej schémy sú koeficienty mnohočlena

$$f(x) = 4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 8x + 4.$$

Zostáva nám teda vyriešiť rovnicu

$$4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 8x + 4 = 0. \tag{5.12}$$

[9] v ktorom sa už nedá krátiť

Najskôr hľadáme celočíselné korene. Musia to byť delitele čísla 4. Teraz vypočítame hodnotu $f(-1)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 8 & 3 & 8 & 4 \\ -1 & & -4 & -4 & 1 & -9 \\ \hline & 4 & 4 & -1 & 9 & \boxed{-5} \end{array}$$

Podľa teorémy 5.2 číslo $\alpha + 1$ je deliteľom čísla $f(-1) = -5$. Teda

$$\begin{aligned} \alpha + 1 &\in \{-5, -1, 1, 5\}, \text{ t. j.} \\ \alpha &\in \{-6, -2, 0, 4\}. \end{aligned}$$

Delitele čísla 4 sú z nich iba dva: -2 a 4. Číslo $\alpha = 4$ nemôže byť koreňom rovnice (5.12), pretože po dosadení bude ľavá strana kladná. Pre číslo $\alpha = -2$ použijeme Hornerovu schému.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 8 & 3 & 8 & 4 \\ -2 & & -8 & 0 & -6 & -4 \\ \hline & 4 & 0 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

Tým sme overili, že číslo $\alpha = -2$ je koreňom rovnice (5.12).

Čísla v poslednom riadku Hornerovej schémy sú koeficienty mnohočlena

$$g(x) = 4x^3 + 3x + 2.$$

Zostáva nám vyriešiť rovnicu

$$4x^3 + 3x + 2 = 0. \tag{5.13}$$

Použijeme teorému 5.3. Číslo $\alpha = \frac{p}{q}$ je racionálnym koreňom (v základnom tvare), ak

$$p \in \{-2, -1, 1, 2\}, \qquad q \in \{1, 2, 4\}.$$

Do úvahy teda prichádzajú čísla

$$\alpha \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}.$$

Teraz vypočítame hodnotu $g(-1) = -4 - 3 + 2 = -5$. Podľa teorémy 5.4 číslo $p + q$ je deliteľom čísla $g(-1) = -5$. Tým sa náš výber zúžil na čísla $\alpha = -2$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ a $\alpha = \frac{1}{4}$. Použijeme Hornerovu schému.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 0 & 3 & 2 \\ -\frac{1}{2} & & -2 & 1 & -2 \\ \hline & 4 & -2 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Teda číslo $\alpha = -\frac{1}{2}$ je koreňom rovnice (5.13).
Zostáva nám rovnica

$$4x^2 - 2x + 4 = 0.$$

Pretože jej diskriminant je záporný, táto rovnica nemá reálne korene. Argumentovať môžeme aj takto: $4x^2 - 2x + 4 = 3x^2 + x^2 - 2x + 1 + 3 = 3x^2 + (x-1)^2 + 3 > 3$.

Záver. Rovnica (5.11) má reálne korene

$$x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = -\frac{1}{2}.$$

6. Rovnice šiesteho stupňa

Príklad 6.1. V obore reálnych čísel riešte rovnicu:

$$6x^6 + 23x^5 - 2x^4 - 54x^3 - 2x^2 + 23x + 6 = 0. \tag{6.1}$$

Ide o recipročnú rovnicu. Pretože zrejme číslo $x = 0$ nie je jej koreňom, môžeme ju vydeliť výrazom x^3. Dostávame

$$6x^3 + 23x^2 - 2x - 54 - \frac{2}{x} + \frac{23}{x^2} + \frac{6}{x^3} = 0$$

$$6 \cdot \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 23 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) - 54 = 0 \tag{6.2}$$

Položme $x + \dfrac{1}{x} = y$. Potom platí

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}, \qquad y^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3 \cdot \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{=y} + \frac{1}{x^3},$$

$$y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}, \qquad y^3 - 3y = x^3 + \frac{1}{x^3}.$$

Po dosadení do (6.2) dostávame

$$6 \cdot \left(y^3 - 3y\right) + 23 \cdot \left(y^2 - 2\right) - 2y - 54 = 0$$

$$6y^3 + 23y^2 - 20y - 100 = 0. \tag{6.3}$$

Rovnica (6.3) je kubická rovnica. Metóda riešenia takýchto rovníc je vysvetlená v kapitole 3. Dokončenie riešenia týmto spôsobom prenechávame čitateľovi.

Ukážeme si, že vhodnejší bol iný postup. Veľmi rýchlo totiž môžeme overiť, že číslo $x = 1$ je koreňom danej algebraickej rovnice. Stačí totiž iba sčítať jej koeficienty. V našom prípade máme

$$6 + 23 - 2 - 54 - 2 + 23 + 6 = 0.$$

Ako vidíme, číslo $x = 1$ je koreňom rovnice (6.1). To nám dovoľuje znížiť stupeň rovnice. Najskôr si ukážeme, ako sa to bežne robí na strednej škole. Vydelíme polynóm $6x^6 + 23x^5 - 2x^4 - 54x^3 - 2x^2 + 23x + 6$ príslušným koreňovým činiteľom $x - 1$.

$$
\begin{array}{l}
(6x^6+23x^5-\ 2x^4-54x^3-\ 2x^2+23x+6):(x-1)=6x^5+29x^4+27x^3-27x^2-29x-6\\
-\underline{(6x^6-\ 6x^5)}\\
\qquad 29x^5-\ 2x^4\\
\qquad -\underline{(29x^5-29x^4)}\\
\qquad\qquad 27x^4-54x^3\\
\qquad\qquad -\underline{(27x^4-27x^3)}\\
\qquad\qquad\qquad -27x^3-\ 2x^2\\
\qquad\qquad\qquad -\underline{(-27x^3+27x^2)}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad -29x^2+23x\\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\underline{(-29x^2+29x)}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -6x+6\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\underline{(-6x+6)}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Zostáva nám vyriešiť recipročnú rovnicu piateho stupňa

$$6x^5+29x^4+27x^3-27x^2-29x-6=0.$$

Ďalší postup je štandardný.
Pretože číslo $x=1$ je koreňom tejto rovnice, vydelíme polynóm $6x^5+29x^4+27x^3-27x^2-29x-6$ koreňovým činiteľom $x-1$, čo nám dovoľuje znížiť stupeň rovnice. Získame recipročnú rovnicu štvrtého stupňa

$$6x^4+35x^3+62x^2+35x+6=0. \tag{6.4}$$

Rovnicu (6.4) vydelíme výrazom x^2 a použijeme substitúciu $y=x+\frac{1}{x}$. Dokončenie riešenia týmto spôsobom prenechávame čitateľovi ako užitočné cvičenie.

Najvýhodnejšie je najskôr hľadať celočíselné korene rovnice (6.1). Ak $x=c$ je celočíselný koreň rovnice (6.1), potom číslo c je deliteľom absolútneho člena, t. j. čísla 6. Pomocou Hornerovej schémy zistíme, ktoré z čísel ±1, ±2, ±3, ±6 je koreňom rovnice (6.1).

	6	23	−2	−54	−2	23	6
1		6	29	27	−27	−29	−6
	6	29	27	−27	−29	−6	$\boxed{0}$
1		6	35	62	35	6	
	6	35	62	35	6	$\boxed{0}$	
−2		−12	−46	−32	−6		
	6	23	16	3	$\boxed{0}$		
−3		−18	−15	−3			
	6	5	1	$\boxed{0}$			

Zostáva nám vyriešiť kvadratickú rovnicu $6x^2+5x+1=0$.
Pretože $6x^2+5x+1=(2x+1)(3x+1)$, jej korene sú $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{3}$.

Záver. Korene rovnice (6.1) sú $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{3}$, $x_3=-3$, $x_4=-2$, $x_5=1$, $x_6=1$.

7. Racionálne rovnice

V tomto odseku budeme riešiť rovnice, ktoré sa dajú upraviť do tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0,$$

kde čitateľ aj menovateľ sú mnohočleny.

Príklad 7.1. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}. \tag{7.1}$$

Postupujeme klasickým spôsobom:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{x}\\
\frac{2+x-2}{2(x-2)} &= \frac{1}{x}\\
\frac{x}{2(x-2)} &= \frac{1}{x}\\
x^2 &= 2(x-2)\\
x^2 - 2x + 4 &= 0\\
(x-1)^2 + 3 &= 0.
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Ako vidíme, rovnica (7.2) nemá reálne korene.

Záver. Rovnica (7.1) nemá reálne korene.

Príklad 7.2. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x} + \frac{1}{6}. \tag{7.3}$$

Postupujeme klasickým spôsobom:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{1}{6} &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x}\\
\frac{6-x^2+5x-6}{6\cdot(x^2-5x+6)} &= \frac{5-x}{5x^2}\\
\frac{x\cdot(5-x)}{6\cdot(x^2-5x+6)} &= \frac{5-x}{5x^2}.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Rozlíšime dva prípady.

a) Predpokladajme, že $5 - x = 0$. Potom číslo $x = 5$ je koreňom rovnice (7.4).
b) Predpokladajme, že $5 - x \neq 0$. Potom rovnicu (7.4) môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{x}{6 \cdot (x^2 - 5x + 6)} &= \frac{1}{5x^2} \\ 5x^3 &= 6 \cdot (x^2 - 5x + 6) \\ 5x^3 - 6x^2 + 30x - 36 &= 0 \\ x^2 \cdot (5x - 6) + 6 \cdot (5x - 6) &= 0 \\ (5x - 6) \cdot (x^2 + 6) &= 0. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Rovnica (7.5) má jediný reálny koreň $x = \frac{6}{5}$.

Záver. Rovnica (7.3) má dva reálne korene $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{6}{5}$.

Príklad 7.3. V obore reálnych čísel máme riešiť nasledujúcu rovnicu, kde čísla a, b sú parametre:

$$\frac{1}{x + a + b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \tag{7.6}$$

V rovnici (7.6) odstránime menovatele (za predpokladu, že sú nenulové):

$$\begin{aligned} \frac{1}{x + a + b} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \\ abx &= (ab + x(a + b))(x + a + b) \\ abx &= abx + x^2(a + b) + ab(a + b) + x(a + b)^2 \\ 0 &= (a + b)(x + a)(x + b). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Rozlíšime tri prípady.
a) Ak $a + b = 0$, potom každé reálne číslo x je riešením rovnice (7.7).
b) Ak $a + b \neq 0$, $a \neq b$, potom rovnica (7.7) má dva reálne rôzne korene $x_1 = -a$, $x_2 = -b$.
c) Ak $a + b \neq 0$, $a = b$, potom rovnica (7.7) má dvojnásobný koreň $x = -a$.

Záver. (Rovnica má zmysel len pre $a \neq 0$, $b \neq 0$.)
a) Ak $a + b = 0$, potom každé nenulové reálne číslo x je riešením rovnice (7.6).
b) Ak $a + b \neq 0$, $a \neq b$, potom rovnica (7.6) má dva korene $x_1 = -a$, $x_2 = -b$.
c) Ak $a + b \neq 0$, $a = b$, potom rovnica (7.6) má jediný koreň $x = -a$.

Príklad 7.4. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu, kde reálne číslo p je parameter:

$$3 - \frac{4p}{x+p} = \frac{4p}{x-p}. \tag{7.8}$$

Postupujeme klasickým spôsobom.

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{4p}{x-p} + \frac{4p}{x+p} \\ 3 &= \frac{8px}{(x-p)(x+p)} \\ 3x^2 - 8px - 3p^2 &= 0 \\ (x-3p)(3x+p) &= 0. \end{aligned}$$

Odtiaľ dostávame $x_1 = 3p$, $x_2 = -\frac{p}{3}$. Pretože v menovateli zlomku nemôže byť nula, musíme zabezpečiť, aby platilo $x \neq -p$, $x \neq p$. Takáto situácia nastáva iba pre $p = 0$. Ale vtedy rovnica (7.8) nemá reálne korene.

Záver. V prípade, že $p = 0$, rovnica (7.8) nemá reálne korene. V prípade, že $p \neq 0$, rovnica (7.8) má dva reálne korene $x_1 = 3p$, $x_2 = -\frac{p}{3}$.

Príklad 7.5. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu, kde reálne číslo p je parameter:

$$\frac{x}{x-p} + \frac{1}{x+p} = \frac{7}{p^2 - x^2}. \tag{7.9}$$

Rovnica (7.9) je za podmienok $x \neq \pm p$ ekvivalentná s kvadratickou rovnicou

$$x^2 + (p+1)x + 7 - p = 0. \tag{7.10}$$

Teraz sa budeme zaoberať podmienkami $x \neq \pm p$. Najskôr predpokladajme, že číslo $x = p$ je koreňom rovnice (7.10). Po dosadení dostávame

$$p^2 + (p+1)p + 7 - p = 0,$$

čo po úprave dáva

$$2p^2 + 7 = 0.$$

Takéto reálne číslo p však neexistuje. Tým sme ukázali, že reálne číslo $x = p$ nemôže byť koreňom rovnice (7.10).

Teraz budeme predpokladať, že reálne číslo $x = -p$ je koreňom rovnice (7.10). Po dosadení dostávame

$$(-p)^2 + (p+1) \cdot (-p) + 7 - p = 0,$$

čo po úprave dáva

$$-2p + 7 = 0.$$

Odtiaľ vyplýva, že reálne číslo $x = -p$ môže byť koreňom rovnice (7.10) iba v jedinom prípade, konkrétne pre $p = \frac{7}{2}$.

Teda rovnice (7.9) a (7.10) sú ekvivalentné práve vtedy, keď $p \neq \frac{7}{2}$. Zvyšok príkladu je už iba rutinný výpočet.

Záver.

Hodnoty parametra p	Korene rovnice (7.9)
$p = \frac{7}{2}$	$x = -1$
$p \in (-9, 3)$	nemá reálne korene
$p = -9$	$x = 4$
$p = 3$	$x = -2$
$p \in (-\infty, -9) \cup (3, \frac{7}{2}) \cup (\frac{7}{2}, \infty)$	$x_{1,2} = \dfrac{-p - 1 \pm \sqrt{(p+9)(p-3)}}{2}$

8. Metóda intervalov

Budeme riešiť nerovnice

$$f(x) > 0, \quad f(x) < 0, \quad f(x) \geqq 0, \quad f(x) \leqq 0,$$

ktorých ľavá strana je súčinom/podielom jednoduchších výrazov (najčastejšie lineárnych). Zahrnieme sem aj nerovnice, ktoré sa dajú do takéhoto tvaru prirodzeným spôsobom upraviť.

Pritom každá z nerovníc $f(x) \geqq 0$ a $f(x) \leqq 0$ je zložená z dvoch alternatív:

$$\begin{array}{ccc} f(x) \geqq 0, & & f(x) \leqq 0, \\ \swarrow \searrow & & \swarrow \searrow \\ f(x) > 0 \;\text{ alebo }\; f(x) = 0, & & f(x) < 0 \;\text{ alebo }\; f(x) = 0. \end{array}$$

Korene rovnice

$$f(x) = 0.$$

patria do oboru pravdivosti každej z nerovníc: $f(x) \geqq 0$ a $f(x) \leqq 0$. Naopak, nepatria do oboru pravdivosti ani jednej z nerovníc: $f(x) > 0$ a $f(x) < 0$. Tieto body spravidla rozdelia definičný obor nerovnice na intervaly. Krajné body týchto intervalov sa nazývajú *kritické body.*

Postup riešenia si najlepšie vysvetlíme na príkladoch.

Príklad 8.1. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\frac{(x-1)^2 \cdot 5x \cdot (x+2)}{(x-4)(x-5)^2} \geqq 0. \tag{8.1}$$

Pretože nulou sa deliť nedá, namiesto x nemôžeme dosadiť ani číslo 4, ani číslo 5. Nerovnica (8.1) má preto zmysel len pre

$$x \neq 4 \quad \text{a} \quad x \neq 5. \tag{8.2}$$

Nerovnica (8.1) je zložená z dvoch alternatív:

$$\frac{(x-1)^2 \cdot 5x \cdot (x+2)}{(x-4)(x-5)^2} > 0 \quad \text{alebo} \quad \frac{(x-1)^2 \cdot 5x \cdot (x+2)}{(x-4)(x-5)^2} = 0.$$

Najskôr vyriešime rovnicu

$$\frac{(x-1)^2 \cdot 5x \cdot (x+2)}{(x-4)(x-5)^2} = 0. \tag{8.3}$$

Zlomok je rovný nule práve vtedy, keď jeho čitateľ je rovný nule a jeho menovateľ je od nuly rôzny. Teda oborom pravdivosti rovnice (8.3) je množina

$$P_0 = \{-2, 0, 1\}.$$

Teraz prejdeme k riešeniu nerovnice

$$\frac{(x-1)^2 \cdot 5x \cdot (x+2)}{(x-4)(x-5)^2} > 0. \tag{8.4}$$

Pretože čísla z množiny P_0 nepatria do oboru pravdivosti nerovnice (8.4), budeme v ďalšom predpokladať, že platí

$$x \neq -2, \qquad x \neq 0 \quad \text{a} \quad x \neq 1. \tag{8.5}$$

Pretože podľa (8.2) platí $(x-5)^2 > 0$ a podľa (8.5) platí $(x-1)^2 > 0$, nerovnicu (8.4) môžeme upraviť takto:

$$\frac{(x-1)^2 \cdot 5x \cdot (x+2)}{(x-4)(x-5)^2} > 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{(x-5)^2}{(x-1)^2}$$

$$\frac{5x \cdot (x+2)}{x-4} > 0. \tag{8.6}$$

Teraz potrebujeme zistiť rozloženie znamienok jednotlivých lineárnych členov v zlomku

$$\frac{5x \cdot (x+2)}{x-4}. \tag{8.7}$$

Pretože podľa (8.2) a (8.5) sme z reálnej osi vylúčili body -2, 0, 1, 4, 5, množina prípustných hodnôt pozostáva z intervalov:

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 0), \quad (0, 1), \quad (1, 4), \quad (4, 5), \quad (5, \infty).$$

Teraz si ukážeme dva efektívne prístupy k analýze znamienok lineárnych členov, z ktorých sa zlomok (8.7) skladá.

a) Pretože

$$\begin{aligned} 5x &< 0 \quad \Big/ \cdot \tfrac{1}{5} \qquad\qquad & 5x &> 0 \quad \Big/ \cdot \tfrac{1}{5} \\ x &< 0 & x &> 0, \end{aligned}$$

lineárny člen $5x$ má takéto rozloženie znamienok v jednotlivých intervaloch:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 4)$	$(4, 5)$	$(5, \infty)$
$\frac{(5x)\cdot(x+2)}{(x-4)}$	$\frac{(-)\cdot(\ )}{(\ )}$	$\frac{(-)\cdot(\ )}{(\ )}$	$\frac{(+)\cdot(\ )}{(\ )}$	$\frac{(+)\cdot(\ )}{(\ )}$	$\frac{(+)\cdot(\ )}{(\ )}$	$\frac{(+)\cdot(\ )}{(\ )}$

Pretože

$$x + 2 < 0 \quad / -2 \qquad\qquad x + 2 > 0 \quad / -2$$
$$x < -2 \qquad\qquad\qquad x > -2,$$

lineárny člen $x + 2$ má takéto rozloženie znamienok v jednotlivých intervaloch:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 4)$	$(4, 5)$	$(5, \infty)$
$\frac{(5x)\cdot(x+2)}{(x-4)}$	$\frac{(-)\cdot(-)}{(\ )}$	$\frac{(-)\cdot(+)}{(\ )}$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(\ )}$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(\ )}$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(\ )}$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(\ )}$

Pretože

$$x - 4 < 0 \quad / +4 \qquad\qquad x - 4 > 0 \quad / +4$$
$$x < 4 \qquad\qquad\qquad x > 4,$$

lineárny člen $x - 4$ má takéto rozloženie znamienok v jednotlivých intervaloch:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 4)$	$(4, 5)$	$(5, \infty)$
$\frac{(5x)\cdot(x+2)}{(x-4)}$	$\frac{(-)\cdot(-)}{(-)}$	$\frac{(-)\cdot(+)}{(-)}$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(-)}$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(-)}$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(+)}$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(+)}$

Pretože súčin/podiel dvoch nenulových čísel je záporný práve vtedy, keď jedno z nich je kladné a druhé záporné (v ostatných prípadoch je ich súčin/podiel kladný), máme

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 4)$	$(4, 5)$	$(5, \infty)$
$\frac{(5x)\cdot(x+2)}{(x-4)}$	$\frac{(-)\cdot(-)}{(-)}$	$\frac{(-)\cdot(+)}{(-)}$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(-)}$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(-)}$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(+)}$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(+)}$
tento zlomok je	záporný	<u>kladný</u>	záporný	záporný	<u>kladný</u>	<u>kladný</u>

Zlomok (8.7) je kladný v intervaloch $(-2, 0)$, $(4, 5)$ a $(5, \infty)$. Teda oborom pravdivosti nerovnice (8.4) je množina

$$P_+ = (-2, 0) \cup (4, 5) \cup (5, \infty).$$

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (8.1) je množina

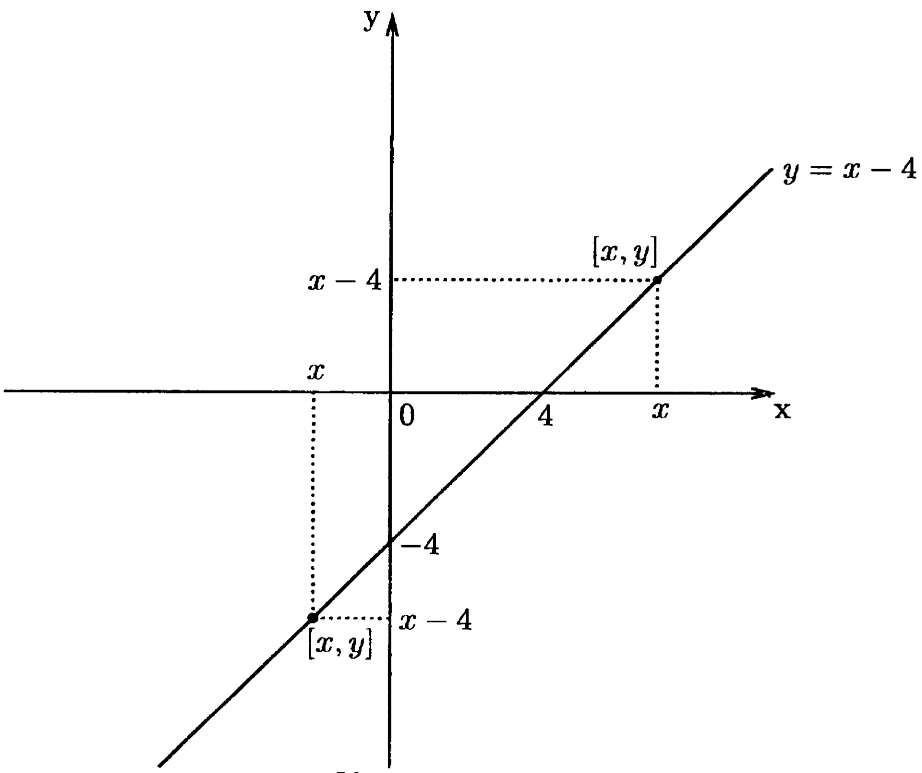
$$P = P_0 \cup P_+ = \langle -2, 0\rangle \cup \{1\} \cup (4, 5) \cup (5, \infty).$$

b) V druhom spôsobe určenia znamienok budeme využívať grafické znázornenie lineárnych členov.

Ak $a > 0$, funkcia $y = ax + b$ je rastúca
(voľne povedané – graf priamky ide z ľavého dolného rohu do pravého horného).

Ak $a < 0$, funkcia $y = ax + b$ je klesajúca
(voľne povedané – graf priamky ide z ľavého horného rohu do pravého dolného).

Načrtneme si graf funkcie $y = x - 4$. (Pozri obr. 8.1.) Týmto grafom je priamka, preto ju nedokážeme nakresliť celú, ale iba jej časť. Každá priamka sa však dá ľubovoľne predĺžiť na obidve strany. Vieme si teda predstaviť, ako tento graf pokračuje ďalej.

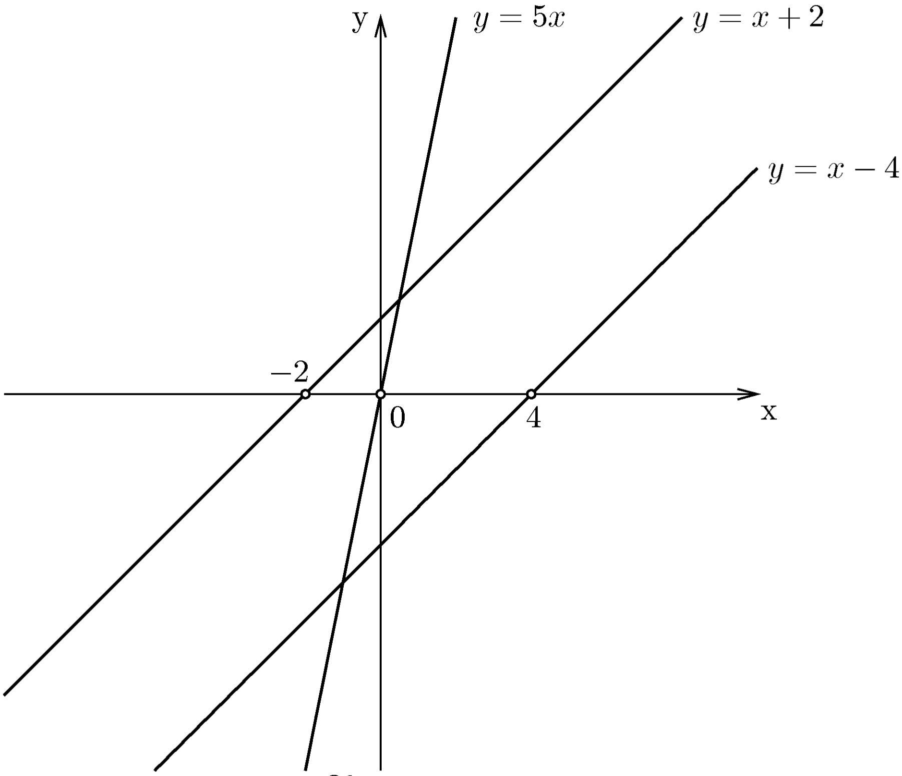


Obr. 8.1

Bohužiaľ, tento obrázok je statický – zachytáva iba dve (aj keď typické) polohy bodu $[x, y]$ ležiaceho na priamke $y = x - 4$. Zrozumiteľnejší je animovaný obrázok. Predstavme si, že bod $[x, y]$ sa pohybuje po priamke $y = x - 4$ a sledujme pritom jeho y-ovú súradnicu.

Z grafu vidíme, že pre $x > 4$ bod $[x, y]$, ležiaci na priamke $y = x - 4$, sa nachádza nad x-ovou osou, čiže jeho y-ová súradnica je kladná (t. j. $x - 4 > 0$); pre $x < 4$ bod $[x, y]$, ležiaci na priamke $y = x - 4$, sa nachádza pod x-ovou osou, čiže jeho y-ová súradnica je záporná (t. j. $x - 4 < 0$).

Teraz už iba pridáme grafy ostatných lineárnych funkcií. (Pozri obr. 8.2.)



Obr. 8.2

Odtiaľ už priamo dostávame tabuľku:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 4)$	$(4, 5)$	$(5, \infty)$
$\frac{(5x)\cdot(x+2)}{(x-4)}$	$\frac{(-)\cdot(-)}{(-)}$	$\frac{(-)\cdot(+)}{(-)}$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(-)}$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(-)}$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(+)}$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(+)}$
tento zlomok je	záporný	<u>kladný</u>	záporný	záporný	<u>kladný</u>	<u>kladný</u>

Zlomok (8.7) je kladný v intervaloch $(-2, 0)$, $(4, 5)$ a $(5, \infty)$. Teda oborom pravdivosti nerovnice (8.4) je množina

$$P_+ = (-2, 0) \cup (4, 5) \cup (5, \infty).$$

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (8.1) je množina

$$P = P_0 \cup P_+ = \langle -2, 0) \cup \{1\} \cup (4, 5) \cup (5, \infty).$$

V ďalších príkladoch budeme preferovať grafické znázornenie lineárnych členov.

Príklad 8.2. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\frac{(x+4)^2 \cdot (x-3)}{5x(4-x)(3x-1)} < 0. \tag{8.8}$$

Pretože nulou sa deliť nedá, namiesto x nemôžeme dosadiť žiadne z čísel 0, 4, $\frac{1}{3}$. Nerovnica (8.8) má preto zmysel len pre

$$x \neq 0,\ x \neq \tfrac{1}{3},\ x \neq 4. \tag{8.9}$$

Najskôr vyriešime rovnicu

$$\frac{(x+4)^2 \cdot (x-3)}{5x(4-x)(3x-1)} = 0. \tag{8.10}$$

Zlomok je rovný nule práve vtedy, keď jeho čitateľ je rovný nule a jeho menovateľ je od nuly rôzny. Teda oborom pravdivosti rovnice (8.10) je množina $P_0 = \{-4, 3\}$.

Teraz prejdeme k riešeniu nerovnice (8.8). Pretože čísla z množiny P_0 nepatria do oboru pravdivosti nerovnice (8.8), budeme v ďalšom predpokladať, že platí

$$x \neq -4 \qquad \text{a} \qquad x \neq 3. \tag{8.11}$$

Pretože podľa (8.11) platí $(x+4)^2 > 0$, nerovnicu (8.8) môžeme upraviť takto:

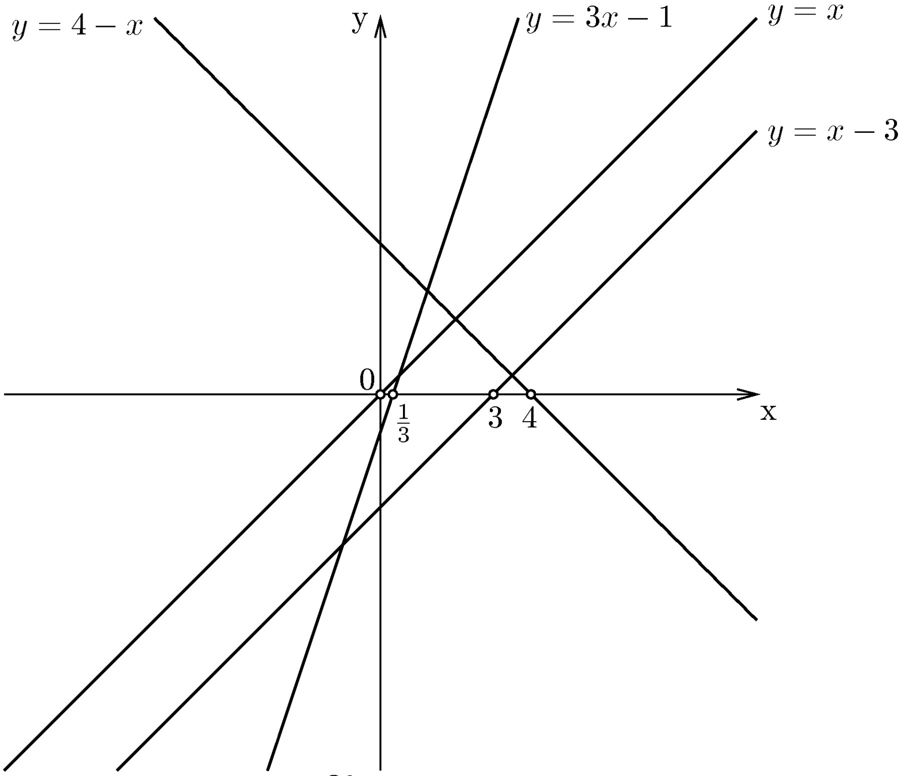
$$\frac{(x+4)^2 \cdot (x-3)}{5x(4-x)(3x-1)} < 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{5}{(x+4)^2}$$

$$\frac{x-3}{x(4-x)(3x-1)} < 0. \tag{8.12}$$

Teraz potrebujeme zistiť rozloženie znamienok jednotlivých lineárnych členov v zlomku

$$\frac{x-3}{x(4-x)(3x-1)}. \tag{8.13}$$

Načrtneme si grafy príslušných lineárnych funkcií. (Pozri obr. 8.3.)



Obr. 8.3

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 0)$	$(0, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, 3)$	$(3, 4)$	$(4, \infty)$
$\frac{x-3}{x(4-x)(3x-1)}$	$\frac{(-)}{(-)(+)(-)}$	$\frac{(-)}{(-)(+)(-)}$	$\frac{(-)}{(+)(+)(-)}$	$\frac{(-)}{(+)(+)(+)}$	$\frac{(+)}{(+)(+)(+)}$	$\frac{(+)}{(+)(-)(+)}$
tento zlomok je	záporný	záporný	kladný	záporný	kladný	záporný

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (8.8) je množina

$$P = (-\infty, -4) \cup (-4, 0) \cup (\tfrac{1}{3}, 3) \cup (4, \infty).$$

Príklad 8.3. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$(x+1)(x-3)^2(x-5)(x-4)^2(x-2) < 0. \tag{8.14}$$

Najskôr vyriešime rovnicu

$$(x+1)(x-3)^2(x-5)(x-4)^2(x-2) = 0. \tag{8.15}$$

Súčin sa rovná nule práve vtedy, keď aspoň jeden z činiteľov sa rovná nule. Oborom pravdivosti rovnice (8.15) je množina $P_0 = \{-1, 2, 3, 4, 5\}$.

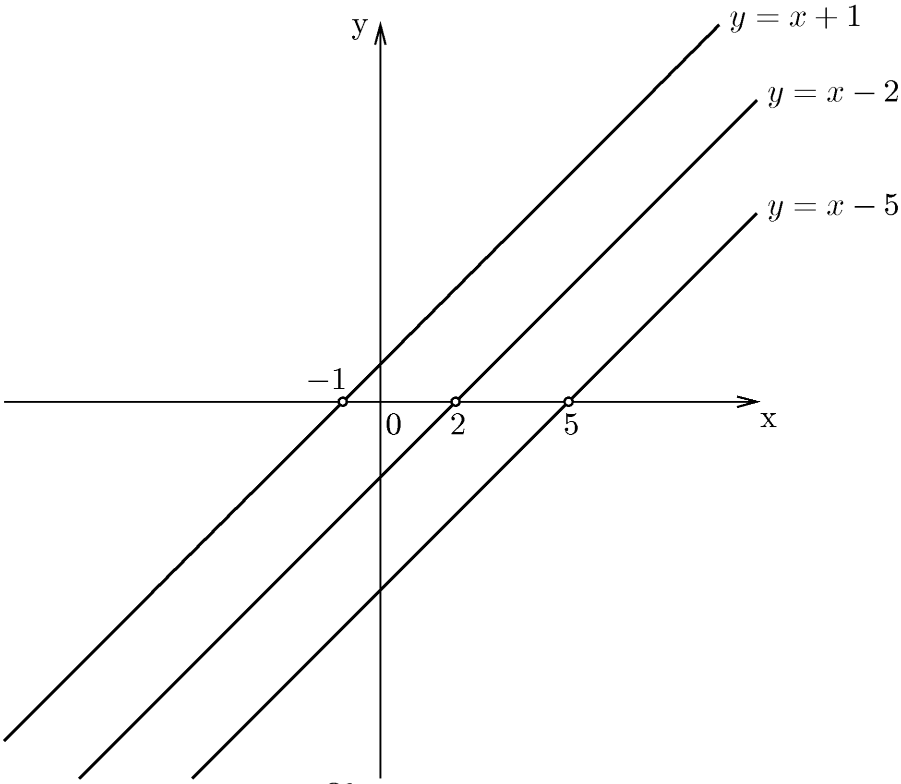
Teraz prejdeme k riešeniu nerovnice (8.14). Pretože čísla z množiny P_0 nepatria do oboru pravdivosti nerovnice (8.14), budeme v ďalšom predpokladať, že platí

$$x \neq -1,\ x \neq 2,\ x \neq 3,\ x \neq 4 \quad \text{a} \quad x \neq 5. \tag{8.16}$$

Pretože podľa (8.16) platí $(x-3)^2 > 0$ a $(x-4)^2 > 0$, nerovnicu (8.14) môžeme upraviť takto:

$$(x+1)(x-3)^2(x-5)(x-4)^2(x-2) < 0 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{(x-3)^2(x-4)^2}$$

$$(x+1)(x-5)(x-2) < 0. \tag{8.17}$$



Obr. 8.4

Pretože podľa (8.16) sme z reálnej osi vylúčili body -1, 2, 3, 4, 5, množina prípustných hodnôt pozostáva z intervalov:

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 2), \quad (2, 3), \quad (3, 4), \quad (4, 5), \quad (5, \infty).$$

Načrtneme si grafy príslušných lineárnych funkcií. (Pozri obr. 8.4.)

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,3)$	$(3,4)$	$(4,5)$	$(5,\infty)$
$(x+1)(x-5)(x-2)$	$(-)(-)(-)$	$(+)(-)(-)$	$(+)(-)(+)$	$(+)(-)(+)$	$(+)(-)(+)$	$(+)(+)(+)$
tento súčin je	záporný	kladný	záporný	záporný	záporný	kladný

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (8.14) je množina

$$P = (-\infty,-1) \cup (2,3) \cup (3,4) \cup (4,5).$$

Príklad 8.4. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$(x+4)^5(x+3)^6(x+2)^7(x-1)^8 \leqq 0. \tag{8.18}$$

Nerovnica (8.18) je zložená z dvoch alternatív:

$$(x+4)^5(x+3)^6(x+2)^7(x-1)^8 < 0 \quad \text{alebo} \quad (x+4)^5(x+3)^6(x+2)^7(x-1)^8 = 0.$$

Najskôr vyriešime rovnicu

$$(x+4)^5(x+3)^6(x+2)^7(x-1)^8 = 0. \tag{8.19}$$

Súčin sa rovná nule práve vtedy, keď aspoň jeden z činiteľov sa rovná nule. Oborom pravdivosti rovnice (8.19) je množina $P_0 = \{-4,-3,-2,1\}$. Teraz prejdeme k riešeniu nerovnice

$$(x+4)^5(x+3)^6(x+2)^7(x-1)^8 < 0. \tag{8.20}$$

Pretože čísla z množiny P_0 nepatria do oboru pravdivosti nerovnice (8.20), budeme v ďalšom predpokladať, že platí

$$x \neq -4, \qquad x \neq -3, \qquad x \neq -2 \qquad \text{a} \qquad x \neq 1. \tag{8.21}$$

Pretože podľa (8.21) platí $(x+4)^4 > 0$, $(x+3)^6 > 0$, $(x+2)^6 > 0$ a $(x-1)^8 > 0$, nerovnicu (8.20) môžeme upraviť takto:

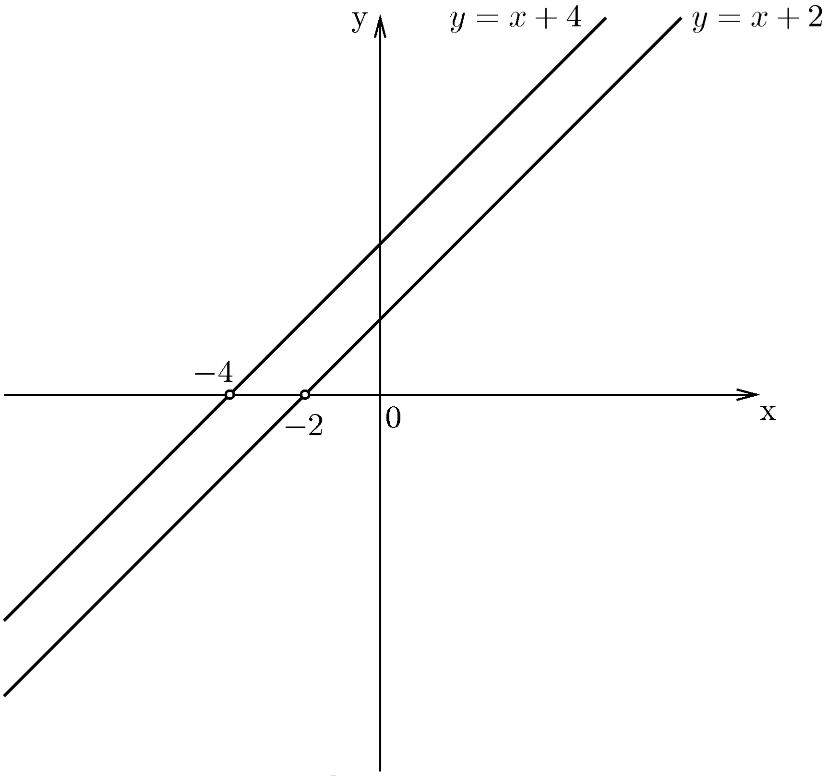
$$(x+4)^5(x+3)^6(x+2)^7(x-1)^8 < 0 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{(x+4)^4(x+3)^6(x+2)^6(x-1)^8}$$

$$(x+4)(x+2) < 0. \tag{8.22}$$

Pretože podľa (8.21) sme z reálnej osi vylúčili body −4, −3, −2, 1, množina prípustných hodnôt pozostáva z intervalov:

$$(-\infty, -4), \quad (-4, -3), \quad (-3, -2), \quad (-2, 1), \quad (1, \infty).$$

Načrtneme si grafy príslušných lineárnych funkcií. (Pozri obr. 8.5.)



Obr. 8.5

	$(-\infty, -4)$	$(-4, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, \infty)$
$(x+4)(x+2)$	$(-)(-)$	$(+)(-)$	$(+)(-)$	$(+)(+)$	$(+)(+)$
tento súčin je	kladný	záporný	záporný	kladný	kladný

Teda oborom pravdivosti nerovnice (8.20) je množina $P_- = (-4, -3) \cup (-3, -2)$.

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (8.18) je množina

$$P = P_0 \cup P_- = \langle -4, -2 \rangle \cup \{1\}.$$

Príklad 8.5. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\frac{2(x-4)}{(x-1)(x-7)} \geqq \frac{1}{x-2}. \tag{8.23}$$

V nerovnici (8.23) prenesieme najskôr zlomok z pravej strany na ľavú.

$$\begin{aligned} \frac{2(x-4)}{(x-1)(x-7)} &\geqq \frac{1}{x-2} \qquad \Big/ -\frac{1}{x-2} \\ \frac{2(x-4)}{(x-1)(x-7)} - \frac{1}{x-2} &\geqq 0. \end{aligned}$$

Teraz upravíme ľavú stranu na spoločného menovateľa.

$$\frac{2(x-4)(x-2)-(x-1)(x-7)}{(x-1)(x-2)(x-7)} \geqq 0$$

$$\frac{(2x^2-12x+16)-(x^2-8x+7)}{(x-1)(x-2)(x-7)} \geqq 0$$

$$\frac{x^2-4x+9}{(x-1)(x-2)(x-7)} \geqq 0 \tag{8.24}$$

Pretože $x^2-4x+9=(x-2)^2+5>0$, môžeme nerovnicu (8.24) upraviť takto:

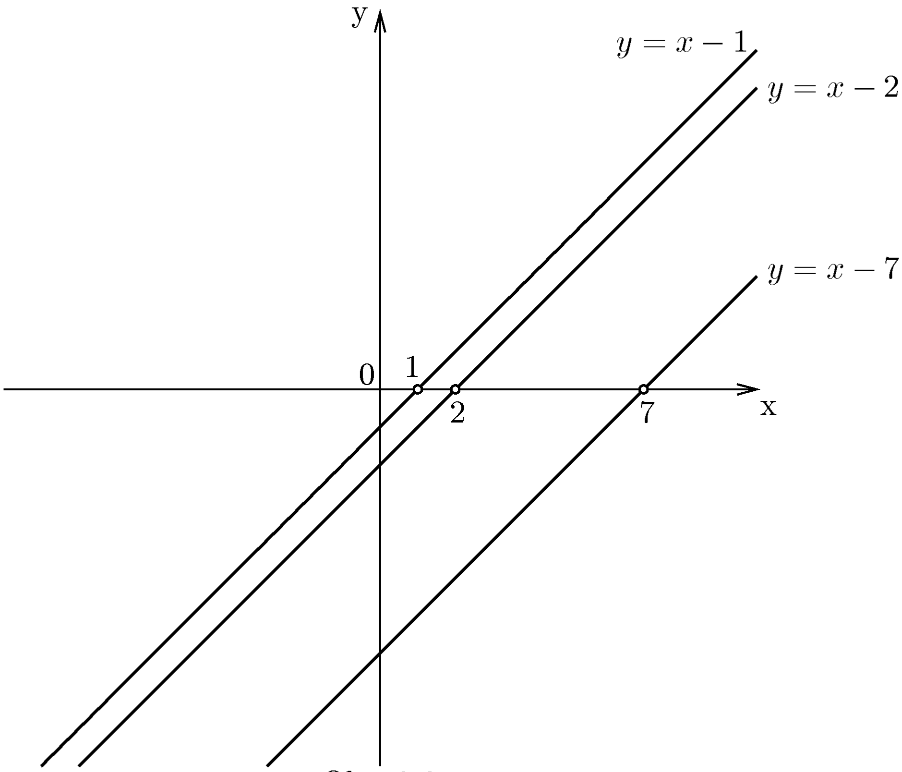
$$\frac{x^2-4x+9}{(x-1)(x-2)(x-7)} \geqq 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{x^2-4x+9}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-7)} \geqq 0. \tag{8.25}$$

Zlomok je rovný nule práve vtedy, keď jeho čitateľ je rovný nule a jeho menovateľ je od nuly rôzny. To sa však v nerovnici (8.25) nikdy nemôže stať. Preto je táto nerovnica ekvivalentná s nerovnicou

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-7)} > 0. \tag{8.26}$$

Načrtneme si grafy príslušných lineárnych funkcií. (Pozri obr. 8.6.)



Obr. 8.6

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 7)$	$(7, \infty)$
$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-7)}$	$\frac{1}{(-)(-)(-)}$	$\frac{1}{(+)(-)(+)}$	$\frac{1}{(+)(+)(+)}$	$\frac{1}{(+)(+)(+)}$
tento zlomok je	záporný	kladný	záporný	kladný

Teda oborom pravdivosti nerovnice (8.26) je množina $P_+ = (1, 2) \cup (7, \infty)$.

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (8.23) je množina

$$P = (1, 2) \cup (7, \infty).$$

Príklad 8.6. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\frac{x+4}{x^2-9} - \frac{2}{x+3} < \frac{4x}{3x-x^2}. \tag{8.27}$$

Pretože $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ a $3x - x^2 = x(3-x)$, namiesto x nemôžeme dosadiť žiadne z čísel -3, 0, 3. Nerovnica (8.27) má preto zmysel len pre

$$x \neq -3, \; x \neq 0 \quad \text{a} \quad x \neq 3. \tag{8.28}$$

Na základe tohto predpokladu nerovnicu (8.27) zjednodušíme:

$$\frac{x+4}{x^2-9} - \frac{2}{x+3} < \frac{4x}{3x-x^2}$$

$$\frac{x+4}{(x-3)(x+3)} - \frac{2}{x+3} < \frac{4x}{x(3-x)}$$

$$\frac{x+4}{(x-3)(x+3)} - \frac{2}{x+3} < \frac{4}{3-x}.$$

Teraz prenesieme zlomok z pravej strany na ľavú a potom upravíme zlomky na spoločného menovateľa:

$$\frac{x+4}{(x-3)(x+3)} - \frac{2}{x+3} < \frac{4}{3-x} \qquad \Big/ + \frac{4}{x-3}$$

$$\frac{x+4}{(x-3)(x+3)} - \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x-3} < 0$$

$$\frac{(x+4)-2(x-3)+4(x+3)}{(x-3)(x+3)} < 0$$

$$\frac{x+4-2x+6+4x+12}{(x-3)(x+3)} < 0$$

$$\frac{3x+22}{(x-3)(x+3)} < 0. \tag{8.29}$$

Do oboru pravdivosti nerovnice (8.29) nepatria riešenia rovnice

$$\frac{3x+22}{(x-3)(x+3)} = 0.$$

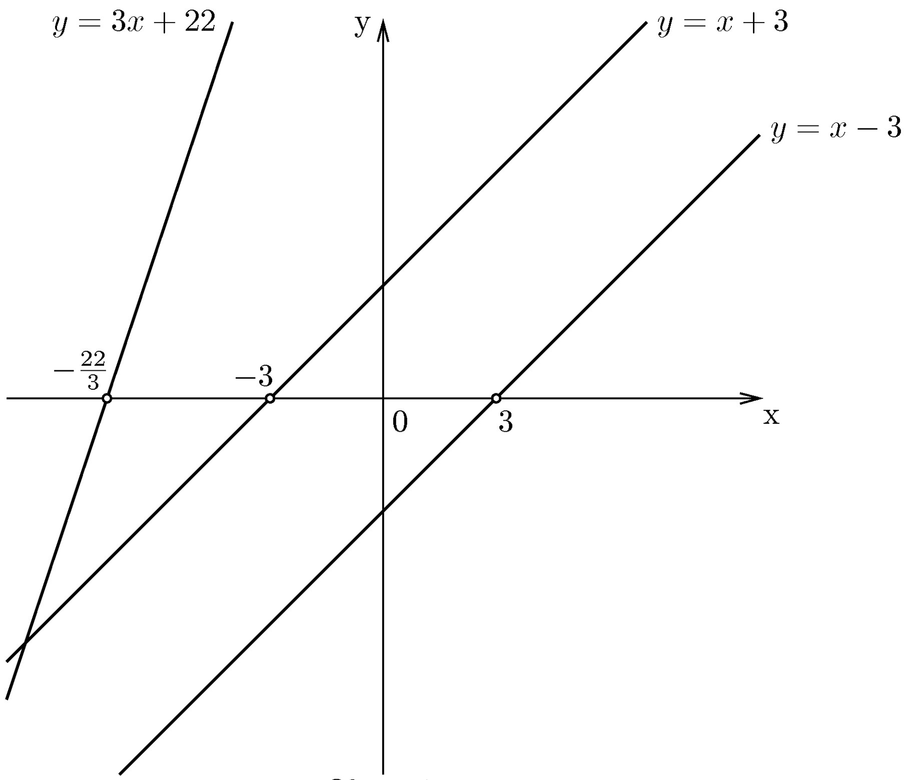
Pretože táto rovnica má jediné riešenie $x = -\frac{22}{3}$, budeme v ďalšom predpokladať, že platí

$$x \neq -\frac{22}{3}. \tag{8.30}$$

Vzhľadom na (8.28) a (8.30) množina prípustných hodnôt pozostáva z intervalov:

$$(-\infty, -\tfrac{22}{3}), \quad (-\tfrac{22}{3}, -3), \quad (-3, 0), \quad (0, 3), \quad (3, \infty).$$

Načrtneme si grafy príslušných lineárnych funkcií. (Pozri obr. 8.7.)



Obr. 8.7

	$(-\infty, -\frac{22}{3})$	$(-\frac{22}{3}, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$\frac{(3x+22)}{(x-3)(x+3)}$	$\frac{(-)}{(-)(-)}$	$\frac{(+)}{(-)(-)}$	$\frac{(+)}{(-)(+)}$	$\frac{(+)}{(-)(+)}$	$\frac{(+)}{(+)(+)}$
tento zlomok je	<u>záporný</u>	kladný	<u>záporný</u>	<u>záporný</u>	kladný

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (8.27) je množina

$$P = (-\infty, -\tfrac{22}{3}) \cup (-3, 0) \cup (0, 3).$$

Príklad 8.7. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\sqrt{x^2 - 1} \cdot (4 - x) \cdot \log_3(3 + x) > 0. \tag{8.31}$$

Pretože pod druhou odmocninou nemôže byť záporné číslo, musí platiť

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &\geqq 0 \\ (x-1)(x+1) &\geqq 0 \\ x \leqq -1 \quad \text{alebo} \quad x &\geqq 1. \end{aligned} \tag{8.32}$$

Pretože logaritmovať môžeme iba kladné čísla, musí platiť

$$x > -3. \tag{8.33}$$

Vzhľadom na (8.32) a (8.33) má nerovnica (8.31) zmysel len pre

$$-3 < x \leqq -1 \quad \text{alebo} \quad x \geqq 1. \tag{8.34}$$

V ďalšom teda budeme uvažovať len také reálne čísla x, pre ktoré platí (8.34).

Najskôr vyriešime rovnicu

$$\sqrt{x^2-1} \cdot (4-x) \cdot \log_3(3+x) = 0. \tag{8.35}$$

Súčin je rovný nule práve vtedy, keď aspoň jeden činiteľ je rovný nule.

Rovnica (8.35) je teda zložená z alternatív:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2-1} = 0 \quad &\text{alebo} \quad 4-x=0 \quad \text{alebo} \quad \log_3(3+x)=0\\
x^2-1=0 \quad &\text{alebo} \qquad\quad x=4 \quad \text{alebo} \quad 3+x=1\\
(x-1)(x+1)=0 \quad &\text{alebo} \qquad\quad x=4 \quad \text{alebo} \quad x=-2\\
x=1 \quad \text{alebo} \quad x=-1 \quad &\text{alebo} \qquad\quad x=4 \quad \text{alebo} \quad x=-2
\end{aligned}$$

Teda oborom pravdivosti rovnice (8.35) je množina

$$P_0 = \{-2, -1, 1, 4\}.$$

Pretože čísla z množiny P_0 nepatria do oboru pravdivosti nerovnice (8.31), budeme v ďalšom predpokladať, že platí

$$x \neq -2, \qquad x \neq -1, \qquad x \neq 1 \qquad \text{a} \qquad x \neq 4. \tag{8.36}$$

Pretože podľa (8.36) a (8.34) platí $\sqrt{x^2-1} > 0$, nerovnicu (8.31) môžeme upraviť takto:

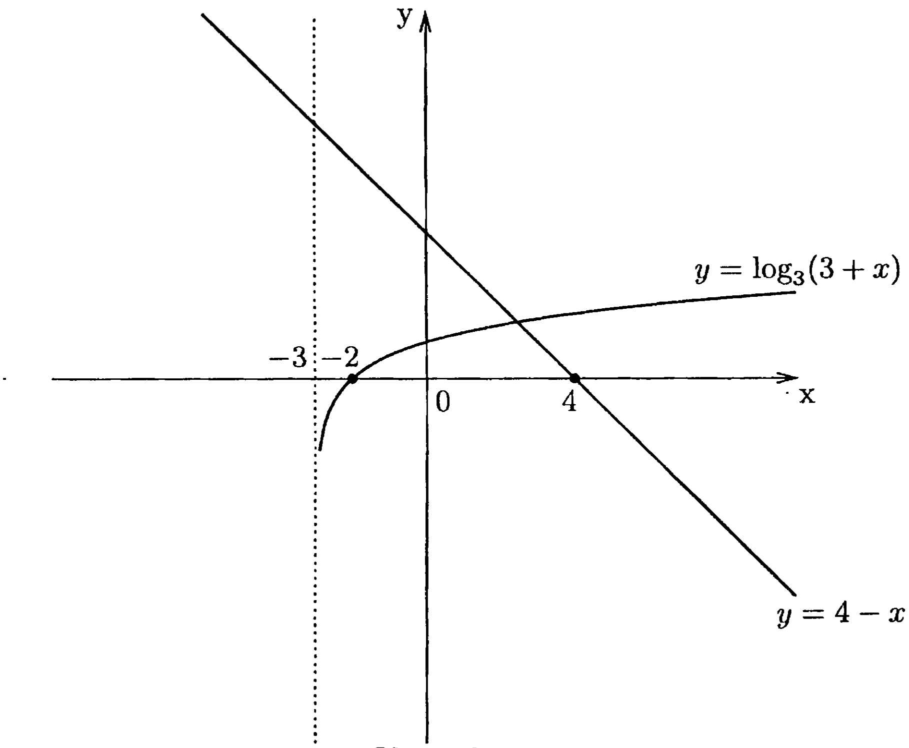
$$\sqrt{x^2-1} \cdot (4-x) \cdot \log_3(3+x) > 0 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(4-x) \cdot \log_3(3+x) > 0. \tag{8.37}$$

Vzhľadom na (8.36) a (8.34) množina prípustných hodnôt pozostáva z intervalov

$$(-3,-2), \quad (-2,-1), \quad (1,4), \quad (1,4), \quad (4,\infty).$$

Teraz určíme znamienka jednotlivých činiteľov v (8.37) na týchto intervaloch. Najskôr si načrtneme grafy príslušných funkcií. (Pozri obr. 8.8.)



Obr. 8.8

	$(-3,-2)$	$(-2.-1)$	$(1,4)$	$(4,\infty)$
$(4-x)\cdot\log_3(3+x)$	$(+)\cdot(-)$	$(+)\cdot(+)$	$(+)\cdot(+)$	$(-)\cdot(+)$
tento súčin je	záporný	kladný	kladný	záporný

Súčin $(4-x)\cdot\log_3(3+x)$ je kladný v intervaloch $(-2,-1)$ a $(1,4)$.

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (8.31) je množina

$$P = (-2,-1) \cup (1,4).$$

Príklad 8.8. V intervale $(0, 2\pi)$ máme riešiť nerovnicu:

$$\frac{(x-1)\cdot\sin x\cdot\ln x}{2-x} < 0. \tag{8.38}$$

Pretože logaritmovať možno iba kladné čísla a v menovateli zlomku nemôže byť nula, nerovnica (8.38) má zmysel len pre

$$x > 0 \quad \text{a} \quad x \neq 2. \tag{8.39}$$

V ďalšom teda budeme uvažovať len také čísla $x \in (0, 2\pi)$, pre ktoré platí (8.39).

Najskôr vyriešime rovnicu

$$\frac{(x-1)\cdot\sin x\cdot\ln x}{2-x} = 0 \tag{8.40}$$

na intervale (0.2π).

Rovnica (8.40) je teda zložená z alternatív:

$$\begin{array}{rlrlr} x-1=0 & \text{alebo} & \sin x = 0 & \text{alebo} & \ln x = 0, \\ x=1 & \text{alebo} & x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z} & \text{alebo} & x = 1. \end{array}$$

Teda oborom pravdivosti rovnice (8.40) je množina

$$P_0 = \{1, \pi\}.$$

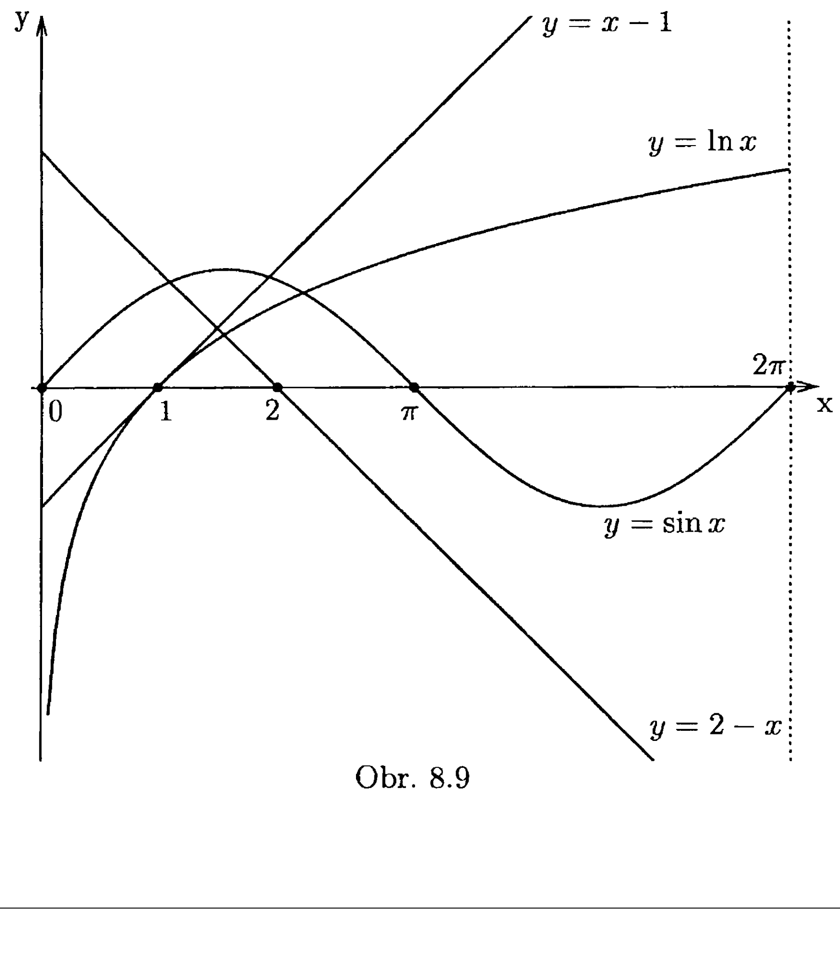
Pretože čísla z množiny P_0 nepatria do oboru pravdivosti nerovnice (8.38), budeme v ďalšom predpokladať, že platí

$$x \neq 1 \quad \text{a} \quad x \neq \pi. \tag{8.41}$$

Vzhľadom na (8.39) a (8.41) množina prípustných hodnôt pozostáva z intervalov

$$(0,1),\ \ (1,2),\ \ (2,\pi),\ \ (\pi, 2\pi).$$

Teraz určíme znamienka jednotlivých členov v (8.38) na týchto intervaloch. Najskôr si načrtneme grafy príslušných funkcií. (Pozri obr. 8.9.)



Obr. 8.9

	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,\pi)$	$(\pi,2\pi)$
$\frac{(x-1)\cdot\sin x\cdot\ln x}{2-x}$	$\frac{(-)\cdot(+)\cdot(-)}{(+)}$	$\frac{(+)\cdot(+)\cdot(+)}{(+)}$	$\frac{(+)\cdot(+)\cdot(+)}{(-)}$	$\frac{(+)\cdot(-)\cdot(+)}{(-)}$
tento výraz je	kladný	kladný	záporný	kladný

Výraz $\dfrac{(x-1)\cdot\sin x\cdot\ln x}{2-x}$ je záporný v intervale $(2,\pi)$.

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (8.38) je množina

$$P = (2,\pi).$$

Pokúsme sa o malú rekapituláciu. Nerovnicu

$$f_1(x) < f_2(x), \quad \text{resp.} \quad f_1(x) > f_2(x) \tag{8.42}$$

najskôr prevedieme do jedného z tvarov:

$$f(x) > 0 \quad \text{alebo} \quad f(x) < 0. \tag{8.43}$$

Samozrejme len vtedy, ak výraz $f_2(x)$ nie je identicky rovný nule.

Odteraz sa budeme zaoberať iba nerovnicou v tvare (8.43). V obidvoch prípadoch ide vlastne o určenie znamienok výrazu $f(x)$. Teda našou úlohou je zistiť, pre aké hodnoty reálnej premennej x je výraz $f(x)$ kladný, resp. záporný.

Najskôr určíme definičný obor danej nerovnice, t. j. množinu tých hodnôt x, pre ktoré má výraz $f(x)$ zmysel.

Ďalej riešime rovnicu

$$f(x) = 0. \tag{8.44}$$

Jej obor pravdivosti označíme symbolom P_0. Určite žiadne číslo z množiny P_0 nepatrí do oboru pravdivosti ani jednej z nerovníc (8.43).

Od tohto okamihu zúžime náš záujem na tzv. množinu prípustných hodnôt, t. j. na množinu tých reálnych čísel x, pre ktoré má výraz $f(x)$ zmysel a ktoré neležia v množine P_0. Množina prípustných hodnôt býva spravidla zložená z niekoľkých intervalov.

Tento predpoklad nám často umožňuje danú nerovnicu podstatne zjednodušiť. V ďalšej etape upravujeme ľavú stranu tejto nerovnice na súčin/podiel jednoduchších členov. Pri určovaní znamienok jednotlivých členov tohto súčinu/podielu na príslušných intervaloch z množiny prípustných hodnôt podstatným spôsobom využívame nasledujúci jednoduchý fakt:

Súčin/podiel dvoch nenulových čísel je záporný práve vtedy, keď jedno z nich je kladné a druhé záporné (v ostatných prípadoch je ich súčin/podiel kladný).

Obor pravdivosti P pôvodnej nerovnice je zjednotením takto nájdených intervalov.

Nerovnicu

$$f_1(x) \leqq f_2(x), \quad \text{resp.} \quad f_1(x) \geqq f_2(x) \tag{8.45}$$

najskôr prevedieme do jedného z tvarov:

$$f(x) \leqq 0, \quad \text{resp.} \quad f(x) \geqq 0. \tag{8.46}$$

Samozrejme len vtedy, ak výraz $f_2(x)$ nie je identicky rovný nule. Jej obor pravdivosti je zjednotením dvoch množín:

oboru pravdivosti príslušnej nerovnice z (8.43) a množiny P_0.

Väčšina učiteľov (a aj študentov) uprednostňuje pri zisťovaní znamienka výrazu na intervale dosadzovanie nejakej konkrétnej hodnoty z tohto intervalu. Ja dávam prednosť grafickej analýze. Posilňuje sa tým uvedomovanie si väzby medzi analytickým vyjadrením a grafickým znázornením toho istého matematického objektu. Nehovoriac o tom, že nie je nutné nič počítať, čím sa redukuje možnosť výskytu chýb.

9. Rovnice a nerovnice s absolútnou hodnotou

Najskôr si zopakujme definíciu.

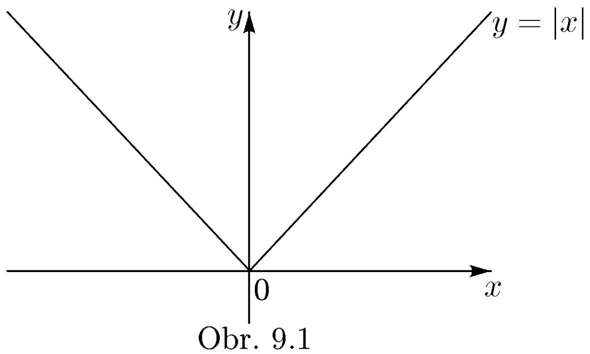
$$\text{Ak } x \geqq 0, \text{ potom } |x| = x, \quad \text{ak } x < 0, \text{ potom } |x| = -x.$$

V literatúre sa môžeme stretnúť aj s nasledujúcou formuláciou:

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

To znamená, že absolútna hodnota čísla x je väčšie[10)] z čísel x a $-x$.

Graf funkcie $y = |x|$ je znázornený na nasledujúcom obrázku.



Obr. 9.1

Pretože platí $|x| = \sqrt{x^2}$, funkcia $y = |x|$ patrí medzi elementárne funkcie.

S absolútnou hodnotou sa môžeme stretnúť pri riešení iracionálnych rovníc.

Príklad 9.1. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$2 + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = x. \tag{9.1}$$

Pretože $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, rovnica (9.1) prejde do tvaru

$$\sqrt{(x-2)^2} = x - 2. \tag{9.2}$$

Pretože $\sqrt{a^2} = |a|$ pre každé reálne číslo a, rovnica (9.2) prejde do tvaru

$$|x - 2| = x - 2. \tag{9.3}$$

Pretože $|a| = a$ práve vtedy, keď $a \geqq 0$, rovnica (9.3) je ekvivalentná s nerovnicou

$$x - 2 \geqq 0.$$

[10)] Samozrejme okrem prípadu, keď čísla x a $-x$ sú rovnaké. Vtedy je ale úplne jedno, ktoré z nich použijeme. Ak $a = b$, potom $\max\{a, b\} = a = b$.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (9.1) je množina

$$P = \langle 2, \infty).$$

Príklad 9.2. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$|5x + 3| + |4 - 3x| = 9. \tag{9.4}$$

Najskôr nájdeme body, v ktorých sa výrazy v absolútnej hodnote rovnajú nule.

$$5x + 3 = 0, \quad 4 - 3x = 0,$$

$$x = -\frac{3}{5}, \qquad x = \frac{4}{3}.$$

Tieto body rozdelia interval $(-\infty, \infty)$ na tri intervaly. Rovnicu (9.4) budeme riešiť na každom z nich osobitne. Rozlíšime teda tri prípady. (Zvyčajne sa jednotlivé prípady zapisujú do prehľadnej tabuľky. Podľa mňa to však nie je nevyhnutné.)

a) Predpokladajme, že $x \in (-\infty, -\frac{3}{5})$. Potom

$$\begin{aligned} x &< -\frac{3}{5} \quad \Big/ \cdot 5 \\ 5x &< -3 \\ 5x + 3 &< 0. \end{aligned}$$

Pretože číslo $5x + 3$ je záporné a pre záporné čísla platí $|a| = -a$, máme

$$|5x + 3| = -5x - 3.$$

Pretože $-\frac{3}{5} < \frac{4}{3}$, platí

$$\begin{aligned} x &< \frac{4}{3} \quad \Big/ \cdot 3 \\ 3x &< 4 \\ 0 &< 4 - 3x. \end{aligned}$$

Pretože číslo $4 - 3x$ je kladné a pre kladné čísla platí $|a| = a$, máme

$$|4 - 3x| = 4 - 3x.$$

Teda rovnica (9.4) má na intervale $(-\infty, -\frac{3}{5})$ tvar

$$-5x - 3 + 4 - 3x = 9.$$

Jej koreň je $x = -1$. Pretože číslo $x = -1$ leží v intervale $(-\infty, -\frac{3}{5})$, je koreňom rovnice (9.4).

b) Predpokladajme, že $x \in \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{3} \rangle$. Potom

$$\begin{aligned} x &\geqq -\frac{3}{5} & x &\leqq \frac{4}{3} \\ 5x &\geqq -3 & 3x &\leqq 4 \\ 5x + 3 &\geqq 0 & 0 &\leqq 4 - 3x \\ |5x + 3| &= 5x + 3 & |4 - 3x| &= 4 - 3x. \end{aligned}$$

Teda rovnica (9.4) má na intervale $\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{3} \rangle$ tvar

$$5x + 3 + 4 - 3x = 9.$$

Jej koreň je $x = 1$. Pretože číslo $x = 1$ leží v intervale $\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{3} \rangle$, je koreňom rovnice (9.4).

c) Predpokladajme, že $x \in (\frac{4}{3}, \infty)$. Potom

$$\begin{aligned} x &> \frac{4}{3} \\ 3x &> 4 \\ 0 &> 4 - 3x \\ |4 - 3x| &= -4 + 3x. \end{aligned}$$

Pretože $-\frac{3}{5} < \frac{4}{3}$, platí

$$\begin{aligned} x &> -\frac{3}{5} \\ 5x &> -3 \\ 5x + 3 &> 0 \\ |5x + 3| &= 5x + 3. \end{aligned}$$

Teda rovnica (9.4) má na intervale $(\frac{4}{3}, \infty)$ tvar

$$5x + 3 - 4 + 3x = 9.$$

Jej koreň $x = \frac{5}{4}$ však neleží v intervale $(\frac{4}{3}, \infty)$. Preto rovnica (9.4) nemá na tomto intervale žiadny koreň.

Záver. Rovnica (9.4) má dva korene $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Príklad 9.3. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$|5x + 3| + |4 - 3x| < 9. \tag{9.5}$$

Budeme postupovať presne tak isto ako v predchádzajúcom príklade.

a) Na intervale $(-\infty, -\frac{3}{5})$ môžeme nerovnicu (9.5) upraviť do tvaru

$$-5x - 3 + 4 - 3x < 9.$$

Jej oborom pravdivosti je množina $(-1, \infty) \cap (-\infty, -\frac{3}{5}) = (-1, -\frac{3}{5})$.

b) Na intervale $\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{3} \rangle$ môžeme nerovnicu (9.5) upraviť do tvaru

$$5x + 3 + 4 - 3x < 9.$$

Jej oborom pravdivosti je množina $(-\infty, 1) \cap \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{3} \rangle = \langle -\frac{3}{5}, 1)$.

c) Na intervale $(\frac{4}{3}, \infty)$ môžeme nerovnicu (9.5) upraviť do tvaru

$$5x + 3 - 4 + 3x < 9.$$

Jej oborom pravdivosti je množina $(-\infty, \frac{5}{4}) \cap (\frac{4}{3}, \infty) = \emptyset$.

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (9.5) je množina

$$P = (-1, -\tfrac{3}{5}) \cup \langle -\tfrac{3}{5}, 1) = (-1, 1).$$

Príklad 9.4. Nájdite všetky hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$, pre ktoré nerovnica

$$4 - x^2 > |x + a| \tag{9.6}$$

má aspoň jeden záporný koreň.

Pretože pre každé reálne číslo t platí $|t| \geqq 0$, pre každý koreň x nerovnice (9.6) musí platiť

$$\begin{aligned} 4 - x^2 &> |x + a| \geqq 0 \\ 4 - x^2 &> 0. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Oborom pravdivosti nerovnice (9.7) je otvorený interval $(-2, 2)$. Odtiaľ vyplýva, že každý reálny koreň nerovnice (9.6) leží v intervale $(-2, 2)$. Pretože nás zaujímajú len záporné korene, v ďalšom budeme uvažovať iba $x \in (-2, 0)$.

Pre každé reálne číslo x platí $|x + a| \geqq 0$, pričom rovnosť nastáva iba v jedinom prípade, konkrétne pre $x = -a$. Pokúsme sa zistiť, či toto číslo nemôže byť riešením našej úlohy. Pretože všetky záporné korene nerovnice (9.6) ležia v intervale $(-2, 0)$, budeme predpokladať, že platí $x = -a \in (-2, 0)$, t. j. že $a \in (0, 2)$. Pretože pre každé $x \in (-2, 0)$ platí (9.7), pre $x = -a$ dostávame

$$4 - (-a)^2 > 0 = |(-a) + a|.$$

Tým sme overili, že pre $a \in (0, 2)$ je číslo $x = -a$ záporným koreňom nerovnice (9.6). Zostáva nám preskúmať ešte dva prípady: $a \leqq 0$, $a \geqq 2$.

1) Predpokladajme, že platí $a \leqq 0$. Uvažujme $x \in (-2, 0)$. Pretože potom platí $x + a < 0$, máme $|x + a| = -x - a$. Dosadíme to do (9.6) a upravíme:

$$\begin{aligned} 4 - x^2 &> |x + a| \\ 4 - x^2 &> -x - a \\ x^2 - x - a - 4 &< 0. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Teraz budeme riešiť nerovnicu (9.8). Najskôr vypočítame jej diskriminant $D = 1 - 4 \cdot (-a - 4) = 17 + 4a$. Ak $D \leqq 0$, potom pre všetky reálne čísla x platí $x^2 - x - a - 4 \geqq 0$. Odtiaľ vyplýva, že v prípade $D \leqq 0$ nerovnica (9.8) nemá žiadne reálne korene, teda nerovnica (9.6) nemá korene v intervale $(-2, 0)$.

Teraz preskúmame prípad $D > 0$. Potom kvadratický trojčlen $x^2 - x - a - 4 = 0$ má korene

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{17 + 4a}}{2}, \qquad x_2 = \frac{1 + \sqrt{17 + 4a}}{2}.$$

Oborom pravdivosti nerovnice (9.8) je otvorený interval (x_1, x_2). Musíme zabezpečiť splnenie podmienky $(x_1, x_2) \cap (-2, 0) \neq \emptyset$. Pretože zrejme $x_2 > 0$, túto podmienku môžeme preformulovať do ekvivalentného tvaru: $x_1 < 0$.

Teda za predpokladu, že platí $a \leqq 0$, nerovnica (9.6) má korene v intervale $(-2, 0)$ práve vtedy, keď sú splnené dve podmienky: $D > 0$ a $x_1 < 0$. Zrejme $D > 0$ práve vtedy, keď $a > -\frac{17}{4}$. Vyriešime nerovnicu $x_1 < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{17 + 4a}}{2} &< 0 \\ 1 - \sqrt{17 + 4a} &< 0 \\ 1 &< \sqrt{17 + 4a} \\ 1 &< 17 + 4a \\ -16 &< 4a \\ -4 &< a. \end{aligned}$$

Teda za predpokladu, že platí $a \leqq 0$, nerovnica (9.6) má záporné korene práve vtedy, keď platí $a > -4$.

2) Predpokladajme, že platí $a \geqq 2$. Uvažujme $x \in (-2, 0)$. Pretože potom platí $x + a \geqq 0$, máme $|x + a| = x + a$. Dosadíme to do (9.6) a upravíme:

$$\begin{aligned} 4 - x^2 &> |x + a| \\ 4 - x^2 &> x + a \\ x^2 + x + a - 4 &< 0. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Teraz budeme riešiť nerovnicu (9.9). Najskôr vypočítame jej diskriminant $D = 1 - 4 \cdot (a - 4) = 17 - 4a$. Ak $D \leqq 0$, potom pre všetky reálne čísla x platí $x^2 + x + a - 4 \geqq 0$. Odtiaľ vyplýva, že v prípade $D \leqq 0$ nerovnica (9.9) nemá žiadne reálne korene, teda nerovnica (9.6) nemá korene v intervale $(-2, 0)$.

Teraz preskúmame prípad $D > 0$. Potom kvadratický trojčlen $x^2 + x + a - 4 = 0$ má korene

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17 + 4a}}{2}, \qquad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17 + 4a}}{2}.$$

Oborom pravdivosti nerovnice (9.9) je otvorený interval (x_1, x_2). Musíme zabezpečiť splnenie podmienky $(x_1, x_2) \cap (-2, 0) \neq \emptyset$. Zrejme platí $x_1 < 0$. Ukážeme, že platí $x_1 \geqq -2$. Presvedčia nás o tom nasledujúce ekvivalentné úpravy:

$$\begin{aligned} -2 &\leqq \frac{-1 - \sqrt{17 - 4a}}{2} \qquad / \cdot (-2) \\ 4 &\geqq 1 + \sqrt{17 - 4a} \\ 3 &\geqq \sqrt{17 - 4a} \\ 9 &\geqq 17 - 4a \\ 4a &\geqq 8 \\ a &\geqq 2. \end{aligned}$$

Pretože $-2 \leqq x_1 < 0$, podmienka $(x_1, x_2) \cap (-2, 0) \neq \emptyset$ je určite splnená. Pritom sme predpokladali, že platí $D > 0$, t. j. že $a < \frac{17}{4}$.

Teda za predpokladu, že platí $a \geqq 2$, nerovnica (9.6) má záporné korene práve vtedy, keď platí $a < \frac{17}{4}$.

Ukázali sme, že nerovnica (9.6) má záporné korene práve v troch prípadoch:

a) $a \in (0, 2)$; b) $a \leqq 0$ a súčasne $a > -4$; c) $a \geqq 2$ a súčasne $a < \frac{17}{4}$.

Záver. Nerovnica (9.6) má aspoň jeden záporný koreň práve vtedy, keď pre parameter a platí $a \in (-4, \frac{17}{4})$.

Príklad 9.5. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$|x-1|-|x|+|x+1|=\frac{3}{2}. \tag{9.10}$$

Využijeme symetriu. Všimnime si, že ak reálne číslo $x=x_0$ je koreňom rovnice (9.10), potom aj číslo $x=-x_0$ je jej koreňom. Alebo inak povedané: funkcia $y=f(x)$, kde $f(x)=|x-1|-|x|+|x+1|$, je párna. Skutočne, platí

$$\begin{aligned}f(-x_0)&=|-x_0-1|-|-x_0|+|-x_0+1|=\\&=|(-1)\cdot(x_0+1)|-|(-1)\cdot x|+|(-1)\cdot(x_0-1)|=\\&=|-1|\cdot|x_0+1|-|-1|\cdot|x|+|-1|\cdot|x_0-1|=f(x_0).\end{aligned}$$

Stačí teda hľadať iba nezáporné korene rovnice (9.10). Predpokladajme, že $x\geqq 0$. Potom rovnica (9.10) prejde do tvaru

$$\begin{aligned}|x-1|-x+x+1&=\frac{3}{2}\\|x-1|&=\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{9.11}$$

Rovnica (9.11) má korene $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}$.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (9.10) je množina

$$P=\left\{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}.$$

Poznámka. Pre $x\geqq 0$ platí $f(x)=|x-1|-x+x+1=|x-1|+1=||x|-1|+1$. Pre $x\leqq 0$ platí $f(x)=1-x+x+|x+1|=1+|x+1|=1+|-x-1|=1+||x|-1|$. Teda rovnicu (9.10) môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned}||x|-1|+1&=\frac{3}{2}\\||x|-1|&=\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{9.12}$$

Pri riešení rovnice (9.12) postupujeme klasickým spôsobom:

$$\begin{aligned}|x|-1&=-\frac{1}{2} & \qquad |x|-1&=\frac{1}{2}\\|x|&=\frac{1}{2} & |x|&=\frac{3}{2}\\x_{1,2}&=\pm\frac{1}{2} & x_{3,4}&=\pm\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

10. Iracionálne rovnice

Príklad 10.1. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sqrt{4-x} = 3 - \sqrt{5+x}. \tag{10.1}$$

Porovnáme navzájom dva spôsoby riešenia:

$\sqrt{4-x} = 3 - \sqrt{5+x}$	$\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$
$4 - x = 9 - 6\sqrt{5+x} + 5 + x$	$4 - x + 2\sqrt{4-x}\sqrt{5+x} + 5 + x = 9$
$6\sqrt{5+x} = 10 + 2x$	$2\sqrt{4-x}\sqrt{5+x} = 0$
$3\sqrt{5+x} = 5 + x$	$\sqrt{4-x}\sqrt{5+x} = 0$
$3\sqrt{5+x} = \left(\sqrt{5+x}\right)^2$	$\sqrt{4-x} = 0 \quad \text{alebo} \quad \sqrt{5+x} = 0$
$\sqrt{5+x} = 0 \quad \text{alebo} \quad \sqrt{5+x} = 3$	$x = 4 \quad \text{alebo} \quad x = -5$
$x = -5 \quad \text{alebo} \quad 5 + x = 9$	
$x = -5 \quad \text{alebo} \quad x = 4$	

Príklad 10.2. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$2\sqrt{x+2} + \sqrt{2-4x} = \sqrt{10}. \tag{10.2}$$

Porovnáme navzájom dva spôsoby riešenia:

$\sqrt{2-4x} = \sqrt{10} - 2\sqrt{x+2}$	$2\sqrt{x+2} + \sqrt{2-4x} = \sqrt{10}$
$2 - 4x = 10 - 4\sqrt{10}\sqrt{x+2} + 4x + 8$	$4x + 8 + 4\sqrt{x+2}\sqrt{2-4x} + 2 - 4x = 10$
$4\sqrt{10}\sqrt{x+2} = 8x + 16$	$4\sqrt{x+2}\sqrt{2-4x} = 0$
$\sqrt{10}\sqrt{x+2} = 2x + 4$	$\sqrt{x+2}\sqrt{2-4x} = 0$
$10x + 20 = 4x^2 + 16x + 16$	$\sqrt{x+2} = 0 \quad \text{alebo} \quad \sqrt{2-4x} = 0$
$4x^2 + 6x - 4 = 0$	$x = -2 \quad \text{alebo} \quad x = \frac{1}{2}$
$2x^2 + 3x - 2 = 0$	
$(x+2)(2x-1) = 0$	
$x = -2 \quad \text{alebo} \quad x = \frac{1}{2}$	

Príklad 10.3. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$2\sqrt{x-1}+\sqrt{4x-1}=\sqrt{3}. \tag{10.3}$$

Porovnáme navzájom dva spôsoby riešenia:

$\sqrt{4x-1}=\sqrt{3}-2\sqrt{x-1}$	$2\sqrt{x-1}+\sqrt{4x-1}=\sqrt{3}$
$4x-1=3-4\sqrt{3}\sqrt{x-1}+4x-4$	$4x-4+4\sqrt{x-1}\sqrt{4x-1}+4x-1=3$
$4\sqrt{3}\sqrt{x-1}=0$	$4\sqrt{x-1}\sqrt{4x-1}=8-8x$
$x=1$	$\sqrt{x-1}\sqrt{4x-1}=2-2x$
	$\sqrt{x-1}\sqrt{4x-1}+2(x-1)=0$
	$\sqrt{x-1}\cdot\underbrace{\left(\sqrt{4x-1}+2\sqrt{x-1}\right)}_{>0}=0$
	$x=1$

Príklad 10.4. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{4x+5}. \tag{10.4}$$

Porovnáme navzájom dva spôsoby riešenia:

$\sqrt{x+1}=\sqrt{4x+5}-\sqrt{x+2}$	$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{4x+5}$
$x+1=4x+5-2\sqrt{4x+5}\sqrt{x+2}+x+2$	$x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}+x+2=4x+5$
$2\sqrt{4x+5}\sqrt{x+2}=4x+6$	$2\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}=2x+2$
$\sqrt{4x+5}\sqrt{x+2}=2x+3$	$\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}=x+1$
$(4x+5)(x+2)=(2x+3)^2$	$\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}=(\sqrt{x+1}\,)^2$
$4x^2+13x+10=4x^2+12x+9$	$\sqrt{x+1}=0 \quad \text{alebo} \quad \sqrt{x+2}=\sqrt{x+1}$
$x=-1$	$x=-1$

V predchádzajúcich príkladoch sme videli, že niektoré iracionálne rovnice možno riešiť viacerými spôsobmi, ktoré sú takmer rovnocenné.

Príklad 10.5. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 1. \tag{10.5}$$

a) Najskôr si uvedieme klasické riešenie.

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} &= 1 \quad \Big/ \Big(\ \Big)^2 \\ 1 + x + 2\sqrt{1-x^2} + 1 - x &= 1 \quad \Big/ - 1 \\ \underbrace{1 + 2\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\geqq 0}}_{\geqq 1} &= 0. \end{aligned}$$

Pretože ľavá strana tejto rovnice je pre každé prípustné reálne číslo x kladná, rovnica (10.5) nemá reálne korene.

b) V tomto druhom riešení využijeme symetriu. Všimnime si, že ak číslo $x = x_0$ je koreňom rovnice (10.5), potom aj číslo $x = -x_0$ je koreňom tejto rovnice[11]. Ak teda rovnica (10.5) má riešenie, medzi jej koreňmi musí byť aspoň jeden kladný[12].

Predpokladajme, že x je kladný koreň rovnice (10.5). Potom platí

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} &> 1 \\ 1 - \sqrt{1-x} &> 1 \quad \Big/ + \sqrt{1-x} - 1 \\ 0 &> \sqrt{1-x}, \end{aligned}$$

čo sa druhej odmocnine nemôže stať.

Odtiaľ vyplýva, že rovnica (10.5) nemá reálne korene.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (10.5) je prázdna množina.

V nasledujúcej úlohe sa pokúste najskôr korene uhádnuť.[13]

Príklad 10.6. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sqrt[4]{629-x} + \sqrt[4]{77+x} = 8. \tag{10.6}$$

[11] Skutočne, pre $x = x_0$ máme $\sqrt{1+x_0} + \sqrt{1-x_0} = 1$ a
pre $x = -x_0$ máme $\sqrt{1-x_0} + \sqrt{1+x_0} = 1$, čo je presne tá istá rovnica.

[12] Číslo 0 zrejme nie je koreňom tejto rovnice.

[13] Ak si uvedomíte, že číslo $5^4 = 625$ leží blízko čísla 629, máte šancu jeden koreň uhádnuť. K nájdeniu druhého sa pokúste využiť symetriu.

Položme

$$u = \sqrt[4]{629 - x}, \qquad v = \sqrt[4]{77 + x}. \tag{10.7}$$

Potom rovnica (10.6) bude mať tvar:

$$u + v = 8. \tag{10.8}$$

Priamo z (10.7) dostávame:

$$u^4 = 629 - x, \tag{10.9}$$

$$v^4 = 77 + x. \tag{10.10}$$

Potom tieto rovnice sčítame:

$$u^4 + v^4 = 706. \tag{10.11}$$

S využitím postupného umocňovania na druhú z rovnice (10.8) dostávame:

$$\begin{aligned} u^2 + 2uv + v^2 &= 64 \\ u^2 + v^2 &= 64 - 2uv \\ u^4 + 2u^2v^2 + v^4 &= (64 - 2uv)^2 \\ u^4 + v^4 &= (64 - 2uv)^2 - 2u^2v^2 \end{aligned} \tag{10.12}$$

Podľa (10.12) a (10.11) máme:

$$\begin{aligned} (64 - 2uv)^2 - 2u^2v^2 &= 706 \\ 4096 - 256uv + 4u^2v^2 - 2u^2v^2 &= 706 \quad /-706 \\ 2u^2v^2 - 256uv + 3390 &= 0 \quad /\cdot\tfrac{1}{2} \\ u^2v^2 - 128uv + 1695 &= 0 \\ (uv - 15)(uv - 113) &= 0 \end{aligned} \tag{10.13}$$

Rozlíšime dva prípady. Pretože podľa (10.8) máme $v = 8 - u$, platí:

$$\begin{array}{cc} uv = 15 & uv = 113 \\ u(8-u) = 15 & u(u-8) = 113 \\ u^2 - 8u + 15 = 0 & u^2 - 8u + 113 = 0 \\ (u-5)(u-3) = 0 & (u-4)^2 + 97 = 0 \\ u_1 = 5 \quad u_2 = 3 & \emptyset \end{array}$$

Podľa (10.9) platí:

$$\begin{array}{ll} u_1^4 = 629 - x_1 & u_2^4 = 629 - x_2 \\ 625 = 629 - x_1 & 81 = 629 - x_2 \\ x_1 = 4 & x_2 = 548 \end{array}$$

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (10.6) je množina

$$P = \{4, 548\}.$$

Spôsob riešenia podobných úloh je založený na využití symetrických polynómov. Konkrétne na ich vyjadrení pomocou premenných $u + v$ a uv.

Ukážeme, ako možno vyjadriť základné symetrické polynómy pomocou premenných $u + v = r$ a $uv = s$.

a) Počítajme

$$\begin{aligned}
(u + v)^2 &= u^2 + 2uv + v^2 \\
r^2 &= u^2 + 2s + v^2 \\
u^2 + v^2 &= r^2 - 2s. \qquad (10.14)
\end{aligned}$$

b) Počítajme

$$\begin{aligned}
(u + v)^3 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \\
(u + v)^3 &= u^3 + 3uv(u + v) + v^3 \\
r^3 &= u^3 + 3rs + v^3 \\
u^3 + v^3 &= r^3 - 3rs. \qquad (10.15)
\end{aligned}$$

c) V nasledujúcom výpočte použijeme aj rovnosť (10.14).

$$\begin{aligned}
(u + v)^4 &= u^4 + 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4 \\
(u + v)^4 &= u^4 + 4uv \cdot \underbrace{(u^2 + v^2)}_{=r^2-2s} + 6u^2v^2 + v^4 \\
r^4 &= u^4 + 4s(r^2 - 2s) + 6s^2 + v^4 \\
u^4 + v^4 &= r^4 - 4r^2s + 2s^2. \qquad (10.16)
\end{aligned}$$

Týmto spôsobom môžeme pokračovať ďalej. Takto získané vzorce používame pri vyjadrení ľubovoľných symetrických polynómov pomocou premenných r a s.

Príklad 10.7. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sqrt[4]{x + 97} + \sqrt[4]{97 - x} = 4. \qquad (10.17)$$

Položme

$$u = \sqrt[4]{x + 97}, \qquad v = \sqrt[4]{97 - x}. \qquad (10.18)$$

Potom

$$\begin{aligned} u + v &= 4 \\ u^4 + v^4 &= 194. \end{aligned}$$

Označme $u + v = r$, $uv = s$. Potom $r = 4$ a podľa (10.16) máme

$$\begin{aligned} 194 &= u^4 + v^4 = r^4 - 4r^2 s + 2s^2 = 4^4 - 4 \cdot 4^2 s + 2s^2 \\ 194 &= 256 - 64s + 2s^2 \\ s^2 - 32s + 31 &= 0 \\ (s-1)(s-31) &= 0 \\ s = 1 \text{ alebo } s &= 31. \end{aligned}$$

Takto sme sa prepracovali k dvom sústavám rovníc:

$$\boxed{\begin{aligned} u + v &= 4 \\ uv &= 1 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} u + v &= 4 \\ uv &= 31 \end{aligned}}$$

Prvá má dve riešenia $u_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$, $v_{1,2} = 2 \mp \sqrt{3}$, druhá riešenie nemá.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (10.17) je množina

$$P = \left\{-56\sqrt{3}, 56\sqrt{3}\right\}.$$

Príklad 10.8. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2. \tag{10.19}$$

Položme $\sqrt{x-1} = t$. Potom platí $x = t^2 + 1$. Po dosadení do rovnice (10.19) dostávame:

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2 + 1 + 2t} - \sqrt{t^2 + 1 - 2t} &= 2 \\ \sqrt{(t+1)^2} - \sqrt{(t-1)^2} &= 2 \\ |t+1| - |t-1| &= 2. \end{aligned} \tag{10.20}$$

Pretože $t = \sqrt{x-1} \geqq 0$, rovnicu (10.20) môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} t + 1 - |t-1| &= 2 \\ |t-1| &= t - 1. \end{aligned} \tag{10.21}$$

Pretože $|a| = a$ práve vtedy, keď $a \geqq 0$, podľa (10.21) máme

$$\begin{aligned} t - 1 &\geqq 0 \\ \sqrt{x-1} - 1 &\geqq 0 \\ \sqrt{x-1} &\geqq 1 \\ x - 1 \geqq 0 \quad \text{a} \quad x - 1 &\geqq 1 \\ x \geqq 1 \quad \text{a} \qquad x &\geqq 2 \\ x &\geqq 2. \end{aligned}$$

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (10.19) je množina

$$P = \langle 2, \infty).$$

Príklad 10.9. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} - \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1. \tag{10.22}$$

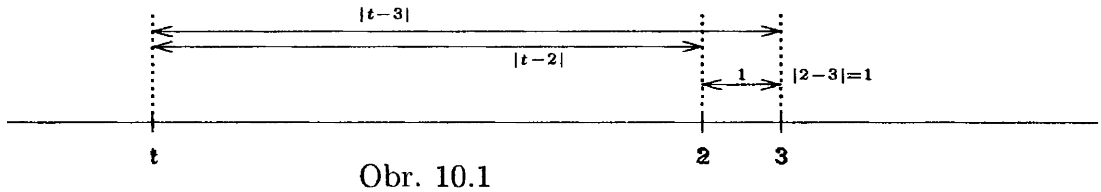
Položme $\sqrt{x-1} = t$. Potom $x = t^2+1$. Po dosadení do rovnice (10.22) dostávame

$$\begin{aligned} \sqrt{(t^2+1) + 3 - 4t} + \sqrt{(t^2+1) + 8 - 6t} &= 1 \\ \sqrt{t^2 - 4t + 4} + \sqrt{t^2 - 6t + 9} &= 1 \\ \sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} &= 1 \\ |t-2| + |t-3| &= 1. \end{aligned} \tag{10.23}$$

Ak interpretujeme reálne čísla a, b ako body na číselnej osi, potom absolútna hodnota rozdielu týchto čísel $|a - b|$ je vlastne vzdialenosť týchto bodov. Ľavá strana rovnice (10.23) je súčet vzdialenosti bodu t od bodu 2 a vzdialenosti bodu t od bodu 3.

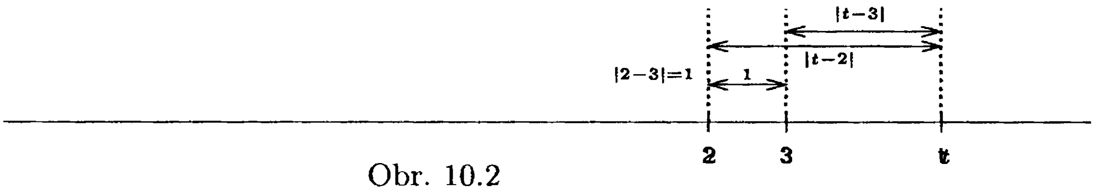
Rozlíšime tri prípady:

a) V prípade, že bod t leží naľavo do bodu 2, vzdialenosť bodu t od bodu 3 je väčšia ako vzdialenosť bodov 2 a 3, t. j. je väčšia ako 1.



Obr. 10.1

b) V prípade, že bod t leží napravo do bodu 3, vzdialenosť bodu t od bodu 2 je väčšia ako vzdialenosť bodov 2 a 3, t. j. je väčšia ako 1.



Obr. 10.2

Ani v jednom z prípadov a) a b) nemôže byť rovnica (10.23) splnená. Zostáva nám vyriešiť prípad:

c) Ak $2 \leqq t \leqq 3$, potom súčet vzdialenosti bodu t od bodu 2 a vzdialenosti bodu t od bodu 3 je rovný jednej. Môžeme to overiť aj výpočtom:

$$t-2 \geqq 0 \Rightarrow |t-2| = t-2, \qquad t-3 \leqq 0 \Rightarrow |t-3| = 3-t,$$
$$|t-2| + |t-3| = (t-2) + (3-t) = 1.$$

Tým sme ukázali, že všetky čísla z intervalu $\langle 2, 3\rangle$ vyhovujú rovnici (10.23).

Odtiaľ dostávame:

$$2 \leqq t \leqq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leqq \sqrt{x-1} \leqq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \leqq x-1 \leqq 9 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \leqq x \leqq 10.$$

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (10.22) je množina $P = \langle 5, 10\rangle$.

Nasledujúci príklad je bizarný v tom zmysle, že umocnením iracionálnej rovnice dostaneme tú istú rovnicu.

Príklad 10.10. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sqrt{x-1} = 1 + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}. \tag{10.24}$$

Prvý pokus o riešenie. Umocníme obidve strany rovnice na druhú:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1} &= 1 + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \quad \Big/ \left(\,\right)^2 \\
x-1 &= 1 + 2\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + x - 2\sqrt{x-1} \quad \Big/ -x+1+2\sqrt{x-1} \\
2\sqrt{x-1} &= 2 + 2\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \quad \Big/ \cdot \tfrac{1}{2} \\
\sqrt{x-1} &= 1 + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}.
\end{aligned} \tag{10.25}$$

Ako vidíme, rovnice (10.24) a (10.25) sú úplne rovnaké. Tento pokus o riešenie ukazuje, že umocňovaním iracionálnej rovnice nemusíme dosiahnuť vôbec nič.

Druhý pokus o riešenie. Rovnicu (10.24) najskôr prepíšeme do tvaru

$$\sqrt{x-1}-1=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \tag{10.26}$$

a potom umocníme obidve strany rovnice (10.26) na druhú:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1}-1&=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \quad \Big/\left(\,\right)^2\\ x-1-2\sqrt{x-1}+1&=x-2\sqrt{x-1} \quad \Big/-x+2\sqrt{x-1}\\ 0&=0. \end{aligned}$$

V tomto okamihu študenti usudzujú, že každé reálne číslo x je riešením rovnice (10.26). Dosadením napr. $x=1$ zistíte, že tomu tak nie je. Ako vidíme, znova sme umocňovaním rovnice nedosiahli vôbec nič.

Tretí pokus o riešenie. Ľavú stranu rovnice (10.26) zvolíme za substitúciu:

$$\sqrt{x-1}-1=t. \tag{10.27}$$

Pretože $\sqrt{x-1}=t+1$, platí $x-1=(t+1)^2=t^2+2t+1$, odkiaľ $x=t^2+2t+2$. Po dosadení do rovnice (10.26) dostávame:

$$\begin{aligned} t&=\sqrt{t^2+2t+2-2(t+1)}\\ t&=\sqrt{t^2}\\ t&=|t|. \end{aligned} \tag{10.28}$$

Reálne číslo t vyhovuje rovnici (10.28) práve vtedy, keď platí $t\geqq 0$. Odtiaľ vyplýva, že rovnica (10.26) je ekvivalentná s nerovnicou

$$\sqrt{x-1}-1\geqq 0. \tag{10.29}$$

Jej definičným oborom je interval $\langle 1,\infty)$. Za predpokladu, že x patrí do tohto intervalu, sú nasledujúce úpravy ekvivalentné:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1}-1&\geqq 0\\ \sqrt{x-1}&\geqq 1\\ x-1&\geqq 1\\ x&\geqq 2. \end{aligned}$$

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (10.24) je množina $P=\langle 2,\infty)$.

Príklad 10.11. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$x+\sqrt{x^2-7x+12}+\sqrt{10x-x^2-21}=3. \tag{10.30}$$

Rovnicu (10.30) prepíšeme do tvaru

$$\sqrt{(x-3)(x-4)}+\sqrt{(x-3)(7-x)}=3-x. \tag{10.31}$$

Zrejme $x=3$ je koreňom tejto rovnice. V ďalšom budeme predpokladať, že $x\neq 3$. Potom platí $3-x>0$, teda

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-3)(x-4)}+\sqrt{(x-3)(7-x)}&=3-x \qquad \Big/\cdot\frac{1}{\sqrt{3-x}}\\ \sqrt{4-x}+\sqrt{x-7}&=\sqrt{3-x}.\end{aligned} \tag{10.32}$$

Pretože definičným oborom rovnice (10.32) je prázdna množina, rovnica (10.30) ďalšie reálne korene nemá.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (10.30) je množina $P=\{3\}$.

Príklad 10.12. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$2x^2-1=\sqrt{-x}. \tag{10.33}$$

Pretože musí platiť:

$$-x\geqq 0 \qquad \text{a} \qquad 2x^2-1=\sqrt{-x}\geqq 0,$$

máme

$$x\leqq -\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{10.34}$$

Ďalej postupujeme klasickým spôsobom:

$$\begin{aligned}\sqrt{-x}&=2x^2-1\\ -x&=4x^4-4x^2+1\\ 4x^2(x^2-1)+x+1&=0\\ (x+1)(4x^2(x-1)+1)&=0.\end{aligned}$$

Jeden koreň je $x=-1$. Urobte si skúšku správnosti. Zostáva nám ešte vyriešiť rovnicu $4x^2(x-1)+1=0$. Prepíšeme ju do tvaru

$$4x^3+1=4x^2. \tag{10.35}$$

Riešime ju za predpokladu, že x spĺňa (10.34). Zrejme pravá strana je pre takéto x kladná. Ukážeme, že ľavá strana je záporná. Položme $f(x) = 4x^3 + 1$. Funkcia $y = f(x)$ je zrejme rastúca, teda pre každé $x \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ platí

$$f(x) \leqq f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = 1 - \sqrt{2} < 0.$$

Odtiaľ vyplýva, že rovnica (10.35) nemá reálne korene v intervale $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (10.33) je množina $P = \{-1\}$.

Príklad 10.13. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$-x - 2 = \sqrt{-x}. \tag{10.36}$$

Pretože musí platiť $-x \geqq 0$ a $-x - 2 = \sqrt{-x} \geqq 0$, máme

$$x \leqq -2. \tag{10.37}$$

Ďalej postupujeme klasickým spôsobom:

$$\begin{aligned} -x - 2 &= \sqrt{-x} \\ x^2 + 4x + 4 &= -x \\ x^2 + 5x + 4 &= 0 \\ (x+1)(x+4) &= 0. \end{aligned}$$

Číslo $x = -1$ nevyhovuje podmienke (10.37). Skúškou správnosti sa presvedčíme, že číslo $x = -4$ je koreňom rovnice (10.36).

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (10.36) je množina $P = \{-4\}$.

Príklad 10.14. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sqrt[3]{24 + x} + \sqrt{12 - x} = 6. \tag{10.38}$$

Položme $y = \sqrt{12 - x}$. Pretože $x = 12 - y^2$, rovnica (10.38) má potom tvar

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{24 + 12 - y^2} + y &= 6 \\ \sqrt[3]{36 - y^2} &= 6 - y \\ 36 - y^2 &= (6 - y)^3 \\ (6 - y)(6 + y) &= (6 - y)^3. \end{aligned} \tag{10.39}$$

Zrejme číslo $y_1 = 6$ je koreňom rovnice (10.39), odkiaľ dostávame $x_1 = -24$.

Predpokladajme, že platí $6 - y \neq 0$. Potom rovnica (10.39) prejde do tvaru

$$\begin{aligned} 6 + y &= (6-y)^2 \\ y^2 - 13y + 30 &= 0. \end{aligned} \tag{10.40}$$

Potom $y_2 = 3$, $y_3 = 10$, odkiaľ dostávame $x_2 = 3$, $x_3 = -88$.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (10.38) je množina $P = \{-88, -24, 3\}$.

Príklad 10.15. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu, kde reálne číslo a je parameter:

$$a\sqrt{x} - \sqrt{x + 2ax\sqrt{x^2 + 7a^2}} = 0. \tag{10.41}$$

Výraz $\sqrt{x}$ je definovaný iba pre $x \geqq 0$. Ak teda x je koreňom rovnice (10.41), potom pre toto číslo platí $x \geqq 0$. Ľahko sa môžeme presvedčiť, že číslo $x = 0$ je koreňom rovnice (10.41) pre ľubovoľnú hodnotu parametra a. V ďalšom budeme hľadať kladné korene tejto rovnice. Odteraz budeme teda predpokladať, že $x > 0$.

Najskôr upravíme rovnicu do tvaru

$$a\sqrt{x} = \sqrt{x + 2ax\sqrt{x^2 + 7a^2}}. \tag{10.42}$$

Odtiaľ vyplýva, že musí platiť $a \geqq 0$. Skutočne, v opačnom prípade by totiž ľavá strana v (10.42) bola záporná, ale pravá nie.

Rovnicu (10.42) predelíme výrazom $\sqrt{x}$, čím dostávame

$$a = \sqrt{1 + 2a\sqrt{x^2 + 7a^2}}. \tag{10.43}$$

Pretože platí $1 + \underbrace{2a\sqrt{x^2 + 7a^2}}_{\geqq 0} \geqq 1$, podľa (10.43) máme $a \geqq 1$.

Teraz ukážeme, že pravá strana v (10.43) je väčšia ako ľavá. Skutočne, stačí si premyslieť, že platí

$$\sqrt{1 + 2a\sqrt{x^2 + 7a^2}} \geqq \sqrt{1 + 2a\sqrt{a^2}} = \sqrt{1 + 2a^2} > a. \tag{10.44}$$

Odtiaľ vyplýva, že rovnica (10.43) nemá riešenie.

Záver. Rovnica (10.41) má jediný koreň $x = 0$.

Príklad 10.16. Nech a, b sú také reálne čísla, pre ktoré platí $a + b \geqq 0$. V obore reálnych čísel máme riešiť nasledujúcu rovnicu, kde čísla a, b sú parametre:

$$\sqrt{a - x} + \sqrt{b + x} = \sqrt{a + b}. \tag{10.45}$$

Pretože $a + b \geqq 0$, platí $-b \leqq a$. Pre každé riešenie x rovnice (10.45) musí platiť $a - x \geqq 0$, $b + x \geqq 0$, odkiaľ dostávame podmienku:

$$-b \leqq x \leqq a. \tag{10.46}$$

Pre takéto x potom dostávame:

$$\begin{aligned} \sqrt{a-x} + \sqrt{b+x} &= \sqrt{a+b} \\ a - x + 2\sqrt{a-x}\sqrt{b+x} + b + x &= a + b \\ \sqrt{a-x}\sqrt{b+x} &= 0. \end{aligned}$$

Skúškou správnosti sa presvedčíme, že čísla $x_1 = -b$, $x_2 = a$ sú koreňmi pôvodnej rovnice (10.45).

Záver. Ak $a + b = 0$, potom rovnica (10.45) má jediný koreň $x = a$. Ak $a + b > 0$, potom rovnica (10.45) má dva korene $x_1 = -b$, $x_2 = a$.

Príklad 10.17. V obore reálnych čísel máme riešiť nasledujúcu rovnicu, kde čísla a, b sú parametre:

$$\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b-2x}. \tag{10.47}$$

Pre každé riešenie x rovnice (10.47) musí platiť $a-x \geqq 0$, $b-x \geqq 0$, $a+b-2x \geqq 0$, odkiaľ dostávame:

$$x \leqq a, \qquad x \leqq b, \qquad x \leqq \frac{a+b}{2}. \tag{10.48}$$

Rovnicu (10.47) budeme riešiť klasickým spôsobom:

$$\begin{aligned} \sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} &= \sqrt{a+b-2x} \\ a - x + 2\sqrt{a-x}\sqrt{b-x} + b - x &= a + b - 2x \\ \sqrt{a-x}\sqrt{b-x} &= 0. \end{aligned}$$

Do úvahy teda pripadajú čísla $x_1 = a$, $x_2 = b$. Číslo x_1 vyhovuje podmienkam (10.48) práve vtedy, keď $a \leqq b$. Číslo x_2 vyhovuje podmienkam (10.48) práve vtedy, keď $b \leqq a$. ([14])

Záver. Ak $a \leqq b$, potom rovnica (10.47) má jediný koreň $x = a$. Ak $a > b$, potom rovnica (10.47) má jediný koreň $x = b$.

[14]) Stačí si uvedomiť, že

a) Ak $a \leqq b$, potom $a \leqq \frac{a+b}{2} \leqq b$. Teda požiadavky (10.48) sa redukujú na jedinú: $x \leqq a$.

b) Ak $b \leqq a$, potom $b \leqq \frac{a+b}{2} \leqq a$. Teda požiadavky (10.48) sa redukujú na jedinú: $x \leqq b$.

11. Iracionálne nerovnice

Iracionálne nerovnice sa občas objavujú v matematických súťažiach. Dokazuje to nasledujúci príklad[15)].

Príklad 11.1. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}. \tag{11.1}$$

Definičným oborom nerovnice (11.1) je interval $\langle -1,3\rangle$. Pretože

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}>0,$$

musí platiť

$$\sqrt{3-x}>\sqrt{x+1}.$$

Odtiaľ dostávame podmienku $x<1$. Tým sme ukázali, že každý koreň nerovnice (11.1) musí ležať v intervale $\langle -1,1)$. Potom pre $x\in\langle -1,1)$ sú nasledujúce úpravy ekvivalentné:

$$\begin{aligned}
\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}&>\frac{1}{2} \qquad /(\,)^2\\
3-x-2\sqrt{3-x}\sqrt{x+1}+x+1&>\frac{1}{4}\\
\frac{15}{8}&>\sqrt{3-x}\sqrt{x+1}\\
\frac{225}{64}&>(3-x)(x+1)\\
(x-1)^2&>\frac{31}{64}\\
|x-1|&>\frac{\sqrt{31}}{8}\\
x<1 \qquad \Rightarrow \qquad 1-x&>\frac{\sqrt{31}}{8}\\
x&<1-\frac{\sqrt{31}}{8}.
\end{aligned}$$

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (11.1) je interval $P=\big\langle -1,1-\frac{\sqrt{31}}{8}\big)$.

[15)] Horák, K. - Müller, V. - Vrba, A.: Úlohy mezinárodních matematických olympiád, SPN, Praha, 1986.

Príklad 11.2. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\sqrt{6x - x^2} < 3 + x. \tag{11.2}$$

Definičným oborom nerovnice (11.2) je interval $\langle 0, 6\rangle$.
Pretože druhá odmocnina nemôže byť záporná, platí

$$\begin{aligned} 3 + x > \sqrt{6x - x^2} &\geqq 0 \\ x &> -3. \end{aligned}$$

Túto podmienku však spĺňa každé x ležiace v definičnom obore nerovnice (11.2).
Za predpokladu, že x patrí do intervalu $\langle 0, 6\rangle$, môžeme nerovnicu (11.2) umocniť.

$$\begin{aligned} &6x - x^2 < (3 + x)^2 \\ &2x^2 + 9 > 0. \end{aligned}$$

Túto podmienku však spĺňa každé reálne číslo x.

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (11.2) je interval $P = \langle 0, 6\rangle$.

Príklad 11.3. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\sqrt{x^2 - 25} \leqq 5 - x. \tag{11.3}$$

Zrejme musí platiť $5 - x \geqq 0$. Potom nerovnica (11.3) má tvar

$$\sqrt{(x-5)(x+5)} \leqq \sqrt{5 - x} \cdot \sqrt{5 - x}. \tag{11.4}$$

Rozlíšime dva prípady.

a) Predpokladajme, že $5 - x = 0$. Zrejme číslo $x = 5$ je riešením nerovnice (11.3).

b) Predpokladajme, že $5 - x > 0$. Potom $x < 5$ a nerovnica (11.4) prejde do tvaru
$$\sqrt{-x - 5} \leqq \sqrt{5 - x}. \tag{11.5}$$
Oborom pravdivosti nerovnice (11.5) je interval $(-\infty, -5\rangle$.

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (11.3) je množina $P = (-\infty, -5\rangle \cup \{5\}$.

Príklad 11.4. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\sqrt{8+2x-x^2} > 6-3x. \tag{11.6}$$

Pretože $8+2x-x^2 = (2+x)(4-x)$, definičným oborom nerovnice (11.6) je interval $\langle -2, 4\rangle$. Rozlíšime dva prípady.

a) Predpokladajme, že platí $6-3x<0$. Potom $x>2$ a za tohto predpokladu platí
$$6-3x<0 \leqq \sqrt{8+2x-x^2}.$$
Tým sme ukázali, že každé $x>2$, $x\in\langle -2,4\rangle$ je riešením nerovnice (11.6). Teda $P_1 = (2,4\rangle$.

b) Predpokladajme, že platí $6-3x \geqq 0$. Potom $x \leqq 2$ a nerovnicu (11.6) môžeme umocniť.
$$\begin{aligned} 8+2x-x^2 &> (6-3x)^2 \\ 5x^2-19x+14 &< 0 \\ (x-1)(5x-14) &< 0. \end{aligned}$$
Oborom pravdivosti poslednej nerovnice je interval $(1, \frac{14}{5})$. Teda $P_2 = (1, 2\rangle$.

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (11.6) je množina $P = P_1 \cup P_2 = (1, 4\rangle$.

Príklad 11.5. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} > \frac{3}{2}. \tag{11.7}$$

Zrejme musí platiť $x-1 \geqq 0$, t. j. $x \geqq 1$. Pretože
$$x \pm 2\sqrt{x-1} = 1 \pm 2\sqrt{x-1} + x - 1 = \left(1 \pm \sqrt{x-1}\right)^2,$$
môžeme nerovnicu (11.7) prepísať do tvaru
$$\begin{aligned} \sqrt{\left(1+\sqrt{x-1}\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{x-1}\right)^2} &> \frac{3}{2} \\ \left|1+\sqrt{x-1}\right| + \left|1-\sqrt{x-1}\right| &> \frac{3}{2}. \end{aligned}$$
Pretože $|a+b| \leqq |a|+|b|$ pre každé $a, b \in \mathbb{R}$, máme
$$2 = \left|1+\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}\right| \leqq \left|1+\sqrt{x-1}\right| + \left|1-\sqrt{x-1}\right|.$$
Tým sme overili, že pre každé $x \geqq 1$ platí
$$\left|1+\sqrt{x-1}\right| + \left|1-\sqrt{x-1}\right| \geqq 2 > \frac{3}{2}.$$
Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (11.7) je interval $P = \langle 1, \infty)$.

Príklad 11.6. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$x^2 \geqq x \cdot \left(2 + \sqrt{12 - 2x - x^2}\right). \tag{11.8}$$

Definičný obor nerovnice (11.8) určíme riešením nerovnice $12 - 2x - x^2 \geqq 0$. Je ním interval $\langle -1 - \sqrt{13}, -1 + \sqrt{13}\,\rangle$.

Rozlíšime tri prípady.

a) Zrejme číslo $x = 0$ je riešením nerovnice (11.8). Teda $P_1 = \{0\}$.

b) Predpokladajme, že $x < 0$. Potom môžeme nerovnicu (11.8) upraviť do tvaru

$$\begin{aligned} x &\leqq 2 + \sqrt{12 - 2x - x^2} \\ x - 2 &\leqq \sqrt{12 - 2x - x^2}. \end{aligned}$$

Pretože podľa predpokladu je $x < 0$, máme

$$x - 2 < 0 \leqq \sqrt{12 - 2x - x^2}.$$

Teda $P_2 = \langle -1 - \sqrt{13}, 0)$.

c) Predpokladajme, že $x > 0$. Potom môžeme nerovnicu (11.8) upraviť do tvaru

$$\begin{aligned} x &\geqq 2 + \sqrt{12 - 2x - x^2} \\ x - 2 &\geqq \sqrt{12 - 2x - x^2}. \end{aligned}$$

Pretože druhá odmocnina nemôže byť záporná, platí $x - 2 \geqq 0$, t. j. $x \geqq 2$. Za tohto predpokladu môžeme poslednú nerovnicu umocniť.

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 &\geqq 12 - 2x - x^2 \\ x^2 - x - 4 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Riešením tejto kvadratickej nerovnice je množina $(-\infty, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\rangle \cup \langle \frac{1+\sqrt{17}}{2}, \infty)$. Teda $P_3 = \langle \frac{1+\sqrt{17}}{2}, -1 + \sqrt{13}\,\rangle$.

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (11.8) je množina
$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 = \langle -1 - \sqrt{13}, 0\rangle \cup \langle \frac{1+\sqrt{17}}{2}, -1 + \sqrt{13}\,\rangle$.

Príklad 11.7. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{x-2} < 1. \tag{11.9}$$

Zrejme $x \neq 2$, $2x - 1 \geqq 0$. Teda definičným oborom nerovnice (11.9) je množina $\langle \frac{1}{2}, 2) \cup (2, \infty)$. Rozlíšime dva prípady.

a) Predpokladajme, že $x - 2 > 0$. Potom nerovnica (11.9) prejde do tvaru

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-1} &< x - 2 \\ 2x - 1 &< (x-2)^2 \\ x^2 - 6x + 5 &> 0 \\ (x-1)(x-5) &> 0. \end{aligned}$$

Teda $P_1 = (5, \infty)$.

b) Predpokladajme, že $x - 2 < 0$. Potom nerovnica (11.9) prejde do tvaru

$$\begin{gathered} \sqrt{2x-1} > x - 2 \\ x - 2 < 0 \leqq \sqrt{2x-1}. \end{gathered}$$

Teda $P_2 = \langle \frac{1}{2}, 2)$.

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (11.9) je množina
$P = P_1 \cup P_2 = \langle \frac{1}{2}, 2) \cup (5, \infty)$.

12. Od paraboly k inverznej funkcii

Nasledujúcu úlohu môžeme riešiť pomocou substitúcie $\sqrt{x} = t$, čo je v tomto prípade vhodnejšie, ako umocňovanie rovnice. Ukážeme si iný spôsob riešenia.

Príklad 12.1. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

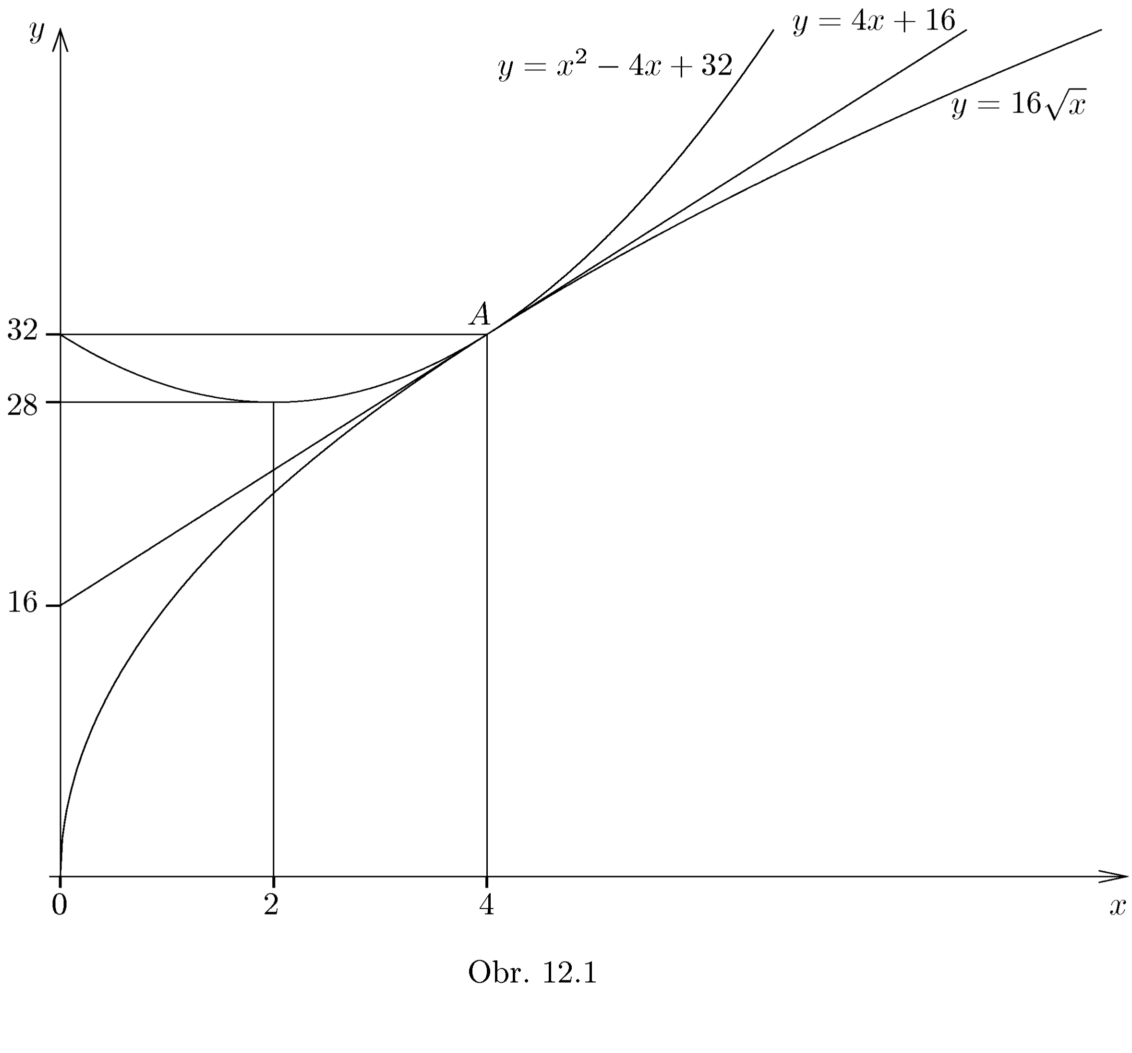
$$x^2 - 4x + 32 = 16\sqrt{x}. \tag{12.1}$$

Ľahko sa overí, že pre každé nezáporné reálne číslo x platí

$$x^2 - 4x + 32 \geqq 4x + 16 \geqq 16\sqrt{x}. \tag{12.2}$$

Skutočne, každú z týchto nerovností možno upraviť do tvaru $(x-4)^2 \geqq 0$. Teda v obidvoch nerovnostiach nastáva rovnosť iba v prípade $x = 4$. Jediným koreňom rovnice (12.1) je číslo $x = 4$.

Záver. Rovnica (12.1) má jediný reálny koreň $x = 4$.



Obr. 12.1

Uvedenému riešeniu lepšie porozumieme, keď si urobíme grafickú analýzu úlohy. Paraboly, ktoré sú nakreslené na obrázku 12.1, sú grafmi funkcií

$$y = x^2 - 4x + 32,$$
$$y = 16\sqrt{x}.$$

Ako vidíme, majú spoločnú dotyčnicu v bode $A = [4, 32]$, ktorej rovnica je

$$y = 4x + 16.$$

Na základe uvedenej grafickej analýzy môžeme formulovať hypotézu, ktorá je vyjadrená nerovnosťami (12.2). Samozrejme, teraz by mal nasledovať analytický dôkaz, ktorý je naznačený vo vyššie prezentovanom riešení.

Pri takýchto rovniciach zvyčajne postupujeme klasickým spôsobom, t. j. prevedieme danú rovnicu na algebraickú rovnicu štvrtého stupňa. Niekedy pritom vystačíme s elementárnymi prostriedkami, ale nie vždy, ako ukazuje nasledujúci príklad[16)].

Príklad 12.2. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$(x-1)^2 = \sqrt{x}. \tag{12.3}$$

Grafickou analýzou zistíme, že rovnica (12.3) má dva reálne korene. Jeden sa nachádza medzi číslami 0.2 a 0.3, druhý medzi číslami 2.2 a 2.3. Substitúciou $\sqrt{x} = t$ prevedieme rovnicu (12.3) do tvaru

$$(t^2-1)^2 = t. \tag{12.4}$$

Naznačíme postup riešenia[17)]. Nech a je konštanta. Z rovnice (12.4) dostávame:

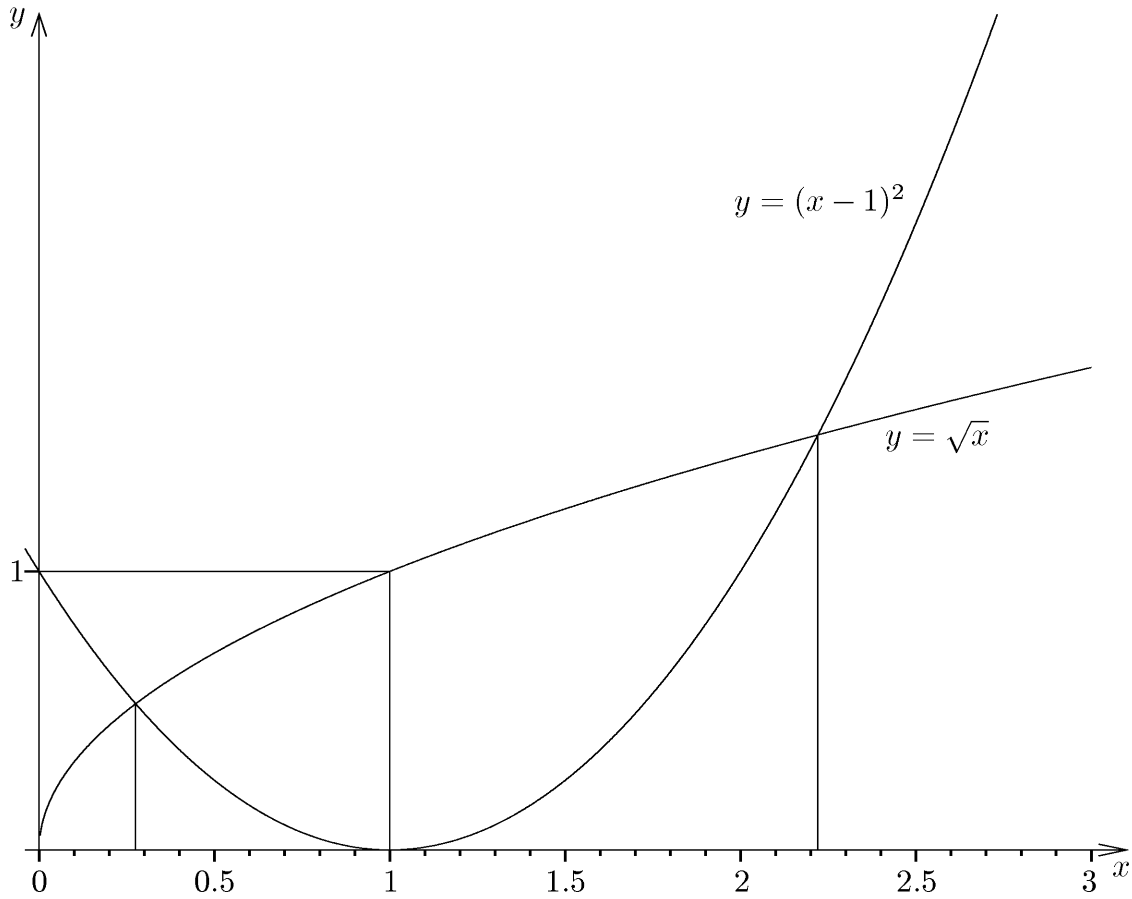
$$(t^2-1+a)^2 = (t^2-1)^2 + 2\cdot(t^2-1)\cdot a + a^2 = t + 2\cdot(t^2-1)\cdot a + a^2$$
$$(t^2-1+a)^2 = 2at^2 + t + a^2 - 2a. \tag{12.5}$$

Ľavá strana je zrejme štvorec. Pravá strana je kvadratický trojčlen, ktorý bude štvorcom vtedy, ak jeho diskriminant bude rovný nule. Teda hľadáme takú konštantu a, pre ktorú platí:

$$D = 1 - 4\cdot 2a\cdot(a^2-2a) = 0$$
$$8a^3 - 16a^2 - 1 = 0. \tag{12.6}$$

16) Башмаков, М. И.: *Уравнения и неравенства*, Наука, Москва, 1971, str. 50.

17) Pre ďalšie štúdium odporúčame knihu
Schwarz, Š.: Základy náuky o riešení rovníc, Vydavateľstvo SAV, Bratislava, 1967.



Obr. 12.2

Hľadaná konštanta a je teda koreňom kubickej rovnice (12.6). Spôsob riešenia takýchto rovníc je vysvetlený v kapitole 3. Riešenie rovnice (12.6) prenechávame čitateľovi ako užitočné cvičenie. Jej jediným reálnym koreňom je číslo

$$a = \frac{1}{6} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{155 + 3\sqrt{849}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{155 - 3\sqrt{849}}{2}} + 4 \right). \tag{12.7}$$

Potom môžeme rovnicu (12.5) upraviť do tvaru

$$(t^2 - 1 + a)^2 = \left(\sqrt{2a} \cdot t + \sqrt{a^2 - 2a} \right)^2. \tag{12.8}$$

Rovnica (12.8) sa rozpadne na dve kvadratické rovnice:

$$t^2 + \sqrt{2a} \cdot t + a - 1 + \sqrt{a^2 - 2a} = 0 \quad \text{a} \quad t^2 - \sqrt{2a} \cdot t + a - 1 - \sqrt{a^2 - 2a} = 0,$$

z ktorých prvá má iba komplexné korene a druhá má iba reálne korene.

Záver. Korene rovnice (12.3) sú:

$$x_{1,2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\lambda_0} \pm \sqrt{\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{4} + 1} - \frac{\lambda_0}{4}}, \text{ kde } \lambda_0 = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{283}{108}} + \frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{283}{108}} - \frac{1}{2}}.$$

Príklad 12.3. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu, kde reálne číslo $a > 1$ je parameter:

$$x = a + \sqrt{a + \sqrt{x}}. \tag{12.9}$$

Položme

$$f(x) = a + \sqrt{x}. \tag{12.10}$$

Potom rovnicu (12.9) môžeme vyjadriť v tvare

$$x = f(f(x)). \tag{12.11}$$

Všimnime si, že každé riešenie rovnice

$$x = f(x) \tag{12.12}$$

je aj riešením rovnice (12.11). Najskôr teda vyriešime rovnicu

$$x = a + \sqrt{x}, \tag{12.13}$$

ktorej jediným reálnym koreňom je

$$x_0 = \frac{2a + 1 + \sqrt{4a + 1}}{2}. \tag{12.14}$$

Ukážeme, že x_0 je aj jediným koreňom rovnice (12.9). Skutočne, keď si uvedomíme, že pre každé $x \geqq 0$ platí

$$x - a - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{a + \sqrt{x}}\right) \cdot \underbrace{\left(\sqrt{x} + \sqrt{a + \sqrt{x}}\right)}_{>0},$$

rovnicu (12.9) môžeme upraviť takto:

$$\begin{aligned} x - a - \sqrt{a + \sqrt{x}} &= 0 \\ \left(x - a - \sqrt{x}\right) + \left(\sqrt{x} - \sqrt{a + \sqrt{x}}\right) &= 0 \\ \left(x - a - \sqrt{x}\right) + \frac{x - a - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{a + \sqrt{x}}} &= 0 \\ \left(x - a - \sqrt{x}\right) \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a + \sqrt{x}}}\right)}_{>1} &= 0. \end{aligned}$$

Tým sme ukázali, že rovnice (12.9) a (12.13) sú ekvivalentné.

Záver. Rovnica (12.9) má jediný reálny koreň

$$x_0 = \frac{2a + 1 + \sqrt{4a+1}}{2}.$$

Poznámka. Zaujímavá je aj diskusia vzhľadom na parameter a.

$a < -\frac{1}{4}$	rovnica (12.9) nemá riešenie
$a = -\frac{1}{4}$	rovnica (12.9) má jediné riešenie $x_0 = \frac{1}{4}$
$-\frac{1}{4} < a \leqq 0$	rovnica (12.9) má dve riešenia $x_{1,2} = \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}\right)^2$
$0 < a$	rovnica (12.9) má jediné riešenie $x_0 = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}\right)^2$

Všimnime si, že za predpokladu existencie inverznej funkcie f^{-1} k funkcii f môžeme rovnicu (12.11) prepísať do symetrického tvaru

$$f^{-1}(x) = f(x), \tag{12.15}$$

ktorý je vhodnejší na grafickú analýzu úlohy.

Takáto situácia nastáva aj v príklade 12.3, kde funkcia f určená vzťahom (12.10) má inverznú funkciu definovanú predpisom

$$y = (x-a)^2, \ x \geqq a.$$

Môžeme to využiť pri grafickej analýze úlohy. Pozrite si obrázok 12.3. Ako vidíme, pre $a = 2$ má rovnica (12.9) jediný koreň $x_0 = 4$.

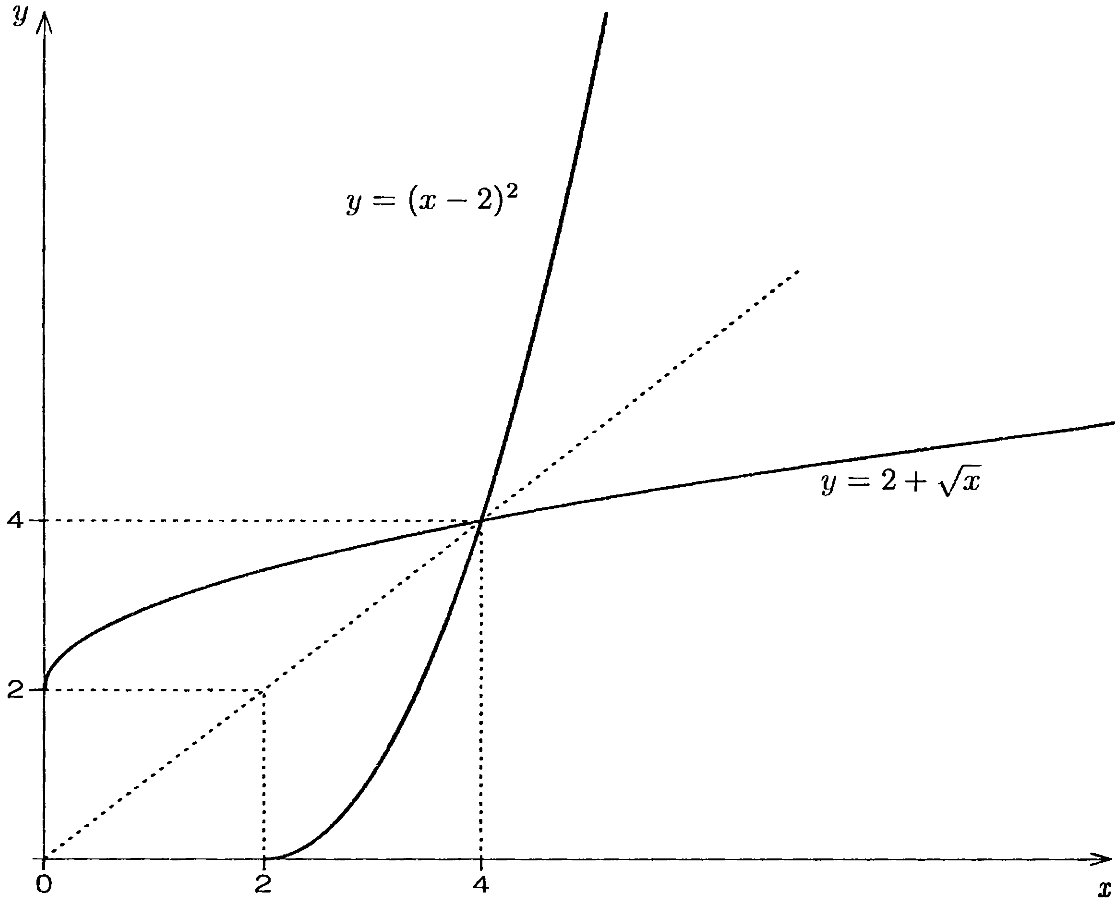
V príklade 12.3 boli rovnice (12.11) a (12.12) ekvivalentné. Vždy to tak nemusí byť. Rovnica[18)]

$$x = a^{a^x} \tag{12.16}$$

má pre $a = \frac{1}{16}$ tri korene, z ktorých dva $\left(x_1 = \frac{1}{2}\text{ a } x_2 = \frac{1}{4}\right)$ nie sú koreňmi rovnice

$$x = a^x. \tag{12.17}$$

[18)] Jej podrobnú analýzu možno nájsť v článku
Виленкин, Н.: *Три точки, три точки, три точки,...*, Квант, 1 (1980), 48–50.



Obr. 12.3

Všimnime si, že rovnice (12.16) a (12.17) majú tvar (12.11) a (12.12). Naozaj, stačí položiť $f(x) = a^x$. Prechodom k inverznej funkcii môžeme rovnicu (12.16) prepísať do symetrického tvaru

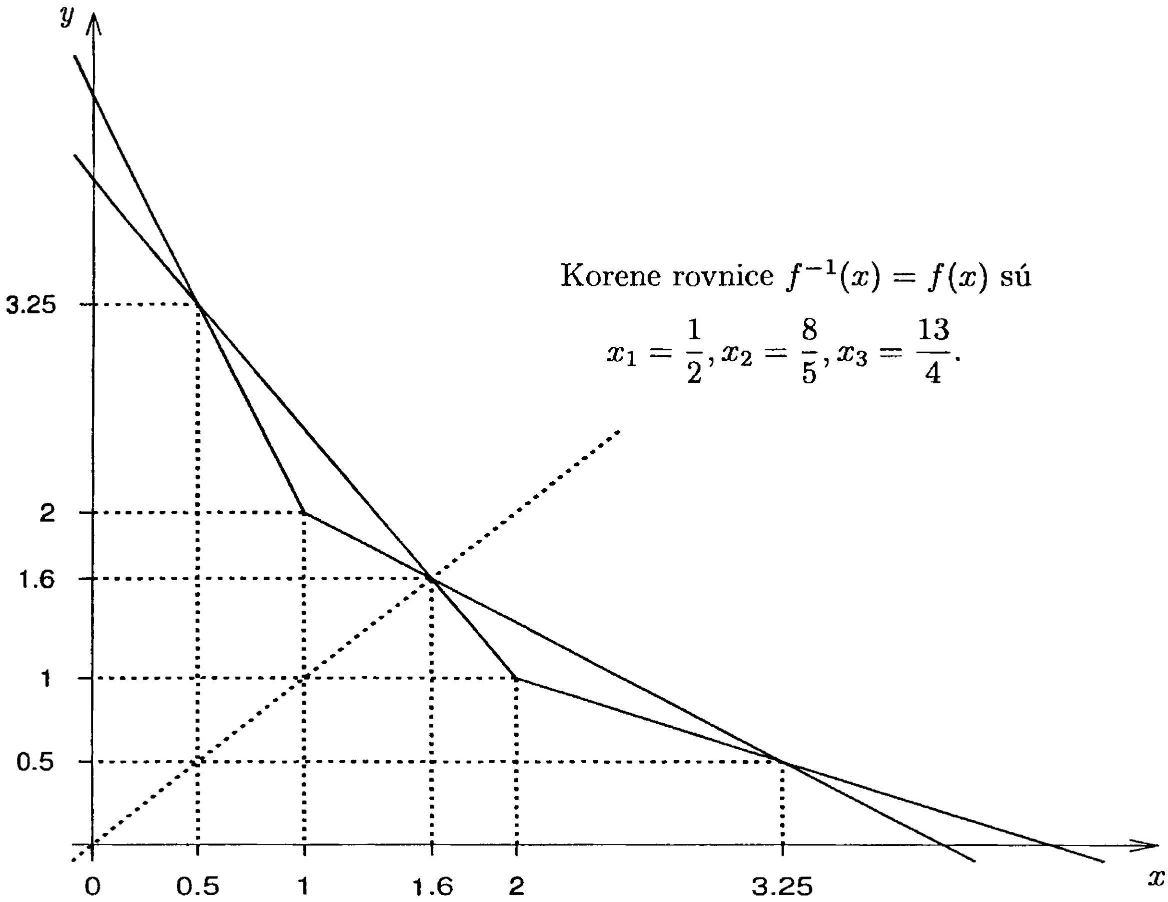
$$\log_a x = a^x. \tag{12.18}$$

Pri hľadaní koreňa rovnice (12.17), t. j. tretieho koreňa rovnice (12.16), musíme použiť približné metódy. Napriek jej zdanlivej jednoduchosti nedokážeme túto rovnicu riešiť analyticky. Ukážeme si úlohu, ktorá tento nedostatok nemá.

Príklad 12.4. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu $f^{-1}(x) = f(x)$ pre funkciu

$$f(x) = \frac{11\,|x-1| - 19x + 43}{12}. \tag{12.19}$$

Funkcia f^{-1} je určená predpisom $y = \dfrac{11 \cdot |x-2| - 19x + 58}{20}$.



Obr. 12.4

Nasledujúce dve úlohy riešte samostatne. Ukazujú, že rovnica $f^{-1}(x) = f(x)$ môže mať aj viac koreňov (pritom v obidvoch prípadoch rovnica $x = f(x)$ má jediný koreň).

Úloha 1. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnicu $f^{-1}(x) = f(x)$ pre funkciu

$$f(x) = \frac{22\,|x-1| + 5\,|x-4| - 33x + 66}{24}.$$

Úloha 2. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnicu $f^{-1}(x) = f(x)$ pre funkciu

$$f(x) = \frac{30\,|x+1| + 22\,|x-1| + 5\,|x-4| - 63x + 36}{24}.$$

13. Ekvivalentnosť rovníc

Príklad 13.1. Zistite, či sú nasledujúce rovnice ekvivalentné:

$$\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-2}=1, \tag{13.1}$$

$$\sqrt{(x-1)\cdot(x-2)}=1. \tag{13.2}$$

Ak umocníme ľubovoľnú z obidvoch rovníc, dostávame

$$\begin{aligned}(x-1)\cdot(x-2)&=1\\ x^2-3x+1&=0. \end{aligned} \tag{13.3}$$

Korene rovnice (13.3) sú

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Skúškou správnosti sa môžeme presvedčiť, že obidve čísla $x_{1,2}$ sú koreňmi rovnice (13.2), ale iba číslo x_1 je koreňom rovnice (13.1).

Záver. Dané rovnice nie sú ekvivalentné.

Poznámka 1. Pripomeňme si, že v prípade $0 < f(x) = g(x)$ je umocňovanie ekvivalentnou úpravou.

Poznámka 2. S rovnicou (13.1) sa môžeme stretnúť pri riešení rovnice

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2x-1}.$$

Príklad 13.2. Zistite, či sú nasledujúce rovnice ekvivalentné:

$$\log(x-2)-\log(x-1)=1, \tag{13.4}$$

$$\log\frac{x-2}{x-1}=1. \tag{13.5}$$

Uvedené rovnice riešime klasickým spôsobom:

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x-1}&=10\\ x-2&=10x-10\\ 9x&=8\\ x&=\frac{8}{9}.\end{aligned}$$

Ľahko sa môžete presvedčiť, že číslo $x=\frac{8}{9}$ je koreňom rovnice (13.5), ale nie je koreňom rovnice (13.4).

Záver. Dané rovnice nie sú ekvivalentné.

14. Musíme robiť skúšku správnosti?

V prípade, že pri riešení rovnice používame dôsledkové úpravy, pôvodná rovnica a vzniknutá rovnica nemusia byť ekvivalentné. Z tohto dôvodu musíme určiť, ktoré korene vzniknutej rovnice treba vylúčiť. Pritom najpoužívanejším nástrojom býva skúška správnosti. Dokonca niektoré stredoškolské učebnice v takomto prípade skúšku správnosti striktne vyžadujú.[19)]

Nasledujúci príklad názorne ukazuje nezmyselnosť takejto požiadavky.

Príklad 14.1. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$x + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 1. \tag{14.1}$$

Tento jednoduchý príklad prekvapujúco robí študentom problémy. Klasickým postupom totiž dostávame:

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 - 2x + 1} &= 1 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 1} &= 1 - x \\ x^2 - 2x + 1 &= 1 - 2x + x^2, \end{aligned}$$

na základe čoho študenti usudzujú, že každé reálne číslo je riešením rovnice (14.1). Skúste však dosadiť do rovnice (14.1) napr. $x = 2$.

Ukážeme si korektný spôsob riešenia:

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 - 2x + 1} &= 1 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 1} &= 1 - x \\ \sqrt{(x-1)^2} &= 1 - x \\ |x - 1| &= 1 - x. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Pretože $|a| = -a$ práve vedy, keď $a \leqq 0$, podľa (14.2) máme[20)]

$$x - 1 \leqq 0.$$

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (14.1) je množina $P = (-\infty, 1\rangle$.

Premyslite si, ako by ste v predchádzajúcom príklade urobili skúšku správnosti.

[19)] Burjan, V. – Maxian, M.: Matematika, opakovanie pre gymnázium s triedami zameranými na matematiku, SPN, Bratislava, 1989, kde na str. 64 sa píše: *„V prípade, že medzi použitými úpravami bola čo len jedna dôsledková (neekvivalentná) úprava, je skúška nevyhnutnou súčasťou riešenia.“*

[20)] pre $a = x - 1$

Nasledujúci príklad ukazuje, že skúška správnosti môže byť komplikovanejšia ako samotné vyriešenie úlohy.

Príklad 14.2. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{-x}. \tag{14.3}$$

Za pozornosť stojí pravá strana v rovnici (14.3). Niektorí študenti sú náchylní prehlásiť, že výraz $\sqrt{-x}$ nemá zmysel.[21)]

Poďme teda určiť definičný obor rovnice (14.3).
Pretože pod druhou odmocninou nemôže byť záporné číslo, musí súčasne platiť

$$\begin{aligned} x+3 &\geqq 0 \quad /-3 & \qquad -x &\geqq 0 \quad /\cdot(-1) \\ x &\geqq -3, & x &\leqq 0. \end{aligned} \tag{14.4}$$

Definičným oborom rovnice (14.3) je teda interval $\langle -3, 0\rangle$.

Riešenie rovnice (14.3) môže potom vyzerať takto:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} &= 1 + \sqrt{-x} \quad \Big/ (\ )^2 \\ x+3 &= 1 + 2\sqrt{-x} - x \quad \Big/ + x - 1 \\ 2x+2 &= 2\sqrt{-x} \quad \Big/ : 2 \\ x+1 &= \sqrt{-x} \quad \Big/ (\ )^2 \\ x^2+2x+1 &= -x \quad \Big/ + x \\ x^2+3x+1 &= 0 \\ x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, &\quad x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Nie je problém presvedčiť sa, že obidva korene spĺňajú podmienky (14.4), t. j. ležia v definičnom obore rovnice (14.3).

---

21) Problém je v mechanickom prenášaní návykov z jednej časti matematiky do druhej. Pri číslach totiž znamienko mínus je ich neoddeliteľnou súčasťou. Napr. čísla -5, $-\pi$ a pod. sú zapísané vo svojom základnom tvare, tento zápis nie je možné zjednodušiť. Naproti tomu do výrazu $\sqrt{-x}$ môžeme dosadiť namiesto x číslo -5. Skutočne, $\sqrt{-(-5)} = \sqrt{5}$. Je potrebné si uvedomiť, že v tomto prípade znamienko mínus predstavuje skrátený zápis násobenia číslom mínus jedna, t. j. $\sqrt{-(-5)} = \sqrt{(-1)\cdot(-5)} = \sqrt{5}$.

Teraz urobíme skúšku správnosti[22].

Najskôr ukážeme, že platí

$$\sqrt{x_1+3}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{14.5}$$

Dosadíme x_1 do ľavej strany

$$\sqrt{x_1+3}=\sqrt{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}+3}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

Zostáva nám ukázať, že platí

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

K tomu si stačí uvedomiť, že

1. číslo $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ je kladné,
2. pre jeho druhú mocninu platí

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Teraz ukážeme, že platí

$$1+\sqrt{-x_1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{14.6}$$

Dosadíme x_1 do ľavej strany

$$1+\sqrt{-x_1}=1+\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}. \tag{14.7}$$

Ukážeme, že platí

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{14.8}$$

K tomu si stačí uvedomiť, že

[22] Pozor! Nespoliehajte sa na kalkulačku. Pomocou nej totiž môžete overiť zhodu ľavej a pravej strany len na istý počet desatinných miest (podľa typu kalkulačky). Pôsobí to síce presvedčivo, ale čo ak sa rozdiel medzi ľavou a pravou stranou prejaví až na niektorom ďalšom desatinnom mieste?

1. číslo $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ je kladné,
2. pre jeho druhú mocninu platí

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Po dosadení (14.8) do (14.7) dostávame

$$1+\sqrt{-x_1} = 1+\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2+\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Teraz už stačí spojiť dohromady rovnosti (14.5) a (14.6). Odtiaľ vyplýva, že číslo x_1 je koreňom rovnice (14.3).

Na druhej strane, platí

$$\sqrt{x_2+3} = \sqrt{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}+3} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \neq \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1+\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = 1+\sqrt{-x_2},$$

$$\sqrt{x_2+3} \neq 1+\sqrt{-x_2}. \tag{14.9}$$

Nerovnosť (14.9) dokazuje, že číslo x_2 nie je koreňom rovnice (14.3). A to aj napriek tomu, že leží v definičnom obore rovnice (14.3). Je to spôsobené tým, že použité úpravy neboli ekvivalentné, ale dôsledkové. Pokúste sa trasovať, v ktorej etape riešenia pribudol falošný koreň[23].

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (14.3) je množina

$$P = \left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Ukážeme si, že bez skúšky správnosti sme sa mohli zaobísť.
Z rovnice $x+1=\sqrt{-x}$ totiž vyplýva, že pre každý jej koreň musí platiť $x+1 \geqq 0$. Pretože jedinou ďalšou dôsledkovou úpravou bolo umocnenie tejto rovnice na druhú, podmienka $x+1 \geqq 0$ je jedinou podmienkou, ktorú ešte musíme brať do úvahy. Už predtým sme overili, že obidve čísla $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ ležia v definičnom obore rovnice (14.3). Pretože číslo $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ podmienku $x+1 \geqq 0$ nespĺňa, nie je koreňom rovnice (14.3). Pretože číslo $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ podmienku $x+1 \geqq 0$ spĺňa, je koreňom rovnice (14.3).

[23] Rovnica $x+1=\sqrt{-x}$ je ekvivalentná s rovnicou (14.3), ale nie je ekvivalentná s rovnicou $x^2+2x+1=-x$, ktorá je jej dôsledkom.

Na záver si ešte prezradíme, ako možno nájsť rovnosti tvaru (14.6). Použijeme k tomu metódu neurčitých koeficientov. Hľadáme racionálne čísla a, b, pre ktoré platí: $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = a + \sqrt{5} \cdot b$.

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = a + \sqrt{5} \cdot b \quad \Big/ (\ )^2$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = a^2 + 2\sqrt{5} \cdot ab + 5b^2$$

$$a^2 + 5b^2 = \frac{3}{2}, \qquad 2\sqrt{5} \cdot ab = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$ab = \frac{1}{4}.$$

Vzhľadom na rovnosť $ab = \frac{1}{4}$, ani jedno z čísel a, b nemôže byť rovné nule. Pretože $ab = \frac{1}{4} > 0$, čísla a, b majú rovnaké znamienko. Ak by obidve boli záporné, potom by aj číslo $a + \sqrt{5} \cdot b = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ bolo záporné, čo sa druhej odmocnine nemôže stať. Teda platí $a > 0$, $b > 0$.

Z rovnice $ab = \frac{1}{4}$ vyjadríme b a dosadíme do rovnice $a^2 + 5b^2 = \frac{3}{2}$. Po úprave dostaneme

$$16a^4 - 24a^2 + 5 = 0$$

$$(4a^2 - 5)(4a^2 - 1) = 0.$$

Kladný racionálny koreň tejto rovnice je iba $a = \frac{1}{2}$.
Z rovnice $ab = \frac{1}{4}$ vypočítame $b = \frac{1}{2}$. Tým je odvodenie rovnosti (14.6) ukončené.

Pokúsme sa zosumarizovať získané poznatky. Robiť skúšku správnosti, alebo nie? Ako ste videli sami, jednoznačná odpoveď na takto položenú otázku neexistuje. Sám sa prikláňam ku skúške správnosti, pokiaľ nie je zložitejšia ako riešenie samotnej rovnice. Je tu však jedno ale. Občas sa totiž stretávam s nekorektnými riešeniami rovníc, pri ktorých študentovi skúška správnosti vyjde! Aby každému bolo jasné, čo mám na mysli, uvedieme si odstrašujúci príklad:

„Riešenie“: $\sqrt{x^2+4} = 5$, $x + 2 = 5$, $x = 3$

„Skúška správnosti“: $\sqrt{3^2+4} = 5$, $3 + 2 = 5$, $5 = 5$

15. Definičný obor rovnice

Definičný obor rovnice je číselná množina, v ktorej majú všetky výrazy v tejto rovnici zmysel.[24] V tejto kapitole sa presvedčíme o jeho užitočnosti.

V prípade, že pri riešení rovnice používame dôsledkové úpravy, pôvodná rovnica a vzniknutá rovnica nemusia byť ekvivalentné. Z tohto dôvodu musíme určiť, ktoré korene vzniknutej rovnice treba vylúčiť. Mohlo by sa zdať, že stačí vylúčiť tie hodnoty, ktoré neležia v definičnom obore pôvodnej rovnice[25].

Že to nemusí stačiť, o tom nás presvedčí nasledujúci príklad.

Príklad 15.1. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sqrt{x-13}+\sqrt{x+12}=1. \tag{15.1}$$

Postupujeme klasickým spôsobom:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-13} &= 1-\sqrt{x+12}\\
x-13 &= 1-2\sqrt{x+12}+x+12\\
2\sqrt{x+12} &= 26\\
\sqrt{x+12} &= 13\\
x+12 &= 169\\
x &= 157.
\end{aligned}$$

Definičným oborom rovnice (15.1) je interval $\langle 13,\infty)$. Ako vidíme, číslo $x=157$ leží v definičnom obore rovnice (15.1). Napriek tomu nie je jej koreňom. Môžeme sa o tom presvedčiť skúškou správnosti.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (15.1) je prázdna množina.

Poznámka. O tom, že rovnica (15.1) nemá reálne korene, sa môžeme presvedčiť aj nasledujúcim spôsobom:

$$x \geqq 13 \Rightarrow x+12 \geqq 25 \Rightarrow \sqrt{x+12} \geqq 5$$

$$\underbrace{\sqrt{x-13}}_{\geqq 0}+\underbrace{\sqrt{x+12}}_{\geqq 5}=1$$

Pretože ľavá strana rovnice (15.1) nemôže byť menšia ako 5, určite sa nemôže rovnať číslu 1.

---

[24] Smida, J. – Šedivý, J. – Lukátšová, J. – Vocelka, J.: Matematika pre 1. ročník gymnázia, SPN, Bratislava, 1990, str. 192.

[25] J. Jarník – M. Šisler: Jak řešit rovnice a jejich soustavy, SNTL-Práce, Praha, 1969, kde sa na str. 105 píše: *„Jde v podstatě o to vyloučit hodnoty neznámé, které nepatří do oboru funkcí vyskytujících se v rovnici.“*

Poučný je aj nasledujúci príklad.[26)]

Príklad 15.2. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$x + \sqrt{x^2 - 8} = 2. \tag{15.2}$$

Riešime štandardným spôsobom:

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 - 8} &= 2 \\ \sqrt{x^2 - 8} &= 2 - x \\ x^2 - 8 &= (2 - x)^2 \\ x^2 - 8 &= 4 - 4x + x^2 \\ 4x &= 12 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Presvedčte sa, že číslo $x = 3$ leží v definičnom obore rovnice (15.2). Ukážeme, že napriek tomu nie je jej koreňom. Ak rovnicu (15.2) upravíme do tvaru

$$\sqrt{x^2 - 8} = 2 - x,$$

ľahko vidíme, že každý jej koreň musí spĺňať podmienku $2 - x \geqq 0$. Číslo $x = 3$ však evidentne tejto podmienke nevyhovuje.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (15.2) je prázdna množina.

Teraz si uvedieme dva príklady, ktoré nás presvedčia, že určovanie definičného oboru rovnice nemusí byť zbytočnou stratou času. Najskôr jeden veľmi jednoduchý.

Príklad 15.3. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sqrt{x - 2} + \sqrt{1 - x} = 3. \tag{15.3}$$

Zrejme musí platiť $x - 2 \geqq 0$ a $1 - x \geqq 0$. Teda $x \geqq 2$ a $x \leqq 1$. Ukázali sme, že definičným oborom rovnice (15.3) je prázdna množina.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (15.3) je prázdna množina.

Nasledujúci príklad nebude taký triviálny.

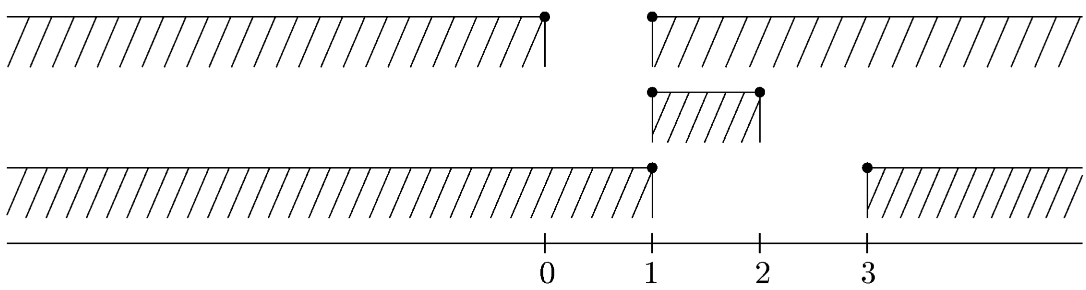
[26)] K. Havlíček a kol.: Cesty moderní matematiky, Horizont, Praha, 1976, str. 23.

Príklad 15.4. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}. \tag{15.4}$$

Určíme definičný obor rovnice (15.4).

$$\begin{array}{ccc} x^2-4x+3 \geqq 0 & -x^2+3x-2 \geqq 0 & x^2-x \geqq 0 \\ (x-3)(x-1) \geqq 0 & (x-1)(2-x) \geqq 0 & x(x-1) \geqq 0 \\ x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 3, \infty) & x \in \langle 1, 2\rangle & x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty) \end{array}$$



Obr. 15.1

Také x existuje iba jediné: $x = 1$. Skúškou správnosti sa presvedčíme o tom, že $x = 1$ je naozaj koreňom rovnice (15.4).

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (15.4) je množina

$$P = \{1\}.$$

V predchádzajúcich dvoch príkladoch sme videli, že definičný obor rovnice môže byť konečnou množinou (niekedy dokonca prázdnou množinou). Takéto úlohy sa však nevyskytujú príliš často. Avšak aj v prípade, že definičný obor rovnice nie je konečný, môže byť užitočný. Ukážeme si to v nasledujúcej úlohe.

Príklad 15.5. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$x+\sqrt{1+x\cdot\sqrt{x}}=1. \tag{15.5}$$

Rovnicu (15.5) upravíme do tvaru

$$\sqrt{1+x\cdot\sqrt{x}}=1-x. \tag{15.6}$$

Pretože pod druhou odmocninou nemôže byť záporné číslo, musí platiť
$$x \geqq 0. \tag{15.7}$$
Odtiaľ už ľahko odvodíme, že definičným oborom rovnice (15.5) je interval $\langle 0, \infty)$.

Z podmienky (15.7) dostávame
$$\begin{aligned} \sqrt{x} &\geqq 0 \quad \Big/ \cdot x \\ x \cdot \sqrt{x} &\geqq 0 \quad \Big/ + 1 \\ 1 + x \cdot \sqrt{x} &\geqq 1 \quad \Big/ \sqrt{} \\ \sqrt{1 + x \cdot \sqrt{x}} &\geqq 1. \end{aligned} \tag{15.8}$$
Podľa (15.6) a (15.8) máme
$$\begin{aligned} 1 - x &\geqq 1 \quad \Big/ + x - 1 \\ 0 &\geqq x. \end{aligned} \tag{15.9}$$
Podľa (15.7) a (15.9) máme $x = 0$. Skúška správnosti nás presvedčí, že číslo $x = 0$ je koreňom rovnice (15.5).

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (15.5) je množina
$$P = \{0\}.$$

Nasledujúci príklad bude presne opačného razenia. A to aj napriek tomu, že na prvý pohľad je veľmi podobný príkladu 15.5.

Príklad 15.6. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:
$$\sqrt{1 + x \cdot \sqrt{x^2 + 24}} = x + 1. \tag{15.10}$$

Budeme postupovať bez určovania definičného oboru[27)]
$$\begin{aligned} \sqrt{1 + x \cdot \sqrt{x^2 + 24}} &= x + 1 \quad \Big/ (\ )^2 \\ 1 + x \cdot \sqrt{x^2 + 24} &= x^2 + 2x + 1 \quad \Big/ - 1 \\ x \cdot \sqrt{x^2 + 24} &= x^2 + 2x \\ x \cdot \sqrt{x^2 + 24} &= x \cdot (x + 2). \end{aligned}$$

[27)] Pokúste sa ho nájsť samostatne. Vôbec to nie je triviálne. Môžete využiť skutočnosť, že ľavá strana rovnice (15.10) je rastúca funkcia. Definičným oborom rovnice (15.10) je interval $\langle -\sqrt{\sqrt{145} - 12}, \infty)$.

V tomto okamihu by sme potrebovali rovnicu predeliť. Môžeme to urobiť iba za predpokladu, že $x \neq 0$. Preto sa najskôr presvedčíme, či náhodou číslo $x = 0$ nie je koreňom rovnice (15.10). Naozaj je. Našli sme teda jeden koreň rovnice (15.10).

Budeme predpokladať, že $x \neq 0$ (môžeme si to dovoliť, pretože prípad $x = 0$ sme si už premysleli). Potom platí

$$\begin{aligned} x \cdot \sqrt{x^2+24} &= x \cdot (x+2) \quad \Big/ : x \\ \sqrt{x^2+24} &= x+2 \quad \Big/ (\ )^2 \\ x^2+24 &= x^2+4x+4 \quad \Big/ -x^2-4 \\ 20 &= 4x \quad \Big/ : 4 \\ 5 &= x. \end{aligned}$$

Skúškou správnosti ľahko overíme, že číslo $x = 5$ je koreňom rovnice (15.10).

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (15.10) je množina

$$P = \{0, 5\}.$$

Aj v ďalšom príklade bude ľahšie vyriešiť rovnicu, ako nájsť jej definičný obor.

Príklad 15.7. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sqrt{x^3 - x + 1} = 1. \tag{15.11}$$

Skutočne, riešenie rovnice je jednoduché:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3-x+1} &= 1 \\ x^3-x+1 &= 1 \\ x^3-x &= 0 \\ x(x-1)(x+1) &= 0. \end{aligned}$$

Skúškou správnosti sa ľahko presvedčíme, že čísla $x = -1$, $x = 0$ a $x = 1$ sú koreňmi rovnice (15.11).

Pritom definičným oborom rovnice (15.11) je interval $\langle x_0, \infty)$, kde

$$x_0 = -\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}}.$$

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (15.11) je množina

$$P = \{-1, 0, 1\}.$$

16. Exponenciálne rovnice

Príklad 16.1. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$x^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}. \tag{16.1}$$

Najskôr budeme uvažovať prípad $x > 0$. Rovnicu (16.1) prepíšeme do tvaru

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\sqrt{x+1}} = 4^3. \tag{16.2}$$

Porovnaním základov a exponentov dostávame sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= 4, \\ \sqrt{x+1} &= 3, \end{aligned}$$

ktorej jediným riešením je $x = 8$.

Ukážeme, že rovnica (16.2) iné kladné riešenia nemá. Rozlíšime dva prípady:

1) Ak $0 < x < 8$, potom

$$0 < \frac{x}{2} < 4, \qquad \sqrt{x+1} < 3,$$

teda platí

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\sqrt{x+1}} < 4^{\sqrt{x+1}} < 4^3.$$

Tým sme ukázali, že rovnica (16.2) nemá korene v intervale $(0, 8)$.

2) Ak $x > 8$, potom

$$\frac{x}{2} > 4, \qquad \sqrt{x+1} > 3,$$

teda platí

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\sqrt{x+1}} > 4^{\sqrt{x+1}} > 4^3.$$

Tým sme ukázali, že rovnica (16.2) nemá korene v intervale $(8, \infty)$.

Nie je ťažké overiť, že $x = 0$ nie je koreňom rovnice (16.1).

Nakoniec preskúmame prípad $x < 0$. Pripomeňme si, že výraz a^r je pre $a < 0$ definovaný (v stredoškolských učebniciach) iba pre $r \in \mathbb{Z}$. Výraz $x^{\sqrt{x+1}}$ je definovaný iba vtedy, ak $\sqrt{x+1}$ je celé číslo. Pretože platí $0 \leqq \sqrt{x+1} < 1$, máme $\sqrt{x+1} = 0$. Odtiaľ vyplýva, že do definičného oboru rovnice (16.1) patrí jediné záporné číslo $x = -1$. Dosadením do rovnice (16.1) sa ľahko presvedčíme, že $x = -1$ nie je jej koreňom.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (16.1) je množina

$$P = \{8\}.$$

Príklad 16.2. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$5^{2x} = 3^{2x} + 2 \cdot 5^x + 2 \cdot 3^x. \tag{16.3}$$

Po jednoduchej úprave máme

$$(5^x - 3^x) \cdot (5^x + 3^x) = 2 \cdot \underbrace{(5^x + 3^x)}_{>0},$$

odkiaľ dostávame

$$5^x - 3^x = 2. \tag{16.4}$$

Ľahko vidíme, že $x = 1$ je riešením rovnice (16.4). Ukážeme, že iné korene nemá. Najskôr prepíšeme rovnicu (16.4) do tvaru

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1. \tag{16.5}$$

Na ľavej strane rovnice (16.5) máme rastúcu funkciu $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$. Na pravej strane rovnice (16.5) máme klesajúcu funkciu $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$, ktorá je kompozíciou rastúcej funkcie $y = 2x + 1$ a klesajúcej funkcie $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Odtiaľ vyplýva, že rovnica (16.5) môže mať najviac jeden reálny koreň. Ten sme už našli, je to $x = 1$.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (16.3) je množina

$$P = \{1\}.$$

Príklad 16.3. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(1 + \frac{1}{1988}\right)^{1988}. \tag{16.6}$$

1) Najskôr budeme riešiť rovnicu (16.6) v obore prirodzených čísel. Ukážeme, že pre ľubovoľné prirodzené čísla k, n platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k. \tag{16.7}$$

Využijeme nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom:

$$\sqrt[m]{a_1 a_2 \dots a_m} < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m}, \tag{16.8}$$

ktorá platí pre ľubovoľné nezáporné čísla $a_1, a_2, \dots, a_m$, ktoré nie sú všetky rovnaké.

Pretože podľa (16.8) pre ľubovoľné prirodzené čísla k, n platí

$$\sqrt[n+k+1]{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} < \frac{k\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right) + (n+1)\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{k+n+1} = 1,$$

máme

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 1,$$

odkiaľ po malej úprave dostávame nerovnosť (16.7).

Zo (16.7) vyplýva, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{1988}\right)^{1988}.$$

Tým sme ukázali, že rovnica (16.6) nemá riešenie v obore prirodzených čísel.

2) Teraz budeme riešiť rovnicu (16.6) v obore celých čísel. Zrejme čísla $x = 0$ a $x = -1$ nepatria do definičného oboru rovnice (16.6). Budeme teda predpokladať, že x je záporné celé číslo, $x \neq -1$. Potom $x+1$ je záporné celé číslo. Môžeme ho teda vyjadriť v tvare $x + 1 = -m$, kde m je prirodzené číslo. Po dosadení $x = -m - 1$ do rovnice (16.6) dostávame

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{-m-1}\right)^{-m} &= \left(1+\frac{1}{1988}\right)^{1988}\\
\left(\frac{-m}{-m-1}\right)^{-m} &= \left(1+\frac{1}{1988}\right)^{1988}\\
\left(\frac{m}{m+1}\right)^{-m} &= \left(1+\frac{1}{1988}\right)^{1988}\\
\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m} &= \left(1+\frac{1}{1988}\right)^{1988}\\
\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} &= \left(1+\frac{1}{1988}\right)^{1988}.
\end{aligned} \tag{16.9}$$

Zrejme číslo $m = 1988$ je koreňom rovnice (16.9). Ukážeme, že iné korene nemá. Vyplýva to z faktu, že čísla $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tvoria rastúcu postupnosť. Použijeme nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom. Podľa (16.8) pre každé prirodzené číslo n platí

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<\frac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1},$$

odkiaľ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Tým sme ukázali, že číslo $x=-1988-1=-1989$ je jediným celočíselným koreňom rovnice (16.6).

3) Pri riešení rovnice (16.6) v reálnom obore budeme pracovať s deriváciou. Položme

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Potom pre každé x z definičného oboru funkcie $y=f(x)$ platí:

$$f'(x)=\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}}_{>0}\cdot\underbrace{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right]}_{<0}.$$

Využili sme pritom skutočnosť, že pre každé $x>-1$, $x\neq 0$ platí $\ln(1+x)<x$. Priamka $y=x$ je dotyčnicou ku grafu funkcie $y=\ln(1+x)$ v bode $[0,0]$. Nakreslite si obrázok. Analytický dôkaz využíva deriváciu funkcie $y=g(x)$, kde $g(x)=x-\ln(1+x)$. Pretože pre $x>0$ je $g'(x)=\frac{x}{1+x}>0$, funkcia $y=g(x)$ je rastúca na intervale $\langle 0,\infty)$. Odtiaľ vyplýva, že pre každé $x>0$ platí $g(x)>g(0)=0$. Pretože pre $x\in(-1,0)$ je $g'(x)=\frac{x}{1+x}<0$, funkcia $y=g(x)$ je klesajúca na intervale $(-1,0\rangle$. Odtiaľ vyplýva, že pre každé $x\in(-1,0)$ platí $g(x)>g(0)=0$. V obidvoch prípadoch teda platí $g(x)=x-\ln(1+x)>0$.

Pretože funkcia $y=f(x)$ má zápornú deriváciu, je klesajúca na každom intervale, ktorý leží v jej definičnom obore. Teda je klesajúca na intervale $(-\infty,-1)$, ako aj na intervale $(0,\infty)$.

Pretože funkcia $y=f(x)$ je klesajúca na intervale $(0,\infty)$, podľa (16.7) pre každé $x>0$ a pre každé prirodzené číslo k platí

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}>\left(1+\frac{1}{k}\right)^k. \tag{16.10}$$

Skutočne, ak $x>0$ je pevne zvolené reálne číslo, stačí vybrať ľubovoľným spôsobom prirodzené číslo n, ktoré je väčšie ako x. Pretože funkcia $y=f(x)$ je klesajúca, platí

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Potom podľa (16.7) pre každé prirodzené číslo k platí

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}.$$

Tým je nerovnosť (16.10) dokázaná.

Pre $k = 1988$ potom podľa (16.10) máme

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} > \left(1+\frac{1}{1988}\right)^{1988},$$

čo platí pre každé kladné reálne číslo x. Odtiaľ vyplýva, že rovnica (16.6) nemá kladné reálne korene.

Pretože funkcia $y = f(x)$ je na intervale $(-\infty, -1)$ klesajúca, rovnica (16.6) môže mať na tomto intervale najviac jeden reálny koreň. Ako sme ukázali vyššie, týmto koreňom je číslo $x = -1989$.

Záver. Rovnica (16.6) má jediný reálny koreň $x = -1989$.

17. Exponenciálne nerovnice

Príklad 17.1. Ukážte, že pre všetky $x \in (0, \frac{3}{2})$ platí

$$2^x < 1 + 2x. \tag{17.1}$$

Takéto úlohy sa riešia pomocou druhej derivácie. Ukáže sa, že funkcia $y = 2^x$ je konvexná, odkiaľ vyplýva, že jej graf leží pod sečnicou. Pretože tieto nástroje nie sú v stredoškolskej matematike bežné, budeme postupovať iným spôsobom.

Využijeme Bernoulliho nerovnosť (pozri str. 177). Pre $t = 1$ dostávame:

$$\begin{aligned} (1+1)^x &> 1 + x, &\quad &\text{ak } x > 1 \text{ alebo } x < 0,\\ (1+1)^x &< 1 + x, &\quad &\text{ak } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Tým sme ukázali, že platí:

$$2^x < 1 + x \quad \text{pre} \quad 0 < x < 1.$$

Pretože pre každé $x > 0$ platí $1 + x < 1 + 2x$, nerovnosť (17.1) je dokázaná pre každé $x \in (0, 1)$. Zostáva nám overiť nerovnosť (17.1) pre $x \in \langle 1, \frac{3}{2})$.

Ak $x \in \langle 1, \frac{3}{2})$, potom $2^x < 2 \cdot \sqrt{2} < 3 \leqq 1 + 2x$.

Tým je dôkaz ukončený.

Príklad 17.2. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\frac{2^{x+1} - 7}{x - 1} < \frac{10}{3 - 2x}. \tag{17.2}$$

Presvedčte sa o tom, že nerovnicu (17.2) môžeme vyjadriť v ekvivalentnom tvare:

$$\frac{2(3 - 2x)(2^x - 1) - 5}{(x - 1)(3 - 2x)} < 0. \tag{17.3}$$

Budeme skúmať znamienko výrazu v čitateli, t. j. znamienko výrazu

$$2(3 - 2x)(2^x - 1) - 5. \tag{17.4}$$

Ak platí

$$(3 - 2x)(2^x - 1) \leqq 0, \tag{17.5}$$

výraz (17.4) bude záporný.

Oborom pravdivosti nerovnice (17.5) je množina $(-\infty, 0\rangle \cup \langle \frac{3}{2}, \infty)$. Teda pre všetky $x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle \frac{3}{2}, \infty)$ má výraz (17.4) znamienko mínus.

Zostáva nám preskúmať znamienko výrazu (17.4) na intervale $(0, \frac{3}{2})$.
Predpokladajme, že $x \in (0, \frac{3}{2})$. Potom zrejme platí

$$3 - 2x > 0, \qquad 2^x - 1 > 0. \tag{17.6}$$

V príklade 17.1 sme ukázali, že platí

$$2^x - 1 < 2x. \tag{17.7}$$

Podľa (17.6) a (17.7) platí

$$2(3 - 2x)(2^x - 1) - 5 < 2(3 - 2x) \cdot 2x - 5 = -8x^2 + 12x - 5 < 0$$

(pretože $-8 < 0$ a diskriminant kvadratického trojčlena $-8x^2 + 12x - 5$ je záporný).
Tým sme ukázali, že výraz (17.4) je záporný pre každé reálne číslo x.
Teda menovateľ zlomku v (17.3) musí byť kladný, t. j. zostáva nám vyriešiť nerovnicu

$$(x - 1)(3 - 2x) > 0. \tag{17.8}$$

Oborom pravdivosti nerovnice (17.8) je interval $(1, \frac{3}{2})$.

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (17.2) je množina

$$P = (1, \tfrac{3}{2}).$$

Poznámka. Na záver si ukážeme, že znamienko výrazu (17.4) na intervale $(0, \frac{3}{2})$ možno zistiť aj elementárnymi prostriedkami.

Predpokladajme, že $x \in (0, \frac{3}{2})$. Ľahko sa overí, že $3 - 2x > 0$ a $2^x - 1 > 0$.
Rozlíšime tri prípady.

a) Nech $x \in (0, \frac{1}{2}\rangle$. Potom platí:

$$2 \cdot \underbrace{(3 - 2x)}_{<3} \cdot \underbrace{(2^x - 1)}_{\leqq \sqrt{2}-1} - 5 < 2 \cdot 3 \cdot (\sqrt{2} - 1) - 5 < 0.$$

b) Nech $x \in (\frac{1}{2}, 1\rangle$. Potom platí:

$$2 \cdot \underbrace{(3 - 2x)}_{<2} \cdot \underbrace{(2^x - 1)}_{\leqq 1} - 5 < 2 \cdot 2 \cdot 1 - 5 < 0.$$

c) Nech $x \in (1, \frac{3}{2})$. Potom platí:

$$2 \cdot \underbrace{(3 - 2x)}_{<1} \cdot \underbrace{(2^x - 1)}_{\leqq 2\sqrt{2}-1} - 5 < 2 \cdot 2 \cdot 1 - 5 < 0.$$

Ako sme videli, vo všetkých troch prípadoch je výraz (17.4) záporný.
Samostatne ukážte, že stačilo rozlíšiť iba dva prípady: $x \in (0, \frac{5}{6}\rangle$ a $x \in (\frac{5}{6}, \frac{3}{2})$.

Príklad 17.3. Ukážte, že pre všetky $x \in (0, \frac{3}{2})$ platí

$$3^x < 1 + 3x. \tag{17.9}$$

Takéto úlohy sa riešia pomocou druhej derivácie. Ukáže sa, že funkcia $y = 3^x$ je konvexná, odkiaľ vyplýva, že jej graf leží pod sečnicou. Pretože tieto nástroje nie sú v stredoškolskej matematike bežné, budeme postupovať iným spôsobom.

Využijeme Bernoulliho nerovnosť (pozri str. 177). Pre $t = 2$ dostávame:

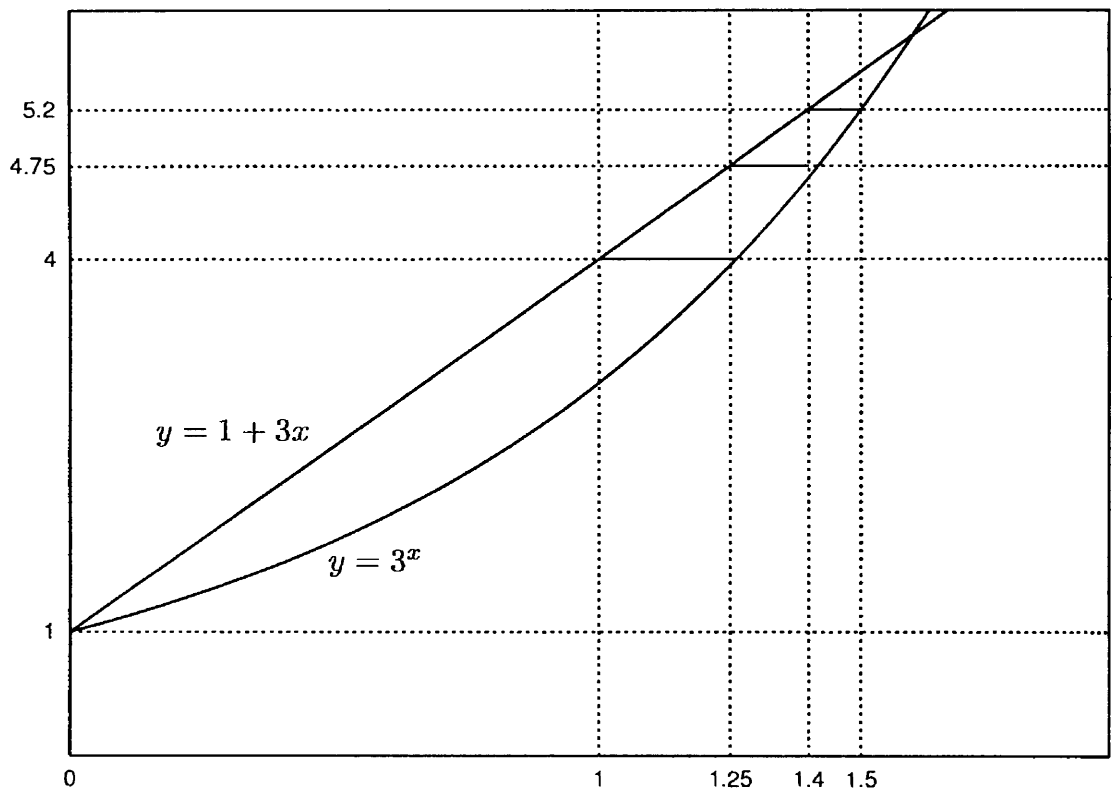
$$\begin{aligned} (1+2)^x &> 1 + 2x, && \text{ak } x > 1 \text{ alebo } x < 0, \\ (1+2)^x &< 1 + 2x, && \text{ak } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Tým sme ukázali, že platí:

$$3^x < 1 + 2x \quad \text{pre} \quad 0 < x < 1.$$

Pretože pre každé $x > 0$ platí $1 + 2x < 1 + 3x$, nerovnosť (17.9) je dokázaná pre každé $x \in (0, 1)$. Zostáva nám overiť nerovnosť (17.9) pre $x \in \langle 1, \frac{3}{2})$.

Vysvetlíme si metódu oddeľujúcich konštánt. Interval $\langle 1, \frac{3}{2})$ rozdelíme na niekoľko podintervalov tak, aby na každom z nich bolo možné oddeliť medzi sebou funkcie $y = 3^x$ a $y = 1 + 3x$ vhodnou konštantou. (Pozri obr. 17.1.)



Obr. 17.1

a) Nech $x \in \langle 1, \frac{5}{4}\rangle$. Potom platí:

$$3^x \leqq 3^{\frac{5}{4}} < 4 \leqq 1 + 3x.$$

Oddeľujúcou konštantou je číslo 4.

b) Nech $x \in \langle \frac{5}{4}, \frac{7}{5}\rangle$. Potom platí:

$$3^x \leqq 3^{\frac{7}{5}} < \tfrac{19}{4} \leqq 1 + 3x.$$

Oddeľujúcou konštantou je číslo $\frac{19}{4} = 4.75$.

c) Nech $x \in \langle \frac{7}{5}, \frac{3}{2})$. Potom platí:

$$3^x < 3^{\frac{3}{2}} < \tfrac{26}{5} \leqq 1 + 3x.$$

Oddeľujúcou konštantou je číslo $\frac{26}{5} = 5.2$.

Tým je dôkaz ukončený.

Príklad 17.4. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\frac{6 - 3^{x+1}}{x} > \frac{10}{2x - 1}. \tag{17.10}$$

Presvedčte sa o tom, že nerovnicu (17.10) môžeme vyjadriť v ekvivalentnom tvare:

$$\frac{(3^{x+1} - 1)(1 - 2x) - 5}{x(2x - 1)} > 0. \tag{17.11}$$

Budeme skúmať znamienko výrazu v čitateli, t. j. znamienko výrazu

$$(3^{x+1} - 1)(1 - 2x) - 5. \tag{17.12}$$

Ak platí

$$(3^{x+1} - 1)(1 - 2x) \leqq 0, \tag{17.13}$$

výraz (17.12) bude záporný.

Oborom pravdivosti nerovnice (17.13) je množina $(-\infty, -1\rangle \cup \langle \frac{1}{2}, \infty)$. Teda pre všetky $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle \frac{1}{2}, \infty)$ má výraz (17.12) znamienko mínus.

Zostáva nám preskúmať znamienko výrazu (17.12) na intervale $(-1, \frac{1}{2})$. Predpokladajme, že $x \in (-1, \frac{1}{2})$. Potom zrejme platí

$$3^{x+1} - 1 > 0, \qquad 1 - 2x > 0. \tag{17.14}$$

Položme $x + 1 = t$. Potom $t \in (0, \frac{3}{2})$. V príklade 17.3 sme ukázali, že platí

$$3^t < 1 + 3t,$$

odkiaľ po úprave dostaneme

$$3^{x+1} - 1 < 3x + 3. \tag{17.15}$$

Podľa (17.15) a (17.14) platí

$$(3^{x+1} - 1)(1 - 2x) - 5 < (3x + 3) \cdot (1 - 2x) - 5 = -6x^2 - 3x - 2 < 0$$

(pretože $-6 < 0$ a diskriminant kvadratického trojčlena $-6x^2 - 3x - 2$ je záporný). Tým sme ukázali, že výraz (17.12) je záporný pre každé reálne číslo x.

Teda menovateľ zlomku v (17.11) musí byť záporný, t. j. zostáva nám vyriešiť nerovnicu

$$x(2x - 1) < 0. \tag{17.16}$$

Oborom pravdivosti nerovnice (17.16) je interval $(0, \frac{1}{2})$.

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (17.10) je množina

$$P = (0, \tfrac{1}{2}).$$

Poznámka. Na záver si ukážeme, že znamienko výrazu (17.12) na intervale $(-1, \frac{1}{2})$ možno zistiť aj elementárnymi prostriedkami. Stačí preveriť tri prípady:

a) Ak $x \in (-1, -\frac{1}{2}\rangle$, potom $(3^{x+1} - 1)(1 - 2x) - 5 < (\sqrt{3} - 1) \cdot 3 - 5 < 0$.

b) Ak $x \in (-\frac{1}{2}, 0\rangle$, potom $(3^{x+1} - 1)(1 - 2x) - 5 \leqq 2 \cdot 2 - 5 < 0$.

c) Ak $x \in (0, \frac{1}{2})$, potom $(3^{x+1} - 1)(1 - 2x) - 5 \leqq (3\sqrt{3} - 1) \cdot 1 - 5 < 0$.

18. Logaritmické rovnice

Príklad 18.1. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$x^{1+\log x} = 10x. \tag{18.1}$$

Definičným oborom rovnice (18.1) je interval $(0, \infty)$. Potom:

$$\begin{aligned} x^{1+\log x} &= 10x && \Big/ \cdot \frac{1}{x} \\ x^{\log x} &= 10 && \Big/ \log(\ ) \\ \log x \cdot \log x &= \log 10 \\ \log^2 x &= 1. \end{aligned}$$

Sú dve možnosti. Ak $\log x = 1$, potom $x = 10$. Ak $\log x = -1$, potom $x = \frac{1}{10}$.

Záver. Rovnica (18.1) má dva reálne korene $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{1}{10}$.

Príklad 18.2. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = 9. \tag{18.2}$$

Definičným oborom rovnice (18.2) je interval $(2, \infty)$.

Použijeme vzorec

$$\log_a b = \log_{a^r} b^r, \tag{18.3}$$

ktorý platí pre každé $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$.

Pretože podľa (18.3) platí

$$\log_{\sqrt{x}}(x-2) = \log_x (x-2)^2,$$

rovnicu (18.2) môžeme prepísať do tvaru

$$(x-2)^2 = 9.$$

Táto rovnica má jediný koreň ležiaci v intervale $(2, \infty)$, konkrétne $x = 5$.

Záver. Rovnica (18.2) má jediný reálny koreň $x = 5$.

Príklad 18.3. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\log_3 x - 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} x = 6. \tag{18.4}$$

Podľa vzorca (18.3) dostávame $\log_{\frac{1}{3}} x = \log_3 x^{-1} = -\log_3 x$. Teda rovnica (18.4) prejde do tvaru

$$\begin{aligned} \log_3 x + 2 \cdot \log_3 x &= 6 \\ \log_3 x &= 2 \\ x &= 3^2 = 9. \end{aligned}$$

Záver. Rovnica (18.4) má jediný reálny koreň $x = 9$.

Príklad 18.4. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7. \tag{18.5}$$

Podľa vzorca (18.3) dostávame

$$\begin{aligned} \log_{16} x + \log_{16} x^2 + \log_{16} x^4 &= 7 \\ \log_{16} x + 2 \cdot \log_{16} x + 4 \cdot \log_{16} x &= 7 \\ \log_{16} x &= 1 \\ x &= 16. \end{aligned}$$

Záver. Rovnica (18.5) má jediný reálny koreň $x = 16$.

Príklad 18.5. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\log_4 (\log_2 x) + \log_2 (\log_4 x) = 2. \tag{18.6}$$

Podľa vzorca (18.3) dostávame

$$\begin{aligned} \log_4 \left(\log_4 x^2\right) + \log_4 \left(\log_4^2 x\right) &= 2 \\ \log_4 (2 \cdot \log_4 x) + 2 \cdot \log_4 (\log_4 x) &= 2 \\ \log_4 2 + \log_4 (\log_4 x) + 2 \cdot \log_4 (\log_4 x) &= 2 \\ \frac{1}{2} + 3 \cdot \log_4 (\log_4 x) &= 2 \\ \log_4 (\log_4 x) &= \frac{1}{2} \\ x &= 16. \end{aligned}$$

Záver. Rovnica (18.6) má jediný reálny koreň $x = 16$.

19. Logaritmické nerovnice

Príklad 19.1. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + 4) > -2. \tag{19.1}$$

Zrejme platí $x^2 - 2x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 3 = (x-1)^2 + 3 > 0$. Pretože funkcia $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ je klesajúca, nerovnica (19.1) je ekvivalentná s nerovnicou

$$x^2 - 2x + 4 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}.$$

Jej oborom pravdivosti je interval $(0, 2)$.

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (19.1) je interval $P = (0, 2)$.

Príklad 19.2. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\log_7 \frac{2x-6}{2x-1} > 0. \tag{19.2}$$

Pretože funkcia $y = \log_7 x$ je rastúca, nerovnica (19.2) je ekvivalentná s nerovnicou

$$\frac{2x-6}{2x-1} > 1.$$

Jej oborom pravdivosti je interval $(-\infty, \frac{1}{2})$.

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (19.2) je interval $P = (-\infty, \frac{1}{2})$.

Príklad 19.3. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_8 \frac{x^2-2x}{x-3}\right) < 0. \tag{19.3}$$

Pretože funkcia $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ je klesajúca, nerovnica (19.3) je ekvivalentná s nerovnicou

$$\log_8 \frac{x^2-2x}{x-3} > 1. \tag{19.4}$$

Pretože funkcia $y = \log_8 x$ je rastúca, nerovnica (19.4) je ekvivalentná s nerovnicou

$$\frac{x^2-2x}{x-3} > 8.$$

Jej oborom pravdivosti je množina $(3, 4) \cup (6, \infty)$.

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (19.3) je množina $P = (3, 4) \cup (6, \infty)$.

Príklad 19.4. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\log_{x^2} \frac{4x-5}{|x-2|} \geqq \frac{1}{2}. \tag{19.5}$$

Definičným oborom nerovnice (19.5) je množina $(\frac{5}{4}, 2) \cup (2, \infty)$. Potom môžeme nerovnicu (19.5) prepísať do tvaru

$$\frac{4x-5}{|x-2|} \geqq x. \tag{19.6}$$

Rozlíšime dva prípady.

a) Predpokladajme, že $x \in (\frac{5}{4}, 2)$. Potom nerovnica (19.6) prejde do tvaru

$$\begin{aligned} 4x - 5 &\geqq x \cdot (2 - x) \\ x^2 + 2x - 5 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Jej oborom pravdivosti je množina $(-\infty, -1 - \sqrt{6}\rangle \cup \langle -1 + \sqrt{6}, \infty)$. Teda $P_1 = \langle -1 + \sqrt{6}, 2)$.

b) Predpokladajme, že $x \in (2, \infty)$. Potom nerovnica (19.6) prejde do tvaru

$$\begin{aligned} 4x - 5 &\geqq x \cdot (x - 2) \\ x^2 - 6x + 5 &\leqq 0. \end{aligned}$$

Jej oborom pravdivosti je interval $\langle 1, 5\rangle$. Teda $P_2 = (2, 5\rangle$.

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (19.6) je množina $P = \langle -1 + \sqrt{6}, 2) \cup (2, 5\rangle$.

20. Goniometrické rovnice a nerovnice

Príklad 20.1. Určte počet tých reálnych koreňov rovnice

$$\sin 5x = \sin 3x, \tag{20.1}$$

ktoré ležia v intervale $\langle -\frac{\pi}{4}, \pi)$.

Použitím vzorca

$$\sin\alpha - \sin\beta = \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

prevedieme rovnicu (20.1) do tvaru $\cos 4x \cdot \sin x = 0$. Súčin dvoch čísel sa rovná nule práve vtedy, keď aspoň jedno z nich je rovné nule. Posledná rovnica sa teda rozpadne na dve: $\cos 4x = 0$, $\sin x = 0$. Prvá z nich má korene tvaru $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, kde k je ľubovoľné celé číslo. V intervale $\langle -\frac{\pi}{4}, \pi)$ ležia z nich len $x_1 = -\frac{\pi}{8}$, $x_2 = \frac{\pi}{8}$, $x_3 = \frac{3\pi}{8}$, $x_4 = \frac{5\pi}{8}$, $x_5 = \frac{7\pi}{8}$. Rovnica $\sin x = 0$ má korene tvaru $x = k\pi$, kde k je ľubovoľné celé číslo. V intervale $\langle -\frac{\pi}{4}, \pi)$ leží z nich len jediný, konkrétne $x_6 = 0$.

Záver. Rovnica (20.1) má v intervale $\langle -\frac{\pi}{4}, \pi)$ presne šesť koreňov.

Príklad 20.2. V množine všetkých reálnych čísel riešte rovnicu

$$\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2. \tag{20.2}$$

Pokúsime sa vyjadriť $\sin 2x$ pomocou[28)] $\operatorname{tg} x$. Začneme nasledujúcou úpravou:

$$\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x = 2\cdot\operatorname{tg} x\cdot\cos^2 x.$$

Ešte nám zostáva vyjadriť $\cos^2 x$ pomocou $\operatorname{tg} x$. Pretože

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1},$$

Teda platí

$$\sin 2x = 2\cdot\operatorname{tg} x\cdot\cos^2 x = \frac{2\cdot\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}.$$

Rovnicu (20.2) môžeme prepísať do tvaru

$$\frac{2\cdot\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} + \operatorname{tg} x = 2.$$

[28)] budete to neskôr používať vo vysokoškolskej matematike

Položme $y = \operatorname{tg} x$. Naša rovnica sa potom už rieši klasickým spôsobom.

$$\begin{aligned} \frac{2y}{y^2+1} + y &= 2 \\ 2y + y \cdot (y^2+1) &= 2 \cdot (y^2+1) \\ y^3 - 2y^2 + 3y - 2 &= 0 \\ (y-1) \cdot \underbrace{(y^2 - y + 2)}_{>0} &= 0 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Zostáva nám teda vyriešiť rovnicu $\operatorname{tg} x = 1$. Jej korene majú tvar $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, kde k je ľubovoľné celé číslo.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (20.2) je množina $P = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Príklad 20.3. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sin x + \sin 2x = \sin 3x. \tag{20.3}$$

Najskôr prepíšeme rovnicu (20.3) do tvaru

$$\sin 2x = \sin 3x - \sin x$$

a použijeme vzorec

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Dostávame

$$\sin x \cdot \cos x = \cos 2x \cdot \sin x. \tag{20.4}$$

Rozlíšime dva prípady.

a) Predpokladajme, že platí $\sin x = 0$. Potom každé reálne číslo tvaru $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) je koreňom rovnice (20.3).

b) Predpokladajme, že platí $\sin x \neq 0$. Potom z (20.4) dostávame:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos 2x \\ \cos x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \cos x &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ 1 + \cos x - 2\cos^2 x &= 0 \\ \underbrace{(1 - \cos x)}_{\neq 0} \cdot (1 + 2\cos x) &= 0 \\ 1 + 2\cos x &= 0 \\ \cos x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{20.5}$$

Využili sme pritom skutočnosť, že platí: Ak $\sin x \neq 0$, potom $\cos x \neq 1$. Naozaj, ak $\sin x \neq 0$, potom $0 \neq \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \underbrace{(1 - \cos x)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(1 + \cos x)}_{\neq 0}$.

Korene rovnice (20.5) sú všetky čísla tvaru $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ a všetky čísla tvaru $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (20.3) je množina

$$P = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\tfrac{4\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Príklad 20.4. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x. \tag{20.6}$$

Rovnicu (20.6) najskôr prepíšeme do tvaru

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x$$

a postupne upravujeme:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} x &= \frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \\
\operatorname{tg} x &= \frac{\sin 3x \cdot \cos 2x - \cos 3x \cdot \sin 2x}{\cos 3x \cdot \cos 2x} \\
\operatorname{tg} x &= \frac{\sin(3x - 2x)}{\cos 3x \cdot \cos 2x} \\
\frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{\sin x}{\cos 3x \cdot \cos 2x}.
\end{aligned} \tag{20.7}$$

Rozlíšime dva prípady.

a) Predpokladajme, že platí $\sin x = 0$. Potom každé reálne číslo tvaru $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ je koreňom rovnice (20.7).

b) Predpokladajme, že platí $\sin x \neq 0$. Potom rovnica (20.7) má tvar

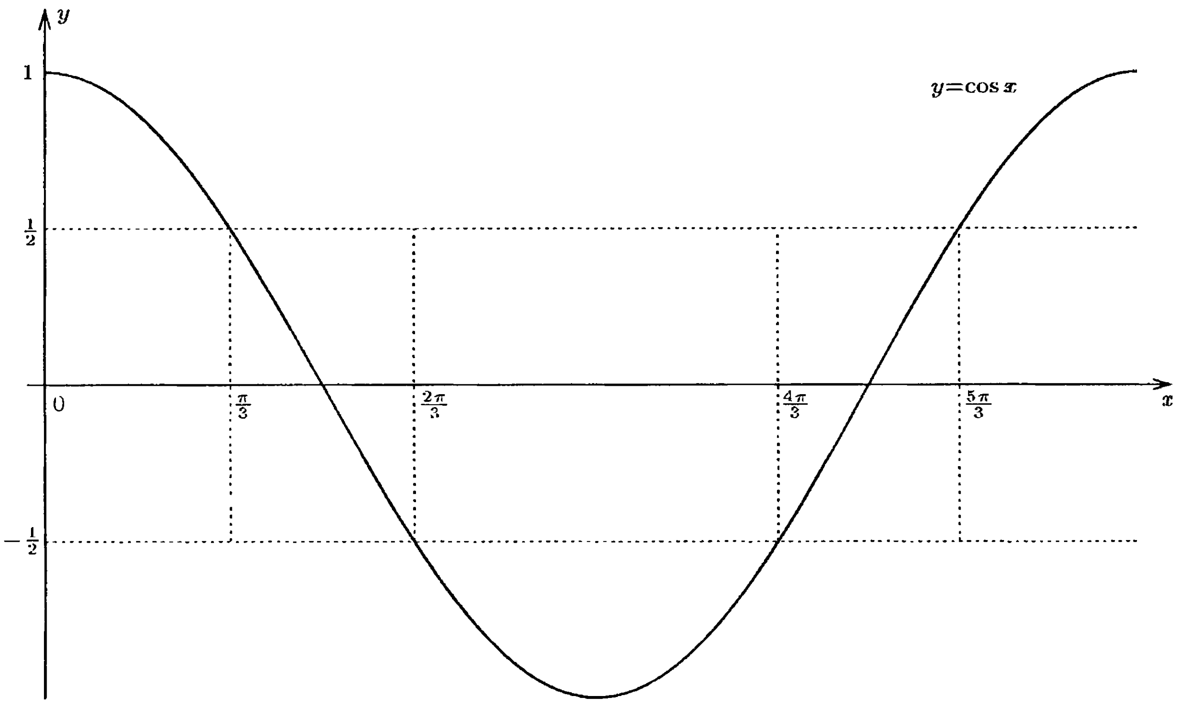
$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 3x \cdot \cos 2x}. \tag{20.8}$$

Pretože platí

$$\begin{aligned}
\cos 3x = \cos(2x + x) &= \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = \\
&= \cos 2x \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \sin x = \\
&= \cos x \cdot (\cos 2x - 2\sin^2 x) = \cos x \cdot (\cos^2 x - 3\sin^2 x),
\end{aligned}$$

po dosadení do (20.8) máme

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 3x \cdot \cos 2x}$$
$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x \cdot (\cos^2 x - 3\sin^2 x) \cdot \cos 2x}. \tag{20.9}$$



Obr. 20.1

Pretože vzhľadom na definičný obor funkcie $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ platí $\cos x \neq 0$, z rovnice (20.9) dostávame

$$\cos 2x \cdot (\cos^2 x - 3\sin^2 x) = 1$$
$$(\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x - 3\sin^2 x) = 1$$
$$(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) \cdot (\cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x)) = 1$$
$$(2\cos^2 x - 1) \cdot (4\cos^2 x - 3) = 1$$
$$8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 2 = 0$$
$$2 \cdot (1 - 4\cos^2 x) \cdot (1 - \cos^2 x) = 0$$
$$2 \cdot (1 - 4\cos^2 x) \cdot \sin^2 x = 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin^2 x}$$
$$1 - 4\cos^2 x = 0$$
$$|\cos x| = \frac{1}{2}. \tag{20.10}$$

Korene rovnice $\cos x = \frac{1}{2}$ majú tvar $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Korene rovnice $\cos x = -\frac{1}{2}$ majú tvar $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Teda korene rovnice (20.10) majú tvar $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Záver. Korene rovnice (20.6) majú tvar $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Urobte si skúšku správnosti.

Príklad 20.5. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1. \tag{20.11}$$

Najskôr prepíšeme rovnicu (20.11) do tvaru

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x.$$

Potom

$$\begin{aligned}
0 &= \sin^2 x - \sin^3 x + \cos^2 x - \cos^3 x \\
0 &= \sin^2 x \cdot (1 - \sin x) + \cos^2 x \cdot (1 - \cos x) \\
0 &= (1 - \cos^2 x) \cdot (1 - \sin x) + (1 - \sin^2 x) \cdot (1 - \cos x) \\
0 &= (1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x) \cdot (1 - \sin x) + (1 - \sin x) \cdot (1 + \sin x) \cdot (1 - \cos x) \\
0 &= (1 - \cos x) \cdot (1 - \sin x) \cdot (2 + \sin x + \cos x).
\end{aligned}$$

Rozlíšime tri prípady.

a) Korene rovnice $1 - \cos x = 0$ sú všetky čísla tvaru $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
b) Korene rovnice $1 - \sin x = 0$ sú všetky čísla tvaru $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
c) Rovnica $2 + \sin x + \cos x = 0$ nemá reálne korene. Môžeme sa o tom presvedčiť napr. nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned}
\sin x + \cos x &= -2 \qquad\qquad /(\,)^2 \\
\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x &= 4 \\
\sin 2x &= 3.
\end{aligned} \tag{20.12}$$

Pretože pre každé reálne číslo α platí $\sin \alpha \leqq 1$, rovnica (20.12) nemá reálne korene.

Záver. Korene rovnice (20.11) sú všetky čísla tvaru $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, ako aj všetky čísla tvaru $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Poznámka. Mohli sme postupovať aj iným spôsobom. Zrejme pre každé reálne číslo x platí: $\cos^3 x \leqq \cos^2 x$, $\sin^3 x \leqq \sin^2 x$. Teda $\cos^3 x + \sin^3 x \leqq 1$, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď súčasne platí: $\cos^3 x = \cos^2 x$, $\sin^3 x = \sin^2 x$. Zostávajú dve možnosti: a) $\cos x = 0$ a $\sin x = 1$; b) $\sin x = 0$ a $\cos x = 1$.

Príklad 20.6. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sin x + \cos x = 1. \tag{20.13}$$

Rovnicu (20.13) najskôr umocníme

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= 1 \qquad\qquad /(\,)^2 \\ \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x &= 1 \\ \sin x \cdot \cos x &= 0. \end{aligned} \tag{20.14}$$

Rozlíšime dva prípady.

a) Predpokladajme, že platí $\sin x = 0$. Po dosadení do rovnice (20.13) dostávame $\cos x = 1$. Korene sústavy rovníc $\sin x = 0$, $\cos x = 1$ sú všetky čísla tvaru $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Predpokladajme, že platí $\cos x = 0$. Po dosadení do rovnice (20.13) dostávame $\sin x = 1$. Korene sústavy rovníc $\cos x = 0$, $\sin x = 1$ sú všetky čísla tvaru $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Záver. Korene rovnice (20.13) sú všetky čísla tvaru $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, ako aj všetky čísla tvaru $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Poznámka. Mohli sme postupovať aj iným spôsobom – s použitím vzorca:

$$\cos x = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right).$$

Príklad 20.7. V obore reálnych čísel máme riešiť nasledujúcu rovnicu, kde číslo a je parameter:

$$\sin(x-a) = \sin x - \sin a. \tag{20.15}$$

Použijeme vzorce

$$\begin{aligned} \sin 2\xi &= 2\cdot\sin\xi\cdot\cos\xi, \\ \sin\beta - \sin\gamma &= 2\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Potom z rovnice (20.15) dostávame

$$2\cdot\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x-a}{2} = 2\cdot\cos\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}. \tag{20.16}$$

Rozlíšime dva prípady.

a) Predpokladajme, že platí $\sin\dfrac{x-a}{2} = 0$. Potom $\dfrac{x-a}{2} = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), odkiaľ $x = a + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b) Predpokladajme, že platí $\sin\dfrac{x-a}{2} \neq 0$. Potom rovnica (20.16) prejde do tvaru

$$\begin{aligned}
\cos\frac{x-a}{2} &= \cos\frac{x+a}{2}\\
\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{a}{2}\right) &= \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{a}{2}\right)\\
\cos\frac{x}{2}\cos\frac{a}{2}+\sin\frac{x}{2}\sin\frac{a}{2} &= \cos\frac{x}{2}\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{x}{2}\sin\frac{a}{2}\\
\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{a}{2} &= 0. \qquad (20.17)
\end{aligned}$$

Rozlíšime dva prípady.

b_1) Predpokladajme, že platí $\sin\frac{a}{2} = 0$, t. j. že $a = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Potom každé reálne číslo x je koreňom rovnice (20.15).

b_2) Predpokladajme, že platí $\sin\frac{a}{2} \neq 0$. Potom rovnica (20.17) prejde do tvaru

$$\sin\frac{x}{2} = 0. \qquad (20.18)$$

Korene rovnice (20.18) sú všetky čísla tvaru $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Záver. Ak $a = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), potom každé reálne číslo x je koreňom rovnice (20.15). Ak $a \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), potom korene rovnice (20.15) sú všetky čísla tvaru $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Príklad 20.8. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sin 5x = \sin 7x. \qquad (20.19)$$

Rovnicu (20.19) najskôr prepíšeme do tvaru

$$\sin 7x - \sin 5x = 0.$$

Použitím vzorca $\sin\beta - \sin\gamma = 2\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$ dostávame

$$2\cdot\cos 6x\cdot\sin x = 0.$$

Ak $\cos 6x = 0$, potom $6x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), t. j. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ak $\sin x = 0$, potom $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Záver. Korene rovnice (20.19) sú všetky čísla tvaru $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$ ($k \in \mathbb{Z}$), ako aj všetky čísla tvaru $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Príklad 20.9. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\cos x = \cos 3x. \tag{20.20}$$

Rovnicu (20.20) najskôr prepíšeme do tvaru

$$\cos 3x - \cos x = 0.$$

Použitím vzorca $\cos\beta - \cos\gamma = -2 \cdot \sin\frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\beta-\gamma}{2}$ dostávame

$$-2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x = 0.$$

Ak $\sin 2x = 0$, potom $2x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, t. j. $x = \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Ak $\sin x = 0$, potom $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Záver. Korene rovnice (20.20) sú všetky čísla tvaru $x = \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Príklad 20.10. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sin(5x+3) = \cos(4x+2). \tag{20.21}$$

Pomocou vzorca

$$\sin x = \cos(x - \tfrac{\pi}{2})$$

prevedieme rovnicu (20.21) do tvaru

$$\cos(5x + 3 - \tfrac{\pi}{2}) - \cos(4x+2) = 0.$$

Pomocou vzorca $\cos\beta - \cos\gamma = -2 \cdot \sin\frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\beta-\gamma}{2}$ dostávame

$$\begin{aligned} \cos(5x + 3 - \tfrac{\pi}{2}) - \cos(4x+2) &= 0 \\ -2 \cdot \sin\frac{5x + 3 - \frac{\pi}{2} + 4x + 2}{2} \cdot \sin\frac{5x + 3 - \frac{\pi}{2} - 4x - 2}{2} &= 0 \\ \sin\frac{9x + 5 - \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \sin\frac{x + 1 - \frac{\pi}{2}}{2} &= 0. \end{aligned} \tag{20.22}$$

Rozlíšime dva prípady.

a) Predpokladajme, že platí $\sin\frac{9x+5-\frac{\pi}{2}}{2} = 0$. Potom

$$\begin{aligned} \frac{9x + 5 - \frac{\pi}{2}}{2} &= k\pi \\ 9x &= -5 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 9x &= -5 + \frac{(4k+1)\pi}{2} \\ x &= -\frac{5}{9} + \frac{(4k+1)\pi}{18} \qquad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

b) Predpokladajme, že platí $\sin\frac{x+1-\frac{\pi}{2}}{2}=0$. Potom

$$\begin{aligned}\frac{x+1-\frac{\pi}{2}}{2}&=k\pi\\ x&=-1+\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x&=-1+\frac{(4k+1)\pi}{2}\qquad(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Záver. Korene rovnice (20.21) sú všetky čísla tvaru

$$\begin{aligned}x&=-\frac{5}{9}+\frac{(4k+1)\pi}{18}\qquad(k\in\mathbb{Z}),\\ x&=-1+\frac{(4k+1)\pi}{2}\qquad(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Príklad 20.11. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sin(\cos x)=\cos(\sin x). \tag{20.23}$$

Pomocou vzorca

$$\cos x=\sin(\tfrac{\pi}{2}-x)$$

prevedieme rovnicu (20.23) do tvaru

$$\sin(\cos x)-\sin(\tfrac{\pi}{2}-\sin x)=0$$

Pomocou vzorca $\sin\beta-\sin\gamma=2\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$ dostávame

$$\begin{aligned}\sin(\cos x)-\sin(\tfrac{\pi}{2}-\sin x)&=0\\ 2\cdot\cos\frac{\cos x+\frac{\pi}{2}-\sin x}{2}\cdot\sin\frac{\cos x-\frac{\pi}{2}+\sin x}{2}&=0.\end{aligned}$$

Rozlíšime dva prípady.

a) Predpokladajme, že platí $\cos\dfrac{\cos x+\frac{\pi}{2}-\sin x}{2}=0$. Potom

$$\begin{aligned}\frac{\cos x+\frac{\pi}{2}-\sin x}{2}&=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \cos x+\frac{\pi}{2}-\sin x&=\pi+2k\pi\\ \cos x-\sin x&=\frac{\pi}{2}+2k\pi.\end{aligned}\tag{20.24}$$

a) Predpokladajme, že platí $\sin\dfrac{\cos x - \frac{\pi}{2} + \sin x}{2} = 0$. Potom

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x - \frac{\pi}{2} + \sin x}{2} &= k\pi \\
\cos x - \frac{\pi}{2} + \sin x &= 2k\pi \\
\cos x + \sin x &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi. \qquad (20.25)
\end{aligned}$$

Obidva prípady môžeme zapísať spoločne v tvare

$$\cos x \pm \sin x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi. \qquad (20.26)$$

Pretože podľa (20.26) máme:

$$\left|\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right| = |\cos x \pm \sin x| \leqq |\cos x| + |\sin x| \leqq 2,$$

platí

$$\begin{array}{ccccc}
 & & -2 \leqq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leqq 2 & & \\
\dfrac{\pi}{2} - 2\pi < -2 & & & & 2 < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi \\
\dfrac{\pi}{2} - 2\pi < -2 & \leqq & \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi & \leqq & 2 < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi \\
\dfrac{\pi}{2} - 2\pi < & & \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi & & < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
-2\pi < 2k\pi &< 2\pi \\
-1 < k &< 1 \\
k &= 0.
\end{aligned}$$

Po dosadení do (20.26) dostávame:

$$\begin{aligned}
\cos x \pm \sin x &= \frac{\pi}{2} \\
\cos^2 x \pm 2\cos x \sin x + \sin^2 x &= \frac{\pi^2}{4} \\
1 \pm \sin 2x &= \frac{\pi^2}{4} \\
\pm \sin 2x &= \frac{\pi^2}{4} - 1 > 1.
\end{aligned}$$

Avšak takéto reálne číslo x neexistuje, pretože platí $|\sin\alpha| \leqq 1$ pre každé reálne číslo α.

Záver. Rovnica (20.23) nemá reálne korene.

Príklad 20.12. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\operatorname{tg}(3\pi x) = \operatorname{tg}(5\pi x). \tag{20.27}$$

Postupujeme klasickým spôsobom:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(5\pi x) - \operatorname{tg}(3\pi x) &= 0 \\
\frac{\sin(5\pi x)}{\cos(5\pi x)} - \frac{\sin(3\pi x)}{\cos(3\pi x)} &= 0 \\
\frac{\sin(5\pi x)\cos(3\pi x) - \cos(5\pi x)\sin(3\pi x)}{\cos(3\pi x)\cos(5\pi x)} &= 0 \\
\frac{\sin(5\pi x - 3\pi x)}{\cos(3\pi x)\cos(5\pi x)} &= 0 \\
\frac{\sin(2\pi x)}{\cos(3\pi x)\cos(5\pi x)} &= 0 \\
\frac{2\sin(\pi x)\cos(\pi x)}{\cos(3\pi x)\cos(5\pi x)} &= 0. \qquad (20.28)
\end{aligned}$$

Pretože

$$\begin{aligned}
\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha) &= \cos(2\alpha)\cdot\cos\alpha - \sin(2\alpha)\cdot\sin\alpha = \\
&= \cos(2\alpha)\cdot\cos\alpha - 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha = \\
&= \cos\alpha\cdot\big(\cos(2\alpha) - 2\cdot\sin^2\alpha\big)\,,
\end{aligned}$$

rovnica (20.28) prejde do tvaru[29)]

$$\begin{aligned}
\frac{2\sin(\pi x)\cos(\pi x)}{\cos(\pi x)\cdot\big(\cos(2\pi x) - 2\cdot\sin^2(\pi x)\big)\cdot\cos(5\pi x)} &= 0 \\
\frac{\sin(\pi x)}{\big(\cos(2\pi x) - 2\cdot\sin^2(\pi x)\big)\cdot\cos(5\pi x)} &= 0. \qquad (20.29)
\end{aligned}$$

Z rovnice (20.29) dostávame $\sin(\pi x) = 0$. Teda $\pi x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, t. j. $x = k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Skúškou správnosti sa presvedčíme, že všetky celé čísla sú koreňmi rovnice (20.27).

Záver. Korene rovnice (20.27) sú všetky celé čísla, t. j. jej oborom pravdivosti je množina $P = \mathbb{Z}$.

[29)] Ak $\cos(\pi x) = 0$, potom x nepatrí do definičného oboru rovnice (20.27).

Príklad 20.13. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right). \tag{20.30}$$

Najskôr prepíšeme rovnicu (20.30) do tvaru

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Použitím vzorca $\sin\beta - \sin\gamma = 2 \cdot \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\beta-\gamma}{2}$ dostávame

$$\begin{aligned} 2 \cdot \cos\left(\frac{2x + \frac{\pi}{3} + 2x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2x + \frac{\pi}{3} - 2x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) &= 0 \\ \cos\left(2x + \frac{7\pi}{24}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} 2x + \frac{7\pi}{24} &= \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\ x &= \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Záver. Korene rovnice (20.30) sú všetky čísla tvaru

$$x = \frac{(5 + 24k) \cdot \pi}{48} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Príklad 20.14. V množine všetkých reálnych čísel riešte nerovnicu

$$\cos 4x + \cos 2x < 0. \tag{20.31}$$

Pomocou vzorca[30)]

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

prepíšeme nerovnicu (20.31) do tvaru

$$2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x < 0.$$

Po substitúcii $y = \cos 2x$ dostávame kvadratickú nerovnicu

$$2y^2 + y - 1 < 0.$$

[30)] sčítajte vzorce: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

Všetky jej riešenia sú vyjadrené vzťahmi

$$-1 < y < \frac{1}{2}.$$

Po návrate v substitúcii dostávame

$$-1 < \cos 2x < \frac{1}{2}. \tag{20.32}$$

Nakreslite si graf funkcie kosínus. Uvažujme $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Potom podmienka

$$-1 < \cos t < \frac{1}{2}$$

je splnená práve vtedy, keď platí

$$\frac{\pi}{3} < t < \pi, \text{ alebo } \pi < t < \frac{5\pi}{3}.$$

Odtiaľ vyplýva, že všetky riešenia nerovnice (20.32) na intervale $\langle 0, \pi \rangle$ sú vyjadrené pomocou nerovností nasledujúcim spôsobom:

$$\frac{\pi}{3} < 2x < \pi, \text{ alebo } \pi < 2x < \frac{5\pi}{3},$$

resp. v ekvivalentnom tvare

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}, \text{ alebo } \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}.$$

Ako vidíme, riešením nerovnice (20.31) na intervale $\langle 0, \pi \rangle$ je množina

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right).$$

Na záver využijeme skutočnosť, že funkcia $y = \cos 4x + \cos 2x$ je periodická s periódou π. Oborom pravdivosti nerovnice (20.31) je množina[31)]

$$P = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right) + k\pi \right\}.$$

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (20.31) je množina

$$P = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \left(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right) \right\}.$$

[31)] Vysvetlime si význam symbolu $M + m$, kde M je množina reálnych čísel a m je reálne číslo:

$$M + m = \{x + m;\ x \in M\}.$$

Geometricky ide o posunutie (transláciu) množiny M o konštantu m (na x-ovej osi).

Príklad 20.15. V množine všetkých reálnych čísel riešte nerovnicu

$$\sin\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) \leqq 0. \tag{20.33}$$

Využijeme skutočnosť, že pre každé reálne číslo x platí

$$-1 \leqq \cos x \leqq 1.$$

Potom

$$\begin{aligned} -1 \leqq \cos x \leqq 1 \quad &\Big/ + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leqq \cos x + \frac{1}{2} \leqq \frac{3}{2}&. \end{aligned}$$

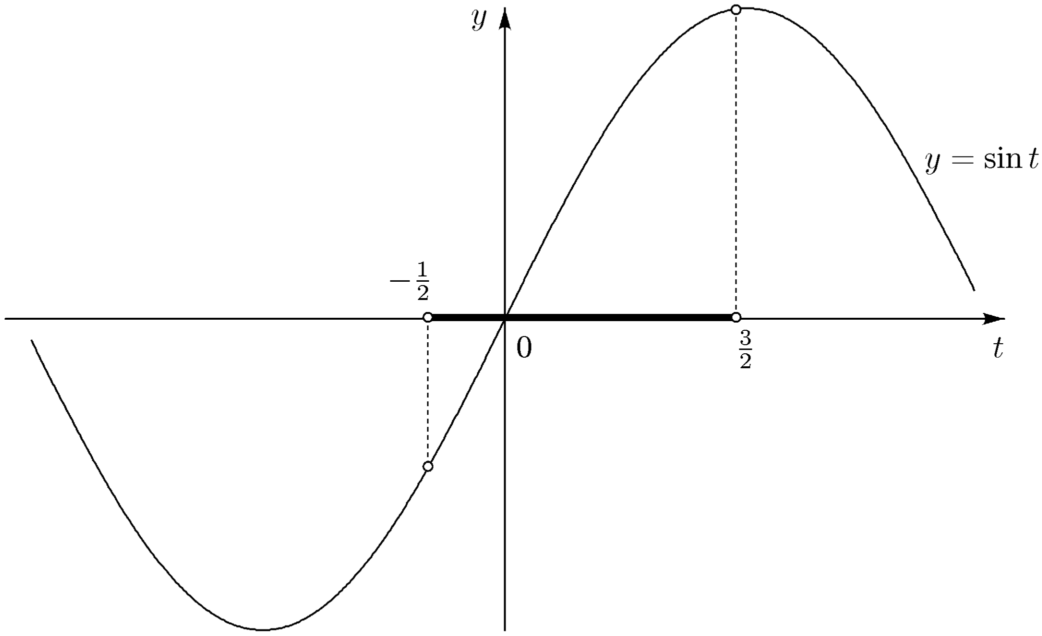
Položme $t = \cos x + \frac{1}{2}$. Potom poslednú nerovnosť môžeme zapísať v tvare

$$-\frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{3}{2}. \tag{20.34}$$

Nerovnica (20.33) zrejme prejde do tvaru

$$\sin t \leqq 0. \tag{20.35}$$

Hľadáme teda všetky riešenia nerovnice (20.35), ktoré spĺňajú podmienku (20.34).



Obr. 20.2

Všetky riešenia tejto úlohy sú určené nerovnosťami

$$-\frac{1}{2} \leqq t \leqq 0.$$

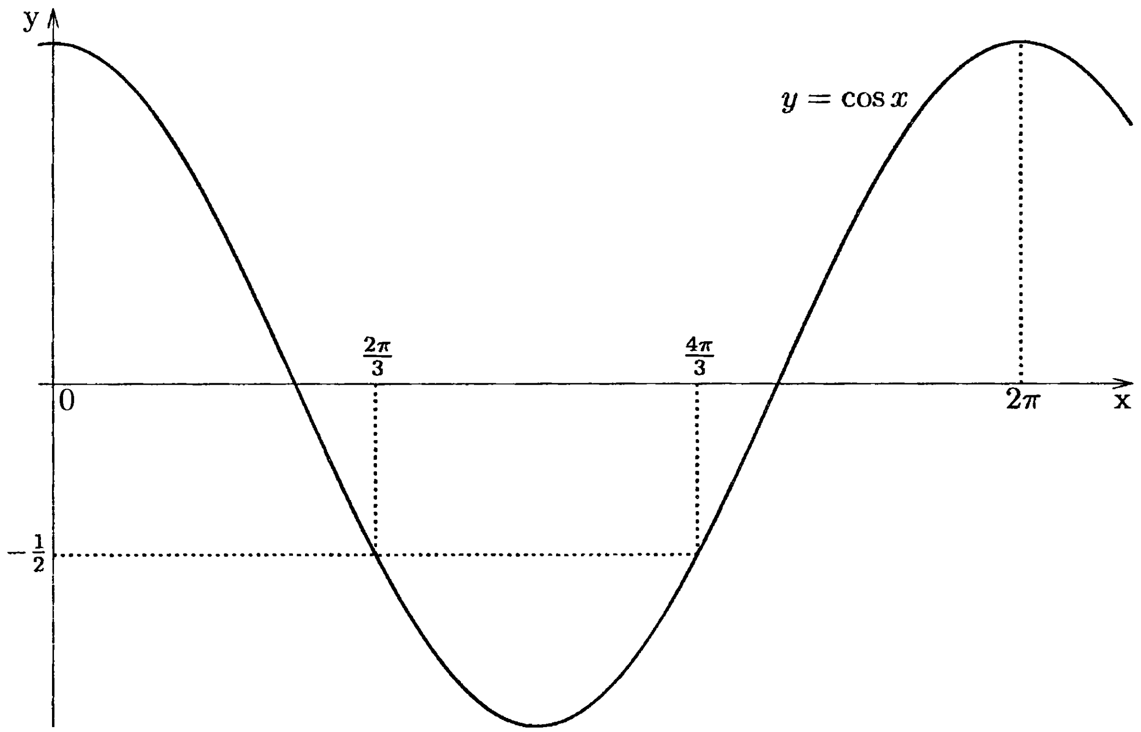
Po návrate v substitúcii dostávame

$$-\frac{1}{2} \leqq \cos x + \frac{1}{2} \leqq 0,$$

čiže

$$-1 \leqq \cos x \leqq -\frac{1}{2}.$$

Pretože $\cos x \geqq -1$ pre každé reálne číslo x, zostáva nám ešte vyriešiť nerovnicu $\cos x \leqq -\frac{1}{2}$.



Obr. 20.3

Na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$ je riešením nerovnice $\cos x \leqq -\frac{1}{2}$ každé x z intervalu $\langle \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \rangle$. Nakoniec vezmeme do úvahy periodičnosť funkcie kosínus.

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (20.33) je množina

$$P = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle.$$

Príklad 20.16. V obore reálnych čísel máme riešiť nerovnicu:

$$\sin x + \sin 3x < \sin 2x + \sin 4x. \tag{20.36}$$

Pomocou vzorca

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

prepíšeme nerovnicu (20.36) do tvaru

$$\begin{aligned} 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x &< 2\cdot\sin 3x\cdot\cos x \\ \cos x\cdot(\sin 3x - \sin 2x) &> 0. \end{aligned} \tag{20.37}$$

Pretože funkcia $y = \cos x\cdot(\sin 3x - \sin 2x)$ má periódu 2π, nerovnicu (20.37) budeme riešiť najskôr na intervale $\langle 0, 2\pi)$. Ak zohľadníme skutočnosť, že číslo $x = 0$ nepatrí do oboru pravdivosti nerovnice (20.37), stačí uvažovať interval $(0, 2\pi)$.

Pomocou vzorca

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

prepíšeme nerovnicu (20.37) do tvaru

$$\cos x\cdot\cos\frac{5x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2} > 0. \tag{20.38}$$

Pretože na intervale $(0, 2\pi)$ platí $\sin\frac{x}{2} > 0$, nerovnica (20.38) prejde do tvaru

$$\cos x\cdot\cos\frac{5x}{2} > 0. \tag{20.39}$$

Rozlíšime dva prípady.

a) Predpokladajme, že platí $\cos x > 0$, $\cos\frac{5x}{2} > 0$. Potom

$$\begin{aligned} \cos x > 0 &\Rightarrow x \in (0, \tfrac{\pi}{2}) \cup (\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi), \\ \cos\tfrac{5x}{2} > 0 &\Rightarrow x \in (0, \tfrac{\pi}{5}) \cup (\tfrac{3\pi}{5}, \pi) \cup (\tfrac{7\pi}{5}, \tfrac{9\pi}{5}). \end{aligned}$$

Odtiaľ dostávame $P_{a)} = (0, \frac{\pi}{5}) \cup (\frac{3\pi}{2}, \frac{9\pi}{5})$.

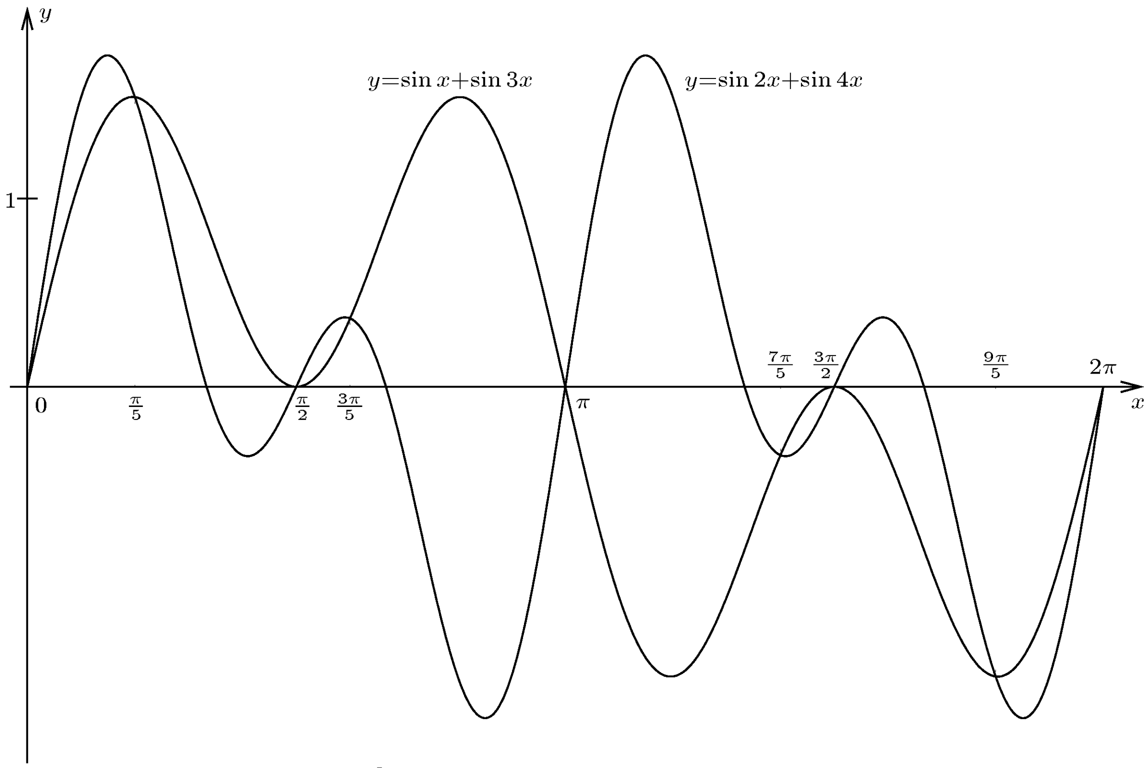
b) Predpokladajme, že platí $\cos x < 0$, $\cos\frac{5x}{2} < 0$. Potom

$$\begin{aligned} \cos x < 0 &\Rightarrow x \in (\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}), \\ \cos\tfrac{5x}{2} > 0 &\Rightarrow x \in (\tfrac{\pi}{5}, \tfrac{3\pi}{5}) \cup (\pi, \tfrac{7\pi}{5}) \cup (\tfrac{9\pi}{5}, 2\pi). \end{aligned}$$

Odtiaľ dostávame $P_{b)} = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}) \cup (\pi, \frac{7\pi}{5})$.

Obidva prípady teraz zhrnieme do jedného:

$$P_{\langle 0,2\pi)} = P_{a)} \cup P_{b)} = (0, \tfrac{\pi}{5}) \cup (\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{5}) \cup (\pi, \tfrac{7\pi}{5}) \cup (\tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{9\pi}{5}).$$



Obr. 20.4

Obor pravdivosti nerovnice (20.36) môžeme potom vyjadriť takto:

$$P = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(P_{\langle 0,2\pi)} + 2k\pi\right),$$

Záver. Oborom pravdivosti nerovnice (20.36) je množina

$$P = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big((2k\pi, \tfrac{\pi}{5} + 2k\pi) \cup (\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \tfrac{3\pi}{5} + 2k\pi) \cup$$
$$\cup (\pi + 2k\pi, \tfrac{7\pi}{5} + 2k\pi) \cup (\tfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, \tfrac{9\pi}{5} + 2k\pi) \Big).$$

21. Ohraničenosť

Príklad 21.1. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$x^2 + 1 = 2x \cdot \sin \frac{\pi x}{2}. \tag{21.1}$$

Položme $f(x) = x^2 + 1$. Pretože pre každé reálne číslo x platí

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = ((-1) \cdot x)^2 + 1 = (-1)^2 \cdot x^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x),$$

funkcia $y = f(x)$ je párna. Ukážeme, že aj funkcia $y = g(x)$, kde $g(x) = 2x \cdot \sin \frac{\pi x}{2}$, je párna[32]. Skutočne, pre každé reálne číslo x platí

$$g(-x) = 2 \cdot (-x) \cdot \sin \frac{\pi \cdot (-x)}{2} = -2x \cdot \sin \left(-\frac{\pi x}{2}\right) = -2x \cdot \left(-\sin \frac{\pi x}{2}\right) = g(x).$$

Využili sme pritom nepárnosť funkcie sínus, t. j. že pre každé reálne číslo x platí $\sin(-x) = -\sin x$. Tým sme ukázali, že ľavá aj pravá strana rovnice (21.1) sú párne funkcie. Odtiaľ vyplýva, že ak nejaké reálne číslo x_0 je koreňom rovnice (21.1), potom aj číslo $-x_0$ je koreňom tejto rovnice. Pretože číslo $x = 0$ nie je koreňom rovnice (21.1), stačí nám hľadať iba kladné korene rovnice (21.1). V ďalšom budeme teda predpokladať, že platí $x > 0$. Využijeme ohraničenosť funkcie sínus. Pretože pre každé reálne číslo α platí $\sin \alpha \leqq 1$, pre $x > 0$ máme

$$\sin \frac{\pi x}{2} \leqq 1 \quad \Big/ \cdot 2x$$

$$2x \cdot \sin \frac{\pi x}{2} \leqq 2x. \tag{21.2}$$

Na druhej strane, pre každé reálne číslo x platí

$$2x \leqq x^2 + 1, \tag{21.3}$$

pričom rovnosť nastáva iba pre $x = 1$. Stačí si uvedomiť, že nerovnosť (21.3) možno prepísať do ekvivalentného tvaru $(x - 1)^2 \geqq 0$.

Túto vlastnosť môžeme preformulovať nasledujúcim spôsobom:

$$x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad 2x < x^2 + 1. \tag{21.4}$$

Teda podľa (21.2) a (21.4) pre každé $x > 0$ máme

$$x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad 2x \cdot \sin \frac{\pi x}{2} \leqq 2x < x^2 + 1.$$

Tým sme ukázali, že žiadne kladné číslo $x \neq 1$ nemôže byť koreňom rovnice (21.1). Dosadením do rovnice (21.1) sa presvedčíme, že číslo $x = 1$ je jej koreňom.

Pretože číslo $x = 1$ je koreňom rovnice (21.1), aj číslo $x = -1$ je jej koreňom.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (21.1) je množina

$$P = \{-1; 1\}.$$

---

[32]) Mohli by sme argumentovať aj tým, že funkcia $y = g(x)$ je súčin dvoch nepárnych funkcií $y = 2x$ a $y = \sin \frac{\pi x}{2}$, preto je párna.

22. Monotónnosť

Pripomeňme si, že funkcia $y = f(x)$ je rastúca na intervale I, ak pre všetky $a, b \in I$ platí:

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b).$$

Funkcia $y = f(x)$ je klesajúca na intervale I, ak pre všetky $a, b \in I$ platí:

$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b).$$

Intervaly monotónnosti elementárnych funkcií patria k základným nástrojom pri riešení niektorých typov rovníc a nerovníc. Na niektoré z nich sa pozrieme podrobnejšie.

1) Lineárna funkcia $y = kx + q$ je
- pre $k > 0$ rastúca,
- pre $k < 0$ klesajúca.

Môžeme sa o tom presvedčiť jednoduchým výpočtom. Nech a, b sú také reálne čísla, že platí $a < b$.

Potom pre $k > 0$ máme:

$$\begin{aligned} a &< b \quad \big/ \cdot k \\ ka &< kb \quad \big/ + q \\ ka + q &< kb + q \end{aligned}$$

a pre $k < 0$ máme:

$$\begin{aligned} a &< b \quad \big/ \cdot k \\ ka &> kb \quad \big/ + q \\ ka + q &> kb + q. \end{aligned}$$

2) Funkcia $y = \sqrt{x}$ je rastúca na intervale $\langle 0, \infty)$.

Môžeme sa o tom presvedčiť jednoduchým výpočtom. Nech a, b sú také reálne čísla, že $0 \leqq a < b$. Ukážeme, že $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. K tomu stačí overiť, že $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$. Pretože $a < b$, platí $b - a > 0$. Pretože $b > 0$, platí $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$. Potom platí

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{b - a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} > 0,$$

odkiaľ vyplýva, že $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

3) Funkcia $y = x^3$ je rastúca na intervale $(-\infty, \infty)$.

Môžeme sa o tom presvedčiť nasledujúcim výpočtom. Nech a, b sú také reálne čísla, že $a < b$. Ukážeme, že $a^3 < b^3$. Použijeme vzorec

$$b^3 - a^3 = (b - a)(a^2 + ab + b^2).$$

Pretože $b - a > 0$, stačí ukázať, že $a^2 + ab + b^2 > 0$. Potom bude platiť $b^3 - a^3 > 0$, t. j. $a^3 < b^3$. Pretože $a < b$, nemôžu byť súčasne obidve čísla a, b rovné nule. Odtiaľ vyplýva, že $a^2 + b^2 > 0$. Potom platí

$$a^2 + ab + b^2 = \tfrac{1}{2}(2a^2 + 2ab + 2b^2) = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + a^2 + 2ab + b^2) = \tfrac{1}{2}[\underbrace{a^2 + b^2}_{>0} + \underbrace{(a + b)^2}_{\geqq 0}] > 0.$$

4) Funkcia $y = x^5$ je rastúca na intervale $(-\infty, \infty)$.

Môžeme sa o tom presvedčiť nasledujúcim výpočtom. Nech a, b sú také reálne čísla, že $a < b$. Ukážeme, že $a^5 < b^5$. Použijeme vzorec

$$b^5 - a^5 = (b-a)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

Pretože $b - a > 0$, stačí ukázať, že $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 > 0$. Potom bude platiť $b^5 - a^5 > 0$, t. j. $a^5 < b^5$. Pretože $a < b$, nemôžu byť obidve čísla a, b rovné nule. Odtiaľ vyplýva, že $a^4 + b^4 > 0$. Potom platí

$$\begin{aligned}
&a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = \\
&\quad = \tfrac{1}{2}(2a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 + 2ab^3 + 2b^4) = \tfrac{1}{2}[a^4 + b^4 + a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + 2ab(a^2 + b^2)] = \\
&\quad\quad = \tfrac{1}{2}[a^4 + b^4 + (a^2 + b^2)^2 + 2ab(a^2 + b^2)] = \tfrac{1}{2}[a^4 + b^4 + (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + 2ab)] = \\
&\quad\quad\quad = \tfrac{1}{2}[\underbrace{a^4 + b^4}_{>0} + \underbrace{(a^2 + b^2)(a + b)^2}_{\geqq 0}] > 0.
\end{aligned}$$

5) Funkcia $y = x^n$ (kde n je prirodzené číslo) je rastúca na intervale $\langle 0, \infty)$.

Môžeme sa o tom presvedčiť nasledujúcim spôsobom. Najskôr si pripomenieme, že nerovnosť možno násobiť kladným číslom. Teda pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c platí:

$$\text{Ak } a < b \text{ a } c > 0, \text{ potom } ac < bc. \tag{22.1}$$

Pomocou (22.1) možno ukázať, že platí:

$$\text{Ak } a < b,\ c < d,\ b > 0,\ c > 0, \text{ potom } ac < bd. \tag{22.2}$$

Skutočne, podľa (22.1) máme:

$$\left.\begin{array}{l} a < b,\ c > 0 \Rightarrow ac < bc \\ c < d,\ b > 0 \Rightarrow bc < bd \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad ac < bc < bd.$$

Pomocou (22.2) možno ukázať, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b a pre ľubovoľné prirodzené číslo n platí:

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < a^n < b^n. \tag{22.3}$$

Použijeme matematickú indukciu. Pre $n = 1$ tvrdenie zrejme platí. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n = m$, t. j. že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < a^m < b^m. \tag{22.4}$$

Ukážeme, že tvrdenie platí aj pre $n = m + 1$. Nech a, b sú také reálne čísla, že $0 < a < b$. Položme $c = a^m$, $d = b^m$. Pretože podľa (22.4) máme $0 < c < d$, podľa (22.2) platí

$$a^{m+1} = a \cdot a^m = ac < bd = b \cdot b^m = b^{m+1}.$$

Tým sme ukázali, že $a^{m+1} < b^{m+1}$. Teda tvrdenie platí aj pre $n = m + 1$.
K dokončeniu dôkazu tvrdenia, že funkcia $y = x^n$ je rastúca na intervale $\langle 0, \infty)$, si potrebujeme ešte uvedomiť, že pre každé reálne číslo $a > 0$ platí $a^n > 0$.

Na záver si ešte ukážeme iný spôsob dôkazu, ktorý je typický pre vysokoškolskú matematiku. Najúčinnejším nástrojom na skúmanie monotónnosti funkcie je jej derivácia. Ak pre každé $x > a$ platí $f'(x) > 0$ a funkcia $y = f(x)$ je spojitá na intervale $\langle a, \infty)$, potom funkcia $y = f(x)$ je rastúca na intervale $\langle a, \infty)$. Pretože $(x^n)' = n \cdot x^{n-1} > 0$ pre každé $x > 0$, z uvedeného tvrdenia vyplýva, že funkcia $y = x^n$ je rastúca na intervale $\langle 0, \infty)$.

Čo sa týka intervalu $(-\infty, 0\rangle$, monotónnosť mocninovej funkcie závisí od párnosti/nepárnosti čísla n. Pretože funkcia $y = x^{2k}$ je párna, je klesajúca na intervale $(-\infty, 0\rangle$. Pretože funkcia $y = x^{2k-1}$ je nepárna, je rastúca na intervale $(-\infty, 0\rangle$.

6) Funkcia $y = x^{2k-1}$ (kde k je prirodzené číslo) je rastúca na intervale $(-\infty, \infty)$.

Majme reálne čísla a, b také, že $a < b$. Ukážeme, že platí $a^{2k-1} < b^{2k-1}$. Rozlíšime tri prípady:

a) Predpokladajme, že obidve čísla a, b ležia v intervale $\langle 0, \infty)$. Pretože každá funkcia tvaru $y = x^n$ je rastúca na intervale $\langle 0, \infty)$, platí $a^{2k-1} < b^{2k-1}$.

b) Predpokladajme, že obidve čísla a, b ležia v intervale $(-\infty, 0\rangle$. Potom zrejme $0 \leqq -b < -a$. Všimnime si, že pre každé reálne číslo x platí $(-x)^{2k-1} = -x^{2k-1}$. Pretože každá funkcia tvaru $y = x^n$ je rastúca na intervale $\langle 0, \infty)$, platí

$$\begin{aligned} -b^{2k-1} = (-b)^{2k-1} &< (-a)^{2k-1} = -a^{2k-1} \\ -b^{2k-1} &< -a^{2k-1} \\ a^{2k-1} &< b^{2k-1}. \end{aligned}$$

c) Predpokladajme, že $a \in (-\infty, 0\rangle$, $b \in \langle 0, \infty)$.
Ak $a < 0$, potom $a^{2k-1} < 0 \leqq b^{2k-1}$. Ak $b > 0$, potom $a^{2k-1} \leqq 0 < b^{2k-1}$.
V obidvoch prípadoch teda platí $a^{2k-1} < b^{2k-1}$.

Tým sme overili, že funkcia $y = x^{2k-1}$ je rastúca na intervale $(-\infty, \infty)$.
Na záver poznamenajme, že podstatne jednoduchší dôkaz sme mohli získať pomocou derivácie.

Teraz si uvedieme niektoré užitočné vlastnosti rastúcich funkcií.[33)]

7) Súčet rastúcich funkcií je rastúca funkcia.

Môžeme sa o tom presvedčiť nasledujúcim spôsobom. Majme reálne čísla a, b také, že platí $a < b$. Potom
pre rastúcu funkciu $y = f(x)$ platí $f(a) < f(b)$ a
pre rastúcu funkciu $y = g(x)$ platí $g(a) < g(b)$.
Sčítaním týchto dvoch nerovností dostávame $f(a) + g(a) < f(b) + g(b)$.
Tento postup je korektný za predpokladu, že čísla a, b ležia v intervale I, na ktorom sú obidve funkcie rastúce.

8) Kompozícia rastúcich funkcií je rastúca funkcia.

Môžeme sa o tom presvedčiť nasledujúcim spôsobom. Majme reálne čísla a, b také, že platí $a < b$. Potom
pre rastúcu funkciu $y = g(x)$ platí $g(a) < g(b)$, a teda
pre rastúcu funkciu $y = f(x)$ platí $f(g(a)) < f(g(b))$.

[33)] Podobné vlastnosti klesajúcich funkcií si premyslite samostatne. Je to užitočné cvičenie.

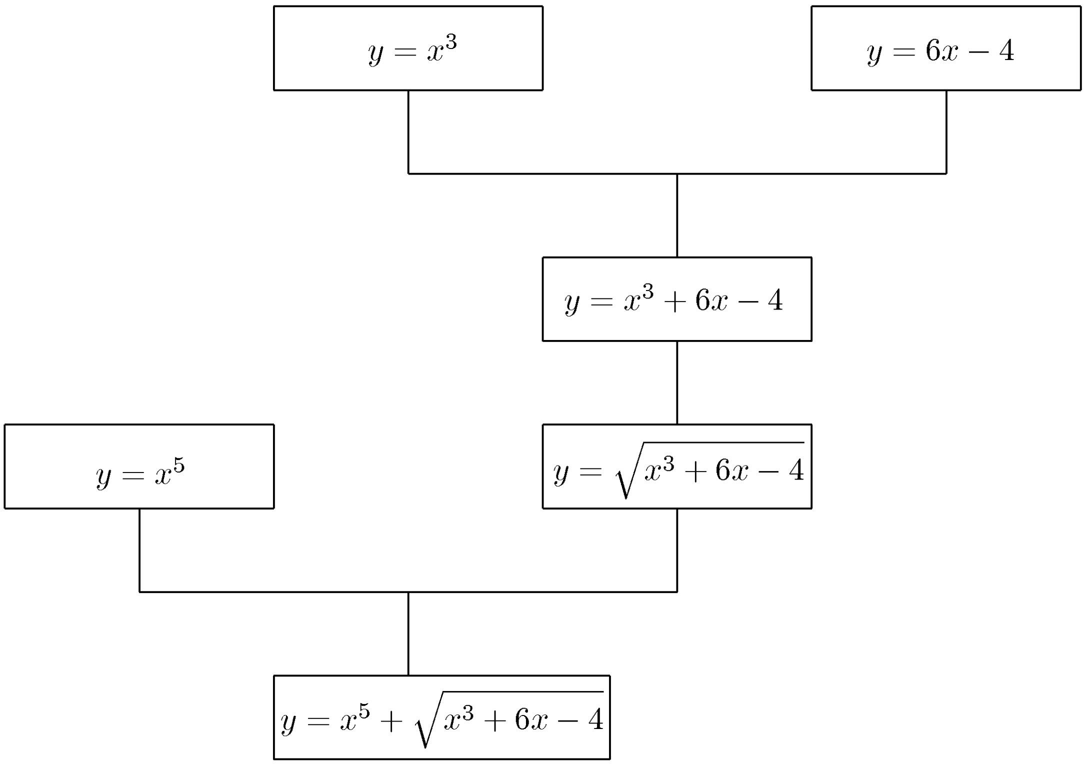
Tento postup je korektný za predpokladu, že čísla a, b ležia v intervale I, na ktorom je funkcia $y = g(x)$ rastúca a že čísla $g(a)$, $g(b)$ ležia v intervale J, na ktorom je funkcia $y = f(x)$ rastúca. Inými slovami, musia byť splnené tieto tri podmienky:

a) funkcia $y = g(x)$ je rastúca na intervale I,

b) funkcia $y = f(x)$ je rastúca na intervale J,

c) funkcia $y = g(x)$ zobrazí interval I do intervalu J, t. j. pre každé $x \in I$ musí platiť $g(x) \in J$.

Použitie uvedených vlastností si budeme ilustrovať na príklade. Ukážeme, že funkcia $y = x^5 + \sqrt{x^3 + 6x - 4}$ je rastúca na svojom definičnom obore.



Obr. 22.1

Najskôr určíme tvar definičného oboru. Funkcia $y = x^3 + 6x - 4$ je rastúca, pretože je súčtom dvoch rastúcich funkcií $y = x^3$ a $y = 6x - 4$.

Odtiaľ vyplýva, že rovnica $x^3 + 6x - 4 = 0$ môže mať najviac jeden reálny koreň[34)].

Pretože funkcia $y = x^3 + 6x - 4$

1. je spojitá,
2. pre $x = 0$ nadobúda zápornú hodnotu a
3. pre $x = 1$ nadobúda kladnú hodnotu,

musí mať nulový bod v intervale $(0, 1)$. Označme ho x_0. Môžeme ho dokonca

[34)] Skutočne, ak by pre rastúcu funkciu $y = f(x)$ mala rovnica $f(x) = c$ aspoň dva rôzne reálne korene a, b, $a < b$, potom by platilo $c = f(a) < f(b) = c$, čo je spor.

vypočítať[35], pre nasledujúce úvahy to však nebude podstatné.

Pretože funkcia $y = x^3 + 6x - 4$ je rastúca, pre každé reálne číslo x platí

$$\text{ak } x < x_0, \text{ potom } x^3 + 6x - 4 < 0,$$
$$\text{ak } x > x_0, \text{ potom } x^3 + 6x - 4 > 0.$$

Definičným oborom funkcie $y = x^5 + \sqrt{x^3 + 6x - 4}$ je teda interval $\langle x_0, \infty)$.

Funkcia $y = x^5 + \sqrt{x^3 + 6x - 4}$ je rastúca na intervale $\langle x_0, \infty)$, pretože vznikne pomocou tvorenia súčtov a tvorenia kompozície z rastúcich funkcií $y = x^5$, $y = x^3$, $y = 6x - 4$ a $y = \sqrt{x}$. Názorne to ilustruje obr. 22.1.

Príklad 22.1. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$x^5 + \sqrt{x^3 + 6x - 4} = 36. \tag{22.5}$$

Ako sme ukázali vyššie, funkcia $y = x^5 + \sqrt{x^3 + 6x - 4}$ je rastúca. Odtiaľ vyplýva, že rovnica (22.5) môže mať najviac jeden reálny koreň. Tento koreň nie je ťažké uhádnuť. Je to číslo $x = 2$.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (22.5) je množina $P = \{2\}$.

Príklad 22.2. Zistite počet reálnych koreňov rovnice

$$x^3 = 36x + 96. \tag{22.6}$$

Položme $f(x) = x^3 - 36x - 96$. Pokúsime sa zistiť, na ktorých intervaloch je funkcia $y = f(x)$ rastúca, resp. klesajúca.[36]

a) Hľadáme také najmenšie kladné číslo ξ, aby platilo

$$0 < \xi \leqq a < b \Rightarrow f(a) < f(b).$$

Potom funkcia $y = f(x)$ bude rastúca na intervale $\langle \xi, \infty)$. Pretože platí

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= (b^3 - 36b - 96) - (a^3 - 36a - 96) = \\ &= (b^3 - a^3) - 36(b - a) = \underbrace{(b - a)}_{>0} \cdot (a^2 + ab + b^2 - 36), \end{aligned}$$

stačí nájsť ξ tak, aby pre $0 < \xi \leqq a < b$ platilo $a^2 + ab + b^2 - 36 > 0$.

[35] $x_0 = \sqrt[3]{2\sqrt{3} + 2} - \sqrt[3]{2\sqrt{3} - 2}$, spôsob riešenia takýchto rovníc je vysvetlený v kapitole 3.

[36] Pomocou derivácie je to jednoduchšie, urobte si to ako užitočné cvičenie.

Ak $0 < \xi \leqq a < b$, potom $a^2 + ab + b^2 - 36 > \xi^2 + \xi^2 + \xi^2 - 36 = 3\xi^2 - 36$. Číslo ξ stačí zvoliť tak, aby platilo $3\xi^2 - 36 \geqq 0$. Položíme teda $\xi = 2\sqrt{3}$.
Tým sme ukázali, že funkcia $y = f(x)$ je rastúca na intervale $\langle 2\sqrt{3}, \infty)$.

b) Podobným spôsobom je možné overiť, že funkcia $y = f(x)$ je rastúca na intervale $(-\infty, -2\sqrt{3}\,\rangle$. Prenechávame to čitateľovi ako užitočné cvičenie.

c) Nech $a, b \in \langle -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\,\rangle$, $a < b$. Potom platí

$$\underbrace{(a + 2\sqrt{3}\,)}_{\geqq 0} \cdot \underbrace{(2\sqrt{3} - b)}_{\geqq 0} \geqq 0,$$

odkiaľ po úprave dostávame

$$12 - ab \geqq 2\sqrt{3} \cdot \underbrace{(b - a)}_{>0} > 0.$$

Tým sme ukázali, že $ab < 12$. Pretože $a^2 \leqq 12$, $b^2 \leqq 12$, máme

$$a^2 + ab + b^2 - 36 < 12 + 12 + 12 - 36 = 0.$$

Tým sme ukázali, že platí

$$f(b) - f(a) = (b - a)(a^2 + ab + b^2 - 36) < 0.$$

Teda funkcia $y = f(x)$ je klesajúca na intervale $\langle -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\,\rangle$.

Pretože

$$f(-2\sqrt{3}\,) = 48(\sqrt{3} - 2) < 0,$$

pre všetky $x \in (-\infty, 2\sqrt{3}\,\rangle$ platí $f(x) < 0$.

Skutočne, pretože funkcia $y = f(x)$ je rastúca na intervale $(-\infty, -2\sqrt{3}\,\rangle$, pre všetky x z tohto intervalu platí $f(x) < f(-2\sqrt{3}\,) < 0$. Na druhej strane, pretože funkcia $y = f(x)$ je klesajúca na intervale $\langle -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\,\rangle$, pre všetky x z tohto intervalu platí $f(x) < f(-2\sqrt{3}\,) < 0$.

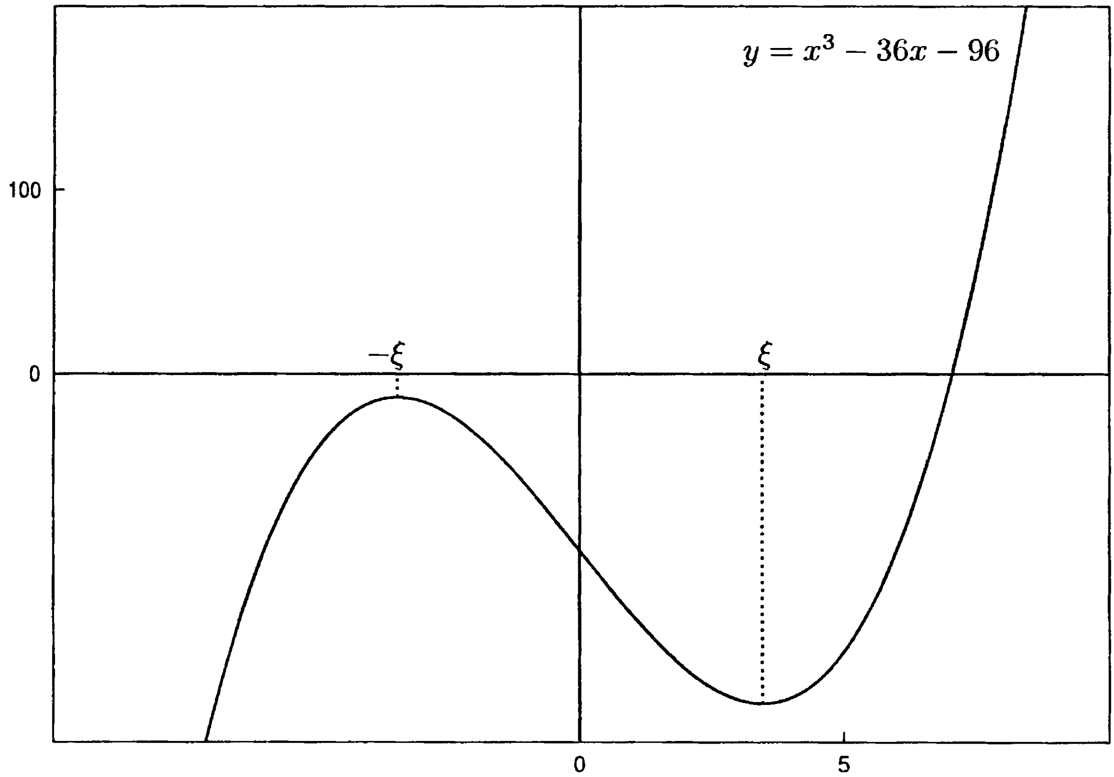
Teda rovnica $f(x) = 0$ nemá koreň na intervale $(-\infty, 2\sqrt{3}\,\rangle$.

Pretože funkcia $y = f(x)$ je spojitá, $f(7) = -5 < 0$ a $f(8) = 128 > 0$, medzi číslami 7 a 8 musí ležať aspoň jeden koreň rovnice $f(x) = 0$.

Pretože funkcia $y = f(x)$ je rastúca na intervale $\langle 2\sqrt{3}, \infty)$, rovnica $f(x) = 0$ môže mať na tomto intervale najviac jeden reálny koreň.

Záver. Rovnica (22.6) má práve jeden reálny koreň[37)]. Pozrite si obr. 22.2.

[37)] Metóda riešenia takejto rovnice je vysvetlená v kapitole 3.



Obr. 22.2

Monotónnosť patrí k základným vlastnostiam exponenciálnych funkcií.

9) Ak $a > 1$, funkcia $y = a^x$ je rastúca. Ak $0 < a < 1$, funkcia $y = a^x$ je klesajúca.

Nie je problém to dokázať pre funkcie definované na množine racionálnych čísel[38]. Avšak dôkaz pre interval $(-\infty, \infty)$ je relatívne komplikovaný. Uvedomte si, že výraz a^x sa pre iracionálne x definuje ako limita postupnosti $\{a^{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$, kde x_n sú racionálne čísla konvergujúce k číslu x. Aby táto definícia bola korektná, je potrebné ukázať, že limita postupnosti $\{a^{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nezávisí od výberu postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergujúcej ku x. V prípade záujmu si dôkaz môžete vyhľadať vo vysokoškolských učebniciach.

V dôkaze pre ľubovoľné reálne čísla sa vychádza z predpokladu, že pre racionálne čísla je tvrdenie už overené[39].

---

[38] Naznačíme dôkaz pre $a > 1$. Ak r, s sú racionálne čísla, $r < s$, potom stačí overiť, že číslo $a^s - a^r$ je kladné. Pretože $a^s - a^r = a^r(a^{s-r} - 1)$, stačí ukázať, že obidva činitele sú kladné. Premyslite si samostatne, prečo je prvý činiteľ kladný. Ukážeme, že aj druhý činiteľ je kladný. Pretože $s - r$ je kladné racionálne číslo, môžeme ho vyjadriť v tvare $s - r = \frac{m}{n}$, kde m a n sú prirodzené čísla. Stačí teda overiť, že $a^{s-r} = a^{\frac{m}{n}} > 1$. K tomu stačí ukázať, že $a^{\frac{1}{n}} > 1$ a že $b^m > 1$ pre $b > 1$ (potom dosadíme $b = a^{\frac{1}{n}}$).

[39] Naznačíme dôkaz pre $a > 1$. Nech r a s sú iracionálne čísla také, že $r < s$. Vyberme dve

Existujú aj iné spôsoby zavedenia exponenciálnej funkcie, nebudeme ich však uvádzať. Prekračuje to rámec tejto publikácie.

Príklad 22.3. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$7x + 2^x = 44. \tag{22.7}$$

Funkcia $y = 7x + 2^x$ je rastúca, pretože je súčtom dvoch rastúcich funkcií $y = 7x$ a $y = 2^x$. Teda rovnica (22.7) môže mať najviac jeden reálny koreň. Tento koreň nie je ťažké uhádnuť. Je to číslo $x = 4$.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (22.7) je množina $P = \{4\}$.

Príklad 22.4. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$3^x + 4^x = 5^x. \tag{22.8}$$

Rovnicu (22.8) najskôr upravíme do tvaru

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1. \tag{22.9}$$

Funkcia $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ je klesajúca, pretože je súčtom dvoch klesajúcich funkcií $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ a $y = \left(\frac{4}{5}\right)^x$. Teda rovnica (22.9) môže mať najviac jeden reálny koreň. Tento koreň nie je ťažké uhádnuť. Je to číslo $x = 2$.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (22.8) je množina $P = \{2\}$.

Príklad 22.5. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$5^x + 12^x = 13^x. \tag{22.10}$$

Rovnicu (22.10) najskôr upravíme do tvaru

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1.$$

---

racionálne čísla p, q tak, aby platilo $r < p < q < s$. Uvažujme dve postupnosti $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ racionálnych čísel také, že $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $n \geqq n_0$ platí $r_n < p < q < s_n$. Pretože v poslednej nerovnosti sú všetky čísla racionálne, platí $a^{r_n} < a^p < a^q < a^{s_n}$. Limitný prechod potom dáva $a^r = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} \leqq a^p < a^q \leqq \lim\limits_{n\to\infty} a^{s_n} = a^s$. Ostatné prípady si premyslite samostatne.

Ľavá strana je klesajúca funkcia (ako súčet dvoch klesajúcich funkcií), preto táto rovnica môže mať najviac jeden reálny koreň. Ľahko sa presvedčíme, že je to $x = 2$.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (22.10) je množina $P = \{2\}$.

Príklad 22.6. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$3^{x+1} + 100 = 7^{x-1}. \tag{22.11}$$

Rovnicu (22.11) najskôr upravíme do tvaru

$$21 + 700 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{7}{3}\right)^x. \tag{22.12}$$

Pretože funkcia $y = 21 + 700 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ je klesajúca[40)] a funkcia $y = \left(\frac{7}{3}\right)^x$ je rastúca, rovnica (22.12) môže mať najviac jeden reálny koreň. Tento koreň nie je ťažké uhádnuť. Je to číslo $x = 4$.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (22.12) je množina

$$P = \{4\}.$$

V nasledujúcom príklade využijeme monotónnosť rafinovanejším spôsobom.

Príklad 22.7. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$3^x - 2^x = 4^x - 3^x. \tag{22.13}$$

Dva korene môžeme uhádnuť. Sú to čísla $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$. Ukážeme, že rovnica (22.13) iné reálne korene nemá.

Pokúsime sa využiť skutočnosť, že obidve časti rovnice (22.13) majú rovnaký tvar. Položme

$$f(t) = (t+1)^x - t^x. \tag{22.14}$$

Rovnicou (22.14) je určená funkcia $y = f(t)$, ktorá závisí od parametra x. Ide teda vlastne o parametrický systém funkcií, kde parameter x môže byť ľubovoľné reálne číslo. Vzhľadom na to, že rovnica (22.13) má tvar $f(2) = f(3)$, budeme skúmať funkciu $y = f(t)$ pre $t \in \langle 2, 3\rangle$. Pomocou derivácie ukážeme, že funkcia $y = f(t)$ je rastúca/klesajúca (v závislosti od hodnoty parametra x).

Najskôr teda vypočítame jej deriváciu

$$f'(t) = x \cdot [(t+1)^{x-1} - t^{x-1}]. \tag{22.15}$$

[40)] táto funkcia je kompozíciou rastúcej funkcie $y = 21 + 700x$ a klesajúcej funkcie $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Predpokladajme, že $x \neq 0$, $x \neq 1$. Rozlíšime tri prípady.

a) Predpokladajme, že $x > 1$. Potom $x - 1 > 0$, teda $(t+1)^{x-1} > t^{x-1}$. Odtiaľ vyplýva, že $f'(t) > 0$. Teda funkcia $y = f(t)$ je rastúca na intervale $(0, \infty)$. Potom ale platí $f(2) < f(3)$. Tým sme ukázali, že

$$x > 1 \qquad \Rightarrow \qquad 3^x - 2^x < 4^x - 3^x. \tag{22.16}$$

b) Predpokladajme, že platí $0 < x < 1$. Potom $x - 1 < 0$, teda $(t+1)^{x-1} < t^{x-1}$. Odtiaľ vyplýva, že platí $f'(t) < 0$. Teda funkcia $y = f(t)$ je klesajúca na intervale $(0, \infty)$. Potom ale platí $f(2) > f(3)$. Tým sme ukázali, že

$$0 < x < 1 \qquad \Rightarrow \qquad 3^x - 2^x > 4^x - 3^x. \tag{22.17}$$

c) Predpokladajme, že $x < 0$. Potom $x - 1 < 0$, teda $(t+1)^{x-1} < t^{x-1}$. Odtiaľ vyplýva, že platí $f'(t) > 0$. Teda funkcia $y = f(t)$ je rastúca na intervale $(-\infty, 0)$. Potom ale platí $f(2) < f(3)$. Tým sme ukázali, že

$$x < 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3^x - 2^x < 4^x - 3^x. \tag{22.18}$$

Vo všetkých troch prípadoch sme ukázali, že platí $3^x - 2^x \neq 4^x - 3^x$. To však znamená, že rovnica (22.13) nemá ďalšie reálne korene.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (22.13) je množina

$$P = \{0, 1\}.$$

Ukážeme si ešte iný prístup k riešeniu príkladu 7.6, ktorý je založený na použití tzv. Bernoulliho nerovnosti:

Predpokladajme, že $t \neq 0$ je také reálne číslo, že $1 + t > 0$. Potom pre každé reálne číslo x platí:

$$\begin{aligned} (1+t)^x &> 1 + tx, \qquad && \text{ak } x > 1 \text{ alebo } x < 0; \\ (1+t)^x &< 1 + tx, \qquad && \text{ak } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Rovnicu (22.13) prepíšeme do tvaru

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^x + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^x = 2. \tag{22.19}$$

Rozlíšime dva prípady:

a) Predpokladajme, že $x > 1$ alebo $x < 0$. Potom podľa Bernoulliho nerovnosti máme $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^x + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^x > 1 + \frac{x}{3} + 1 - \frac{x}{3} = 2$. Tým sme ukázali, že takéto x nemôže byť koreňom rovnice (22.19).

b) Predpokladajme, že $0 < x < 1$. Potom podľa Bernoulliho nerovnosti máme $\left(1+\frac{1}{3}\right)^x + \left(1-\frac{1}{3}\right)^x < 1 + \frac{x}{3} + 1 - \frac{x}{3} = 2$. Tým sme ukázali, že takéto x nemôže byť koreňom rovnice (22.19).

Dosadením do rovnice (22.19) sa presvedčíme, že čísla $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ sú jej koreňmi.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (22.19) je množina

$$P = \{0, 1\}.$$

Príklad 22.8. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$3^x - 2^x = 4^{x^2} - 3^{x^2}. \tag{22.20}$$

Ľahko overíme, že $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$ sú korene rovnice (22.20). Ukážeme, že iné reálne korene nemá.

Predpokladajme, že $x \neq 0$, $x \neq 1$. Pretože zrejme platí $x^2 > 0$, máme

$$4^{x^2} > 3^{x^2}. \tag{22.21}$$

Rozlíšime dva prípady.

a) Predpokladajme, že $0 < x < 1$. Pretože $x - x^2 > 0$, platí

$$4^{x-x^2} > 3^{x-x^2}. \tag{22.22}$$

Podľa (22.21) a (22.22) máme

$$4^x - 4^{x^2} = 4^{x^2} \cdot (4^{x-x^2} - 1) > 3^{x^2} \cdot (3^{x-x^2} - 1) = 3^x - 3^{x^2}.$$

Tým sme ukázali, že platí

$$4^x - 3^x > 4^{x^2} - 3^{x^2}. \tag{22.23}$$

Podľa (22.17) a (22.23) máme

$$3^x - 2^x > 4^x - 3^x > 4^{x^2} - 3^{x^2}.$$

Tým sme ukázali, že platí

$$0 < x < 1 \qquad \Rightarrow \qquad 3^x - 2^x > 4^{x^2} - 3^{x^2}. \tag{22.24}$$

b) Predpokladajme, že platí $x < 0$ alebo $x > 1$. Pokúste sa najskôr vyriešiť tento prípad samostatne (príslušné nerovnosti sa iba otočia). Pretože $x - x^2 < 0$, platí

$$4^{x-x^2} < 3^{x-x^2}. \tag{22.25}$$

Podľa (22.21) a (22.25) máme

$$4^x - 4^{x^2} = 4^{x^2} \cdot (4^{x-x^2} - 1) < 3^{x^2} \cdot (3^{x-x^2} - 1) = 3^x - 3^{x^2}.$$

Tým sme ukázali, že platí

$$4^x - 3^x < 4^{x^2} - 3^{x^2}. \tag{22.26}$$

Podľa (22.16), (22.18) a (22.26) máme

$$3^x - 2^x < 4^x - 3^x < 4^{x^2} - 3^{x^2}.$$

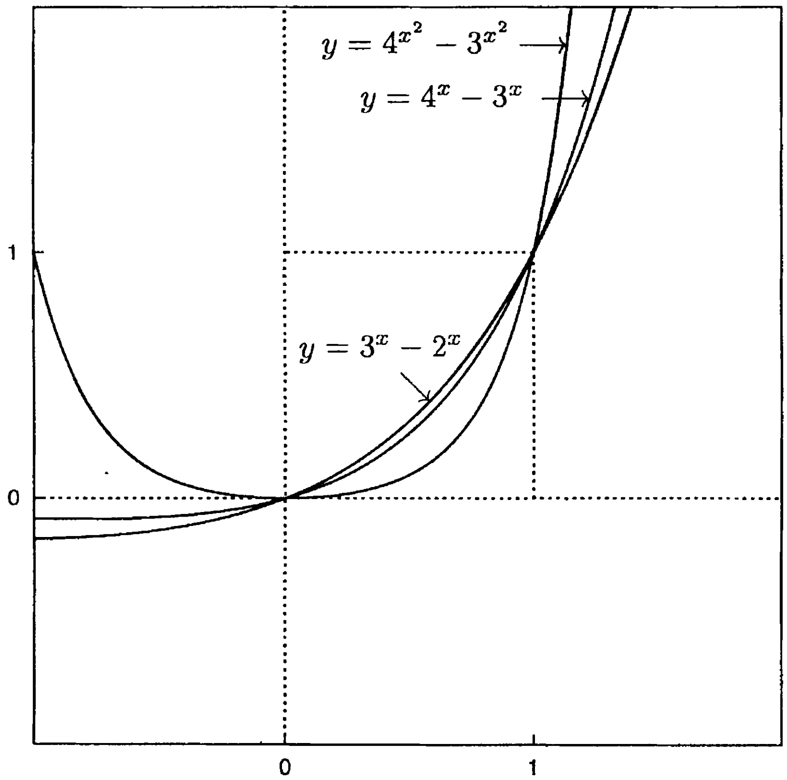
Tým sme ukázali, že platí

$$x < 0 \quad \text{alebo} \quad x > 1 \qquad \Rightarrow \qquad 3^x - 2^x < 4^{x^2} - 3^{x^2}. \tag{22.27}$$

Podľa (22.24) a (22.27) vidíme, že rovnica (22.20) nemá ďalšie korene.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (22.20) je množina $P = \{0, 1\}$.

Grafy funkcií, s ktorými sme pracovali v posledných dvoch príkladoch, si môžete pozrieť na obr. 22.3.



Obr. 22.3

Pripomeňme si základné vlastnosti mocnín.

Teoréma 22.1. *Pre* $0 < a < b$ *a pre* ξ *reálne číslo platí:*

$$a^\xi < b^\xi \text{ pre } \xi > 0,$$
$$a^\xi = b^\xi \text{ pre } \xi = 0,$$
$$a^\xi > b^\xi \text{ pre } \xi < 0.$$

Pre akékoľvek reálne čísla $\xi_1 < \xi_2$ *platí:*

$$a^{\xi_1} < a^{\xi_2} \text{ pre } a > 1,$$
$$a^{\xi_1} = a^{\xi_2} \text{ pre } a = 1,$$
$$a^{\xi_1} > a^{\xi_2} \text{ pre } 0 < a < 1.$$

Dôsledok. *Pre* $a > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$ *platí* $a^b \neq 1$.

Príklad 22.9. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$x^{x^3} = 3. \tag{22.28}$$

Substitúciou $x^3 = y$ prevedieme rovnicu (22.28) do tvaru $y^y = 3^3$. Jedno z riešení je $y = 3$, t. j. $x = \sqrt[3]{3}$. Ukážeme, že rovnica (22.28) iné riešenia nemá.

Pre $0 < x < 1$ platí $x^3 > 0$, teda $x^{x^3} < 1$. Tým sme ukázali, že rovnica (22.28) nemá koreň v intervale $(0, 1)$.

Ukážeme, že funkcia $y = x^{x^3}$ je rastúca na intervale $\langle 1, \infty)$. Nech $1 \leqq a < b$. Pretože $0 < a^3 < b^3$ a $b > 1$, platí

$$a^{a^3} < b^{a^3} < b^{b^3}.$$

Odtiaľ vyplýva, že funkcia $y = x^{x^3}$ môže mať najviac jeden koreň na intervale $\langle 1, \infty)$. Ako sme videli vyššie, týmto koreňom je číslo $x = \sqrt[3]{3}$.

Pretože číslo $x = 0$ neleží v definičnom obore funkcie $y = x^{x^3}$, zostáva nám preskúmať ešte záporné čísla. Predpokladajme teda, že $x < 0$. Pretože výraz a^b nie je definovaný v prípade, že a je záporné a b je iracionálne, číslo x^3 musí byť racionálne.

Pretože výraz 0^r je definovaný iba pre $r > 0$, číslo $x = 0$ nepatrí do definičného oboru rovnice (22.28). Pre úplnosť dodajme, že pre $r > 0$ sa definuje $0^r = 0$.

Niektorí študenti si neuvedomujú, že výraz a^r je definovaný aj pre $a < 0$ a $r \in \mathbb{Z}$. Skutočne, ak r je prirodzené číslo, potom definujeme

$$a^r = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r-\text{krát}}$$

pre každé reálne číslo a. Napríklad $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$.

V prípade, že r je záporné celé číslo a $a \neq 0$, definujeme

$$a^r = \frac{1}{a^{-r}}.$$

Napríklad $(-1)^{-3} = \dfrac{1}{(-1)^3} = -1$.

Pre úplnosť dodajme, že pre $a \neq 0$ sa definuje

$$a^0 = 1.$$

Teda do definičného oboru rovnice (22.28) patria:

1) všetky kladné reálne čísla a
2) tie záporné reálne čísla x, pre ktoré x^3 je celé číslo.

Predpokladajme, že $x < 0$ je také, že $x^3 \in \mathbb{Z}$. Ukážeme, že číslo x nie je koreňom rovnice (22.28).

Pretože x je záporné, x^3 je záporné celé číslo. Môžeme ho teda vyjadriť v tvare $x^3 = -m$, kde m je prirodzené číslo. Rovnica $x^3 = -m$ má jediný reálny koreň $x = -\sqrt[3]{m}$. Potom

$$x^{x^3} = (-\sqrt[3]{m})^{-m} = \frac{1}{(-1)^m \cdot \sqrt[3]{m^m}} < 1.$$

Tým sme ukázali, že rovnica (22.28) nemá záporné korene.

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (22.28) je množina

$$P = \{\sqrt[3]{3}\}.$$

Príklad 22.10. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$x^x = x. \tag{22.29}$$

Pretože číslo $x = 0$ nepatrí do definičného oboru rovnice (22.29), môžeme ju upraviť do tvaru

$$x^{x-1} = 1. \tag{22.30}$$

Rozlíšime niekoľko prípadov.

a) Predpokladajme, že platí $x > 0$, $x \neq 1$. Potom podľa dôsledku teorémy 22.1 máme $x^{x-1} \neq 1$. Tým sme ukázali, že rovnica (22.30) nemá korene v množine $(0,1) \cup (1,\infty)$.
b) Zrejme číslo $x = 1$ je koreňom rovnice (22.30).
c) Predpokladajme, že platí $x < 0$. Potom $x - 1 \in \mathbb{Z}$.

c_1) V prípade, že číslo $x-1$ je nepárne, platí $x^{x-1} < 0$.

c_2) V prípade, že číslo $x-1$ je párne, platí

$$x^{x-1} = |x|^{x-1}.$$

Podobne ako v prípade a) sa ukáže, že rovnica $|x|^{x-1} = 1$ nemá korene v množine $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$. Ľahko sa overí, že číslo $x = -1$ je koreňom rovnice (22.30).

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (22.29) je množina

$$P = \{-1, 1\}.$$

Príklad 22.11. Zistite počet reálnych koreňov rovnice

$$3^x = x^3. \tag{22.31}$$

Nie je problém zistiť, že číslo $x = 3$ je koreňom rovnice (22.31).
Položme $f(x) = 3^x - x^3$. Zrejme platí $f(2) = 3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1 > 0$. Ukážeme, že platí $f(\frac{5}{2}) < 0$. Presvedčia nás o tom nasledujúce ekvivalentné úpravy:

$$\begin{aligned} 3^{\frac{5}{2}} - \left(\tfrac{5}{2}\right)^3 &< 0 \\ 3^{\frac{5}{2}} &< \left(\tfrac{5}{2}\right)^3 \\ 3^5 &< \left(\tfrac{5}{2}\right)^6 \\ 3^5 \cdot 2^6 &< 5^6 \\ 15\,552 &< 15\,625. \end{aligned}$$

Pretože funkcia $y = f(x)$ je spojitá, medzi číslami 2 a $\frac{5}{2}$ musí ležať aspoň jeden koreň rovnice $f(x) = 0$.

Tým sme overili, že rovnica (22.31) má aspoň dva reálne korene – jedným je číslo $x = 3$, druhý leží v intervale $(2, \frac{5}{2})$. Ukážeme, že rovnica (22.31) ďalšie korene nemá.

Číslo $x = 0$ zrejme nie je koreňom rovnice (22.31). Rovnica (22.31) nemôže mať ani záporné korene. Skutočne, pre $x < 0$ je ľavá strana rovnice (22.31) kladná, ale pravá strana rovnice (22.31) je záporná.

Pre $x > 0$ môžeme rovnicu (22.31) upraviť do ekvivalentného tvaru:

$$x \cdot \ln 3 = 3 \cdot \ln x. \tag{22.32}$$

Položme $g(x) = x \cdot \ln 3 - 3 \cdot \ln x$. Potom platí:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \ln 3 - \frac{3}{x}, \\ g''(x) &= \frac{3}{x^2}. \end{aligned}$$

Pretože pre každé $x > 0$ platí $g''(x) > 0$, funkcia $y = g'(x)$ je rastúca. Položme

$$x_0 = \frac{3}{\ln 3}.$$

Pretože $g'(x_0) = 0$, pre každé $x > 0$ platí:
1) ak $x \in (0, x_0)$, potom $g'(x) < 0$,
2) ak $x \in (x_0, \infty)$, potom $g'(x) > 0$.

Funkcia $y = g(x)$ je teda na intervale $(0, x_0\rangle$ klesajúca a na intervale $\langle x_0, \infty)$ je rastúca.

Tým sme ukázali, že na každom z týchto dvoch intervalov môže mať rovnica $g(x) = 0$ najviac jeden reálny koreň. Teda rovnica $g(x) = 0$ nemôže mať viac ako dva reálne korene na intervale $(0, \infty)$.

Záver. Rovnica (22.31) má práve dva reálne korene:

jedným je číslo $x = 3$, druhý leží v intervale $(2, \frac{5}{2})$.

Poznámka. Ukážeme, že rovnica (22.31) nemá racionálny koreň v intervale $(0, 3)$. Sporom. Predpokladajme, že $x = \frac{p}{q} \in (0, 3)$ je racionálny koreň rovnice (22.31), pričom je zapísaný v základnom tvare (t. j. v zlomku $\frac{p}{q}$ už nie je možné krátiť). Potom platí $0 < p < 3q$. Po dosadení do rovnice (22.31) dostávame:

$$3^{\frac{p}{q}} = \left(\frac{p}{q}\right)^3$$

$$3^p = \left(\frac{p}{q}\right)^{3q}$$

$$3^p \cdot q^{3q} = p^{3q}. \tag{22.33}$$

Ľavá strana je deliteľná tromi, preto aj pravá strana musí byť deliteľná tromi. Pretože číslo tri je prvočíslo, číslo p musí byť deliteľné tromi. Teda $p = 3r$, kde r je prirodzené číslo. Pretože $0 < p < 3q$, po dosadení máme $0 < 3r < 3q$, teda $r < q$.

Po dosadení do (22.33) máme

$$\begin{aligned} 3^{3r} \cdot q^{3q} &= (3r)^{3q} \\ 3^{3r} \cdot q^{3q} &= 3^{3q} \cdot r^{3q} \\ q^{3q} &= 3^{3q-3r} \cdot r^{3q} \\ q^{3q} &= 3^{3(q-r)} \cdot r^{3q}. \end{aligned}$$

Pretože $q - r > 0$, pravá strana je deliteľná tromi. Preto aj ľavá strana musí byť deliteľná tromi. Pretože číslo tri je prvočíslo, číslo q musí byť deliteľné tromi.

Podarilo sa nám ukázať, že obidve čísla p, q sú deliteľné tromi, čo je v spore s predpokladom, že zlomok $\frac{p}{q}$ je v základnom tvare.

Jeden z koreňov rovnice (22.31) je teda iracionálny. Pomocou výpočtovej techniky môžeme nájsť jeho približnú hodnotu $x \doteq 2.478\,052\,680\,288\,302$.

Príklad 22.12. Pre $a = \frac{1}{16}$ zistite počet reálnych koreňov rovnice

$$a^{a^x} = x. \tag{22.34}$$

Pretože ľavá strana rovnice (22.34) je kladná pre každé reálne číslo x, rovnica (22.34) môže mať iba kladné korene.

Najskôr sa budeme zaoberať jednoduchšou rovnicou

$$a^x = x. \tag{22.35}$$

Všimnime si, že každý koreň rovnice (22.35) je aj koreňom rovnice (22.34). Skutočne, ak položíme $f(x) = a^x$, potom rovnica (22.35) má tvar $f(x) = x$ a rovnica (22.34) má tvar $f(f(x)) = x$.

Zrejme aj rovnica (22.35) môže mať iba kladné korene. Upravíme ju do ekvivalentného tvaru

$$\frac{\ln x}{x} - \ln a = 0. \tag{22.36}$$

Položme $g(x) = \dfrac{\ln x}{x} - \ln a$. Zrejme funkcia $y = g(x)$ je spojitá na intervale $(0, \infty)$. Vypočítame jej deriváciu

$$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Riešením nerovnice $g'(x) > 0$ dostávame

$$\begin{gathered} 1 - \ln x > 0 \\ \ln x < 1 \\ x \in (0, e). \end{gathered}$$

Tým sme ukázali, že funkcia $y = g(x)$ je rastúca na intervale $(0, e\rangle$. Podobne možno ukázať, že funkcia $y = g(x)$ je klesajúca na intervale $\langle e, \infty)$.

Pretože $a = \frac{1}{16} \in (0, 1)$, platí $\ln a < 0$. Odtiaľ vyplýva, že pre $x \geqq 1$ platí $g(x) > 0$. Tým sme ukázali, že rovnica (22.36) nemá koreň v intervale $\langle 1, \infty)$.

Pretože funkcia $y = g(x)$ je rastúca na intervale $(0, e\rangle$, na intervale $(0, 1) \subset (0, e\rangle$ môže mať najviac jeden reálny koreň. Pretože $g(\frac{1}{4}) < 0$ a $g(\frac{1}{2}) > 0$, funkcia $y = g(x)$ má aspoň jeden koreň v intervale $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

Pretože funkcia $y = g(x)$ je rastúca na tomto intervale, rovnica (22.36) má na tomto intervale jediný reálny koreň. (Pripomeňme si, že rovnice (22.35) a (22.36) sú ekvivalentné.) Ukážeme, že tento koreň je iracionálny. Sporom. Predpokladajme, že racionálne číslo $\frac{p}{q}$ je koreňom rovnice (22.35), pričom p a q sú prirodzené čísla, zlomok $\frac{p}{q}$ je v základnom tvare (t. j. nedá sa v ňom krátiť) a platí $\frac{1}{4} < \frac{p}{q} < \frac{1}{2}$.

Po dosadení do rovnice (22.35) dostávame

$$\begin{aligned} a^{\frac{p}{q}} &= \frac{p}{q} \\ \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{p}{q}} &= \frac{p}{q} \\ \left(\frac{1}{2^4}\right)^{\frac{p}{q}} &= \frac{p}{q} \\ \frac{1}{2^{4p}} &= \frac{p^q}{q^q} \\ q^q &= 2^{4p} \cdot p^q. \end{aligned} \tag{22.37}$$

Pravá strana v (22.37) je párna, preto aj číslo q^q musí byť párne. Odtiaľ vyplýva, že číslo q je párne. Môžeme ho teda vyjadriť v tvare $q = 2r$, kde r je prirodzené číslo. Po dosadení do (22.37) dostávame

$$\begin{aligned} (2r)^{2r} &= 2^{4p} \cdot p^{2r} \\ 2^{2r} \cdot r^{2r} &= 2^{4p} \cdot p^{2r} \\ r^{2r} &= 2^{4p-2r} \cdot p^{2r}. \end{aligned} \tag{22.38}$$

Pretože $\frac{p}{q} > \frac{1}{4}$, po dosadení $q = 2r$ dostávame

$$\begin{aligned} \frac{p}{2r} &> \frac{1}{4} \quad \Big/ \cdot 8r \\ 4p &> 2r. \end{aligned}$$

Tým sme ukázali, že pravá strana v (22.38) je párna. Teda aj číslo r^{2r} musí byť párne. Odtiaľ vyplýva, že číslo r je párne. Môžeme ho teda vyjadriť v tvare $r = 2s$, kde s je prirodzené číslo. Po dosadení do (22.38) dostávame

$$\begin{aligned} (2s)^{4s} &= 2^{4p-4s} \cdot p^{4s} \\ 2^{4s} \cdot s^{4s} &= 2^{4p-4s} \cdot p^{4s} \\ 2^{8s-4p} \cdot s^{4s} &= p^{4s}. \end{aligned} \tag{22.39}$$

Pretože $\frac{p}{q} < \frac{1}{2}$, po dosadení $q = 2r$ a $r = 2s$ dostávame

$$\begin{aligned} \frac{p}{2r} &< \frac{1}{2} \\ \frac{p}{4s} &< \frac{1}{2} \quad \Big/ \cdot 16s \\ 4p &< 8s. \end{aligned}$$

Tým sme ukázali, že ľavá strana v (22.39) je párna. Teda aj číslo p^{4s} je párne. Odtiaľ vyplýva, že číslo p je párne.

Podarilo sa nám ukázať, že obidve čísla p a q sú párne, čo je v spore s predpokladom, že zlomok $\frac{p}{q}$ je v základnom tvare. Tento spor ukazuje, že rovnica (22.35) nemá racionálny koreň v intervale $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

Vrátime sa k rovnici (22.34) a upravíme ju do ekvivalentného tvaru

$$a^x - \log_a x = 0. \tag{22.40}$$

Položme $h(x) = a^x - \log_a x$. Potom

$$\begin{aligned} h'(x) &= a^x \cdot \ln a - \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{x \cdot a^x \cdot \ln^2 a - 1}{x \cdot \ln a}, \\ h'(x) &= \frac{\varphi(x)}{x \cdot \ln a}, \end{aligned}$$

pričom sme symbolom $\varphi(x)$ označili čitateľa tohto zlomku, t. j.

$$\varphi(x) = x \cdot a^x \cdot \ln^2 a - 1.$$

Vypočítame

$$\varphi'(x) = a^x \cdot \ln^2 a + x \cdot a^x \cdot \ln^3 a = \underbrace{a^x \cdot \ln^2 a}_{>0} \cdot (1 + x \cdot \ln a).$$

Potom $\varphi'(x) > 0$ práve vtedy, keď $1 + x \cdot \ln a > 0$, t. j. pre $x < -\frac{1}{\ln a}$. Tým sme ukázali, že na intervale $(-\infty, \xi_0\rangle$ je funkcia $y = \varphi(x)$ rastúca, pričom sme symbolom ξ_0 označili číslo $\xi_0 = -\frac{1}{\ln a}$. Podobne sa ukáže, že na intervale $\langle \xi_0, \infty)$ je funkcia $y = \varphi(x)$ klesajúca. Vypočítame hodnotu tejto funkcie v bode ξ_0.

$$\varphi(\xi_0) = -\frac{1}{\ln a} \cdot a^{-\frac{1}{\ln a}} \cdot \ln^2 a - 1 = -\frac{\ln a}{e} - 1.$$

Pritom sme využili rovnosť $a^{\frac{1}{\ln a}} = e$. (O jej platnosti sa môžete presvedčiť logaritmovaním.)

Ukážeme, že platí $\varphi(\xi_0) > 0$. Skutočne, pretože $e^e < 16$ (pozri dodatok D8), máme $a = \frac{1}{16} < e^{-e}$, odkiaľ dostávame

$$\begin{aligned} a &< e^{-e} \\ \ln a &< -e \\ \frac{\ln a}{e} &< -1 \\ 0 &< -1 - \frac{\ln a}{e}. \end{aligned}$$

Tým sme ukázali, že platí $\varphi(\xi_0) > 0$.

Vypočítame

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= -1 < 0,\\ \varphi(1) &= a \cdot \ln^2 a - 1 = \ln^2 - 1 = \underbrace{(\ln 2 - 1)}_{<0} \cdot \underbrace{(\ln 2 + 1)}_{>0} < 0.\end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva, že

1) na intervale $(-\infty, \xi_0\rangle$ má rovnica $\varphi(x) = 0$ jediný koreň, ktorý označíme x_1;
2) na intervale $\langle\xi_0, \infty)$ má rovnica $\varphi(x) = 0$ jediný koreň, ktorý označíme x_2.

Pretože funkcia $y = \varphi(x)$ je rastúca na intervale $(-\infty, \xi_0\rangle$ a je klesajúca na intervale $\langle\xi_0, \infty)$,

1) pre každé $x \in (-\infty, x_1)$ platí $\varphi(x) < 0$;
2) pre každé $x \in (x_1, x_2)$ platí $\varphi(x) > 0$;
3) pre každé $x \in (x_2, \infty)$ platí $\varphi(x) < 0$.

Pretože $a = \frac{1}{16} < 1$, súčin $x \cdot \ln a$ je záporný pre každé $x > 0$. Potom

1) pre každé $x \in (0, x_1)$ platí $h'(x) = \frac{\varphi(x)}{x \cdot \ln a} > 0$;
2) pre každé $x \in (x_1, x_2)$ platí $h'(x) = \frac{\varphi(x)}{x \cdot \ln a} < 0$;
3) pre každé $x \in (x_2, \infty)$ platí $h'(x) = \frac{\varphi(x)}{x \cdot \ln a} > 0$.

Odtiaľ vyplýva, že funkcia $y = h(x)$ je

1) na intervale $(0, x_1\rangle$ rastúca;
2) na intervale $\langle x_1, x_2\rangle$ klesajúca;
3) na intervale $\langle x_2, \infty)$ rastúca.

Tým sme ukázali, že na každom z uvedených intervalov rovnica $h(x) = 0$ môže mať najviac po jednom koreni. Inými slovami, rovnica (22.40) môže mať najviac tri reálne korene. Ako sme ukázali vyššie, jeden z koreňov leží v intervale $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Nie je problém overiť, že ďalšie dva korene sú $x = \frac{1}{4}$ a $x = \frac{1}{2}$.

Záver. Rovnica (22.34) má tri reálne korene. Z toho dva sú racionálne $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ a tretí je iracionálny, pričom leží medzi x_1 a x_2. Jeho približná hodnota je $x_3 \doteq 0.364\,249\,889\,784$.

Príklad 22.13. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$x^{x^2+x-6} = 1. \tag{22.41}$$

Rozlíšime niekoľko prípadov.

a) Predpokladajme, že platí $x > 0$, $x \neq 1$, $x^2 + x - 6 \neq 0$. Potom podľa dôsledku teorémy 22.1 máme $x^{x^2+x-6} \neq 1$. Tým sme ukázali, že rovnica (22.41) nemá korene v množine $(0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$.

b) Číslo $x = 0$ nepatrí do definičného oboru rovnice (22.41).
c) Zrejme číslo $x = 1$ je koreňom rovnice (22.41).
d) Predpokladajme, že platí $x^2 + x - 6 = 0$, t. j. že platí $(x - 2)(x + 3) = 0$. Ľahko sa overí, že čísla $x = 2$, $x = -3$ sú koreňmi rovnice (22.41).
e) Predpokladajme, že platí $x < 0$, $x^2 + x - 6 \neq 0$. Potom $x^2 + x - 6 \in \mathbb{Z}$.
  e$_1$) V prípade, že číslo $x^2 + x - 6$ je nepárne, platí $x^{x^2+x-6} < 0$.
  e$_2$) V prípade, že číslo $x^2 + x - 6$ je párne, platí

$$x^{x^2+x-6} = |x|^{x^2+x-6}.$$

Podobne ako v prípade a) sa ukáže, že rovnica $|x|^{x^2+x-6} = 1$ nemá korene v množine $(-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (-1, 0)$. Ľahko sa overí, že číslo $x = -1$ je koreňom rovnice (22.41).

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (22.41) je množina

$$P = \{-3, -1, 1, 2\}.$$

Príklad 22.14. V obore reálnych čísel máme riešiť rovnicu:

$$x^{2x-4} = x^{x^2-3x+2}. \tag{22.42}$$

Pretože číslo $x = 0$ nepatrí do definičného oboru rovnice (22.42), môžeme ju upraviť do tvaru

$$x^{x^2-5x+6} = 1. \tag{22.43}$$

Rozlíšime niekoľko prípadov.
a) Predpokladajme, že platí $x > 0$, $x \neq 1$, $x^2 - 5x + 6 \neq 0$. Potom podľa dôsledku teorémy 22.1 máme $x^{x^2-5x+6} \neq 1$. Tým sme ukázali, že rovnica (22.43) nemá korene v množine $(0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$.
b) Ľahko sa overí, že čísla $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ sú koreňmi rovnice (22.43).
c) Predpokladajme, že platí $x < 0$, $x^2 - 5x + 6 \neq 0$. Potom $x^2 - 5x + 6 \in \mathbb{Z}$.
  c$_1$) V prípade, že číslo $x^2 - 5x + 6$ je nepárne, platí $x^{x^2-5x+6} < 0$.
  c$_2$) V prípade, že číslo $x^2 - 5x + 6$ je párne, platí

$$x^{x^2-5x+6} = |x|^{x^2-5x+6}.$$

Podobne ako v prípade a) sa ukáže, že rovnica $|x|^{x^2-5x+6} = 1$ nemá korene v množine $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$. Ľahko sa overí, že číslo $x = -1$ je koreňom rovnice (22.43).

Záver. Oborom pravdivosti rovnice (22.42) je množina

$$P = \{-1, 1, 2, 3\}.$$

Príklad 22.15. Máme zistiť, koľko reálnych koreňov má rovnica:

$$2^x = 1 + x^2. \tag{22.44}$$

Položme $f(x) = 2^x - 1 - x^2$. Potom

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - 2x$$
$$f''(x) = 2^x \cdot \ln^2 2 - 2.$$

Pretože platí:

$$f''(1) = 2 \cdot (\ln 2 - 1) \cdot (\ln 2 + 1) < 0$$
$$f''(3) = 2 \cdot (\ln 4 - 1) \cdot (\ln 4 + 1) > 0,$$

existuje také číslo $x_0 \in (1, 3)$, pre ktoré platí $f''(x_0) = 0$. Pretože funkcia $y = f''(x)$ je rastúca, pre každé $x < x_0$ platí $f''(x) < 0$ a pre každé $x > x_0$ platí $f''(x) > 0$.

Teda funkcia $y = f'(x)$ je na intervale $(-\infty, x_0\rangle$ klesajúca a na intervale $\langle x_0, \infty)$ rastúca. Odtiaľ vyplýva, že rovnica $f'(x) = 0$ môže mať najviac dva korene – po jednom na každom z intervalov $(-\infty, x_0\rangle$, $\langle x_0, \infty)$.

Pretože

$$f'(0) = \ln 2 > 0$$
$$f'(1) = 2 \cdot (\ln 2 - 1) < 0$$
$$f'(4) = 8 \cdot (\ln 4 - 1) > 0,$$

jeden koreň rovnice $f'(x) = 0$ leží v intervale $(0, 1)$ – označme ho symbolom x_1, druhý leží v intervale $(1, 4)$ – označme ho symbolom x_2.

Tým sme ukázali, že pre každé $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$ platí $f'(x) < 0$ a pre každé $x \in (x_1, x_2)$ platí $f'(x) > 0$. Funkcia $y = f(x)$ je teda klesajúca na intervale $(-\infty, x_1\rangle$, rastúca na intervale $\langle x_1, x_2\rangle$ a klesajúca na intervale $\langle x_2, \infty)$. Odtiaľ vyplýva, že rovnica $f(x) = 0$ môže mať najviac tri korene – po jednom na každom z intervalov $(-\infty, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, $\langle x_2, \infty)$.

Pretože platí $f(4) < 0$ a $f(5) > 0$, jeden koreň rovnice $f(x) = 0$ leží v intervale $(4, 5)$. Jeho približná hodnota je $x \doteq 4.257461914$.

Čísla $x = 0$ a $x = 1$ sú zrejme korene rovnice $f(x) = 0$.

Záver. Rovnica (22.44) má tri reálne korene.

Tento príklad bol použitý v matematickej súťaži (34th Putnam Exam, 1973). Založil ju Wiliam Lowel Putnam a je veľmi populárna v USA a Kanade. Záujemcom odporúčam navštíviť internetovú adresu:

`http://www.kalva.demon.co.uk/`

D1. FUNKCIE

Rovnice a nerovnice úzko súvisia s pojmom funkcie. Napríklad v nerovnici

$$\sqrt{x^2-1}\cdot(4-x)\cdot\log_3(3+x)>0 \tag{D1.1}$$

výraz $\sqrt{x^2-1}\cdot(4-x)\cdot\log_3(3+x)$ môže nadobúdať rôzne hodnoty v závislosti od toho, aké číslo dosadíme za x. Ak položíme $f(x)=\sqrt{x^2-1}\cdot(4-x)\cdot\log_3(3+x)$, potom napr. $f(1)=0$, $f(2)\doteq 5.074\,817\,134\,253$. Nie je problém presvedčiť sa, že ku každému reálnemu číslu $x\in(-3,-1\rangle\cup\langle 1,\infty)$ vieme určiť číslo $y=f(x)$.

Pod pojmom *funkcia* budeme rozumieť matematický objekt, ktorý umožňuje každému prvku x z nejakej číselnej množiny X priradiť číslo $y=f(x)$. Množinu X nazývame *definičným oborom* tejto funkcie. Funkcia je teda určená svojím definičným oborom a spôsobom priradenia čísel $y=f(x)$ prvkom x tohto definičného oboru.[41)]

Na rozdiel od pojmu funkcia[42)], ktorý je založený na možnosti vzájomného priraďovania číselných hodnôt, *výraz* chápeme ako symbolický zápis postupnosti výpočtových úkonov[43)], ktoré je potrebné vykonať v danom poradí s hodnotou argumentu (pričom argument je reprezentovaný vhodným symbolom – spravidla písmenom) a s konštantami.

Vráťme sa k nášmu ilustračnému príkladu. Funkcia určená rovnicou $y=f(x)$ má definičný obor $X=(-3,-1\rangle\cup\langle 1,\infty)$. V tomto prípade ide o množinu všetkých tých reálnych čísel x, pre ktoré sa dá hodnota $f(x)$ vypočítať (t. j. pre ktoré má výraz $f(x)$ zmysel).

---

41) Pri riešení úloh sa však stretávame s tým, že funkcia je určená rovnicou $y=f(x)$, pričom jej definičný obor určujeme ako definičný obor rovnice $y=f(x)$. Teda neurčujeme najskôr definičný obor a potom spôsob priradenia, ale postupujeme presne naopak. V prípade potreby môžeme takto určený definičný obor funkcie zúžiť. Napríklad pre funkciu $y=\frac{1}{1-x}$ určíme jej definičný obor z podmienky $x\neq 1$. Je to teda množina $X=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$. Ak však chceme vyjadriť súčet geometrického radu $1+x+x^2+x^3+x^4+\dots$ ako funkciu premennej x, potom tento súčet je určený rovnicou $y=\frac{1}{1-x}$ a definičným oborom $(-1,1)$. Je to spôsobené tým, že geometrický rad s kvocientom x konverguje práve vtedy, keď $|x|<1$. Definičný obor sme teda museli zúžiť.

42) Funkcia nemusí byť určená jediným výrazom. Napríklad pri definovaní funkcie $y=f(x)$, kde

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x} & \text{pre } x\neq 0,\\ 0 & \text{pre } x=0,\end{cases}$$

sme použili výrazy dva. Pritom spôsob priradenia funguje nasledujúcim spôsobom. Ak $x\neq 0$, číslu x priradíme hodnotu $x\cdot\sin\frac{1}{x}$. Naproti tomu v prípade, že $x=0$, číslu x priradíme hodnotu 0.

43) K výpočtovým úkonom zaraďujeme nielen sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie, ale aj nájdenie hodnôt základných elementárnych funkcií. Pritom nerozlišujeme, či sme schopní tieto úkony previesť exaktne priamym výpočtom, alebo iba približne pomocou tabuliek, kalkulačky, príp. pomocou počítača. Podstatná je iba potenciálna možnosť ich prevedenia.

V niektorých úlohách máme nájsť všetky riešenia danej rovnice/nerovnice, ktoré spĺňajú dodatočné požiadavky. Vtedy je vhodné definičný obor zúžiť. Proces riešenia úlohy sa potom spravidla zjednoduší.

Teraz sa zameriame na kompozíciu funkcií. Základná myšlienka je jednoduchá. Spočíva v tom, že za x môžeme dosadzovať aj výrazy obsahujúce x.

Začneme jednoduchým príkladom. Máme vypočítať $f(2x+3)$, kde

$$f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{x+2} + \sqrt{15-x}\,. \tag{D1.2}$$

Najskôr prepíšeme (D1.2) do iného tvaru. Pretože symbol x reprezentuje ľubovoľný prvok definičného oboru, nič nám nebráni nahradiť ho iným symbolom. Pre naše potreby bude vhodné použiť ovál.

$$f\left(\boxed{}\right) = \sqrt{4-\boxed{}} - \sqrt{\boxed{}+2} + \sqrt{15-\boxed{}}\,. \tag{D1.3}$$

Náš ovál teraz dostane meno $2x+3$.

$$f\left(\boxed{2x+3}\right) = \sqrt{4-\boxed{2x+3}} - \sqrt{\boxed{2x+3}+2} + \sqrt{15-\boxed{2x+3}}\,.$$

Zmažeme vrchné a spodné časti oválov tak, aby z nich zostali iba okrúhle zátvorky.

$$f\left(\left(2x+3\right)\right) = \sqrt{4-\left(2x+3\right)} - \sqrt{\left(2x+3\right)+2} + \sqrt{15-\left(2x+3\right)}\,.$$

Zvyšok je už iba rutinná úprava.

$$f(2x+3) = \sqrt{1-2x} - \sqrt{2x+5} + \sqrt{12-2x}. \tag{D1.4}$$

Zamyslime sa nad rovnosťou (D1.4). Ak výraz $2x+3$ interpretujeme ako funkciu určenú rovnosťou $g(x) = 2x+3$, potom ľavá strana v (D1.4) predstavuje výraz $f(g(x))$. Takto sme sa dostali k pojmu kompozície funkcií.

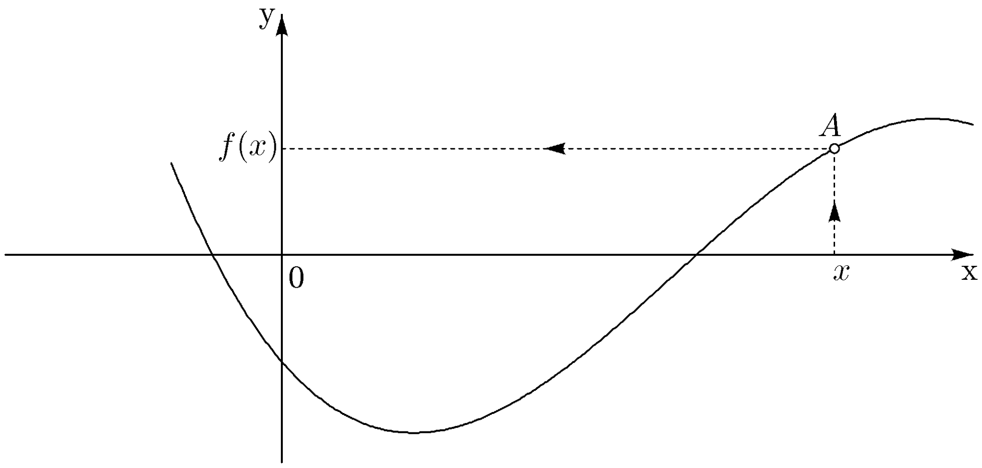
Funkcia $y = h(x)$ je *kompozíciou*[44)] funkcií $y = f(x)$ a $y = g(x)$, ak pre každé x patriace do jej definičného oboru platí $h(x) = f(g(x))$.

Pritom funkciu $y = f(x)$ voláme *vonkajšia zložka* a funkciu $y = g(x)$ voláme *vnútorná zložka* funkcie $y = f(g(x))$.

Na tomto mieste je potrebné ešte upozorniť na možné riziko špatnej interpretácie zápisu $y = f(2x+3)$, ako aj jemu podobných zápisov. Toto riziko pramení z jeho formálnej podobnosti so súčinom. Symbol f totiž neoznačuje číselnú premennú (ako sme si zvykli v algebre). Teda v (D1.4) nemôžeme namiesto f dosadiť žiadnu číselnú hodnotu (dokonca vôbec nič).

44) Používa sa aj názov *zložená funkcia*.

Teraz sa zameriame na grafické znázornenie funkcií. Grafy najčastejšie kreslíme v pravouhlej súradnicovej sústave v rovine.



Obr. D1.1

Grafom funkcie je spravidla krivka. Súradnice ľubovoľného bodu $A[x, y]$ ležiaceho na tejto krivke sú reálne čísla x a y, ktoré sú určené touto funkciou. Číslo x musí ležať v jej definičnom obore a číslo y je jednoznačne určené priradením $y = f(x)$.

Pokúste sa vnímať predchádzajúci obrázok dynamicky. Predstavte si[45)], že bod A sa pohybuje po krivke a sledujte, ako sa menia jeho súradnice x a $f(x)$. Všímajte si, pre ktoré x sú im odpovedajúce súradnice $f(x)$ kladné, záporné, príp. nulové.

Priesečníky grafu funkcie $y = f(x)$ s osou x znázorňujú riešenia rovnice $f(x) = 0$. Skutočne, bod $A[x, f(x)]$ leží na osi x práve vtedy, keď jeho y-ová súradnica je rovná nule, t. j. keď $f(x) = 0$. Riešenia rovnice $f(x) = 0$ sú teda x-ové súradnice týchto priesečníkov.

Body grafu funkcie $y = f(x)$ ležiace nad osou x znázorňujú riešenia nerovnice $f(x) > 0$. Skutočne, bod $A[x, f(x)]$ leží nad x-ovou osou práve vtedy, keď jeho y-ová súradnica je kladná, t. j. keď $f(x) > 0$. Riešenia nerovnice $f(x) > 0$ sú teda x-ové súradnice takýchto bodov. Predstavte si, že bod A sa postupne pohybuje po tej časti krivky, ktorá leží nad osou x. Potom x-ová súradnica bodu A postupne vykresľuje obor pravdivosti nerovnice $f(x) > 0$. Spravidla takto dostaneme interval, prípadne niekoľko intervalov (ležiacich na osi x).

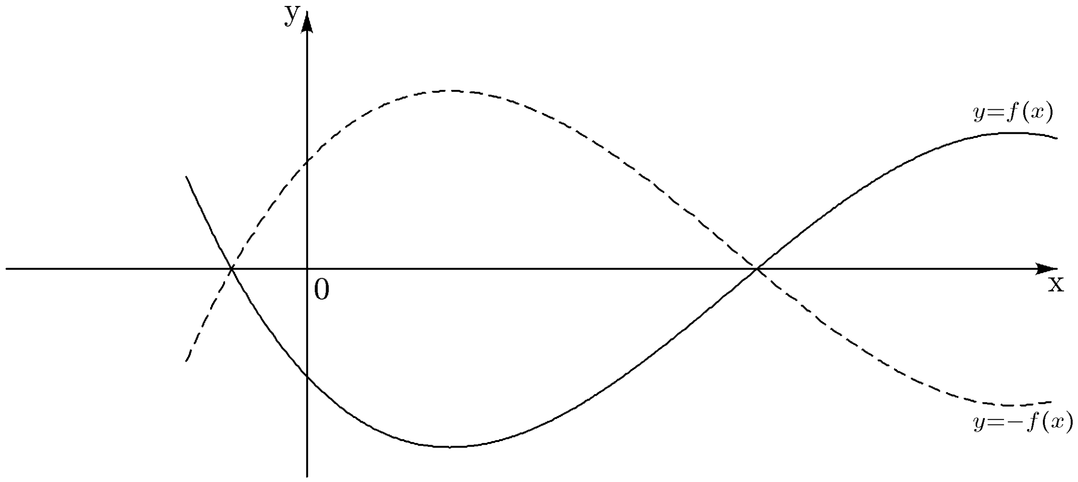
Pre nerovnicu $f(x) < 0$ si to premyslite samostatne.

Teraz sa naučíme pracovať s grafmi funkcií. Budeme predpokladať, že máme

[45)] Uvedomte si, že pri grafickom znázorňovaní zapájame našu predstavivosť neustále, len si to často ani neuvedomujeme. Napríklad nemôžeme nakresliť celú priamku, ale len jej časť. Každá priamka sa však dá ľubovoľne predĺžiť na obidve strany. Vieme si teda predstaviť, ako pokračuje ďalej.

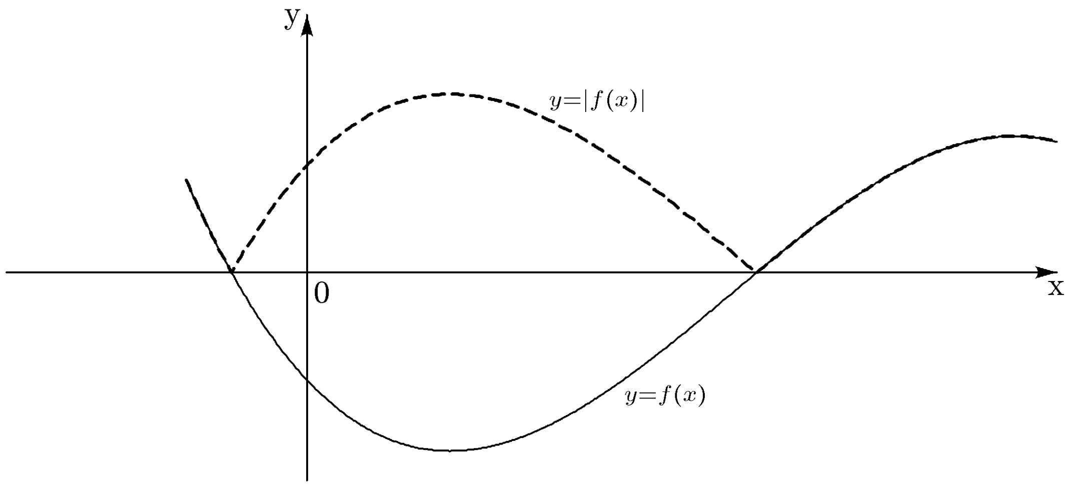
k dispozícii graf funkcie $y = f(x)$. Spravidla to bude graf jednej zo základných elementárnych funkcií. Teraz sa naučíme pomocou grafu funkcie $y = f(x)$ zostrojovať grafy ďalších funkcií.

Graf funkcie $y = -f(x)$ získame preklopením grafu funkcie $y = f(x)$ okolo osi x. (Pozri Obr. D1.2.)



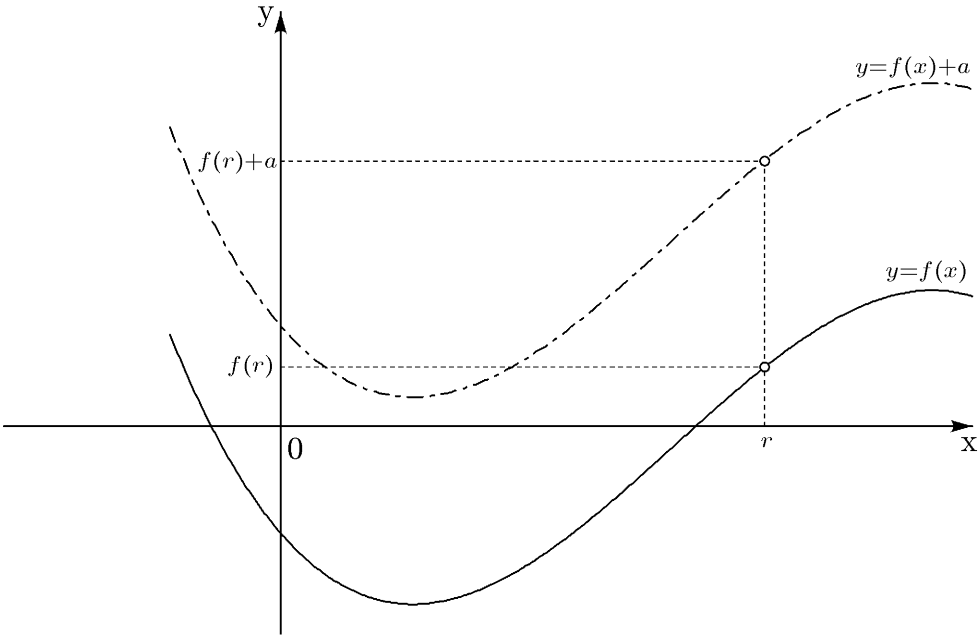
Obr. D1.2

Graf funkcie $y = |f(x)|$ získame preklopením okolo x-ovej osi tej časti grafu funkcie $y = f(x)$, ktorá leží pod x-ovou osou. (Pozri Obr. D1.3.)



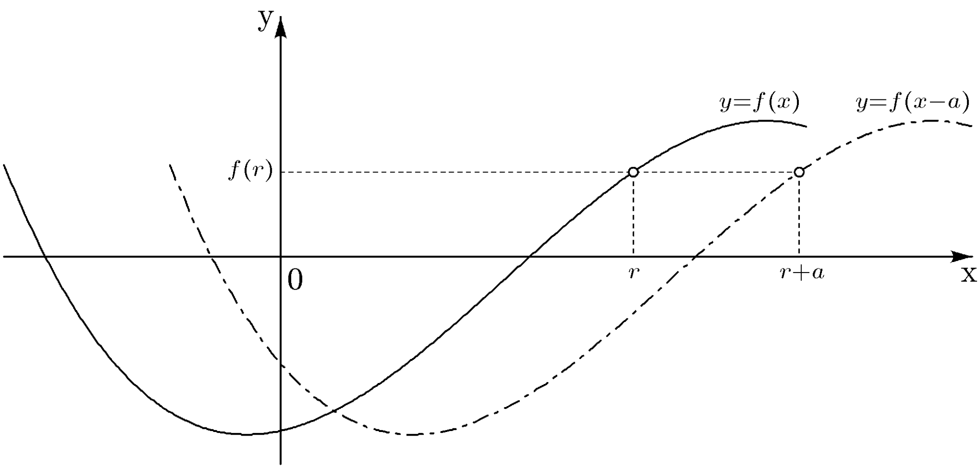
Obr. D1.3

Graf funkcie $y = f(x) + a$ získame posunutím grafu funkcie $y = f(x)$ v smere y-ovej osi o konštantu a. (Pozri Obr. D1.4.)



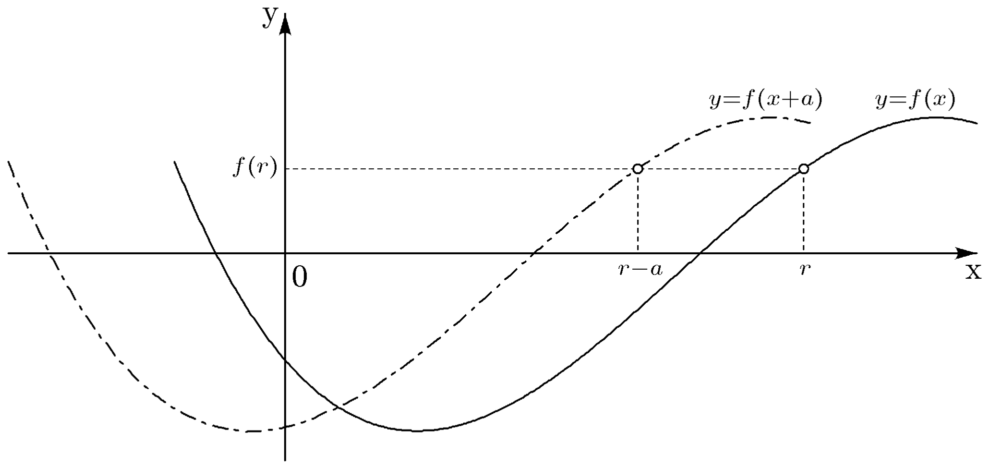
Obr. D1.4

Graf funkcie $y = f(x - a)$ získame posunutím grafu funkcie $y = f(x)$ v smere x-ovej osi o konštantu a. (Pozri Obr. D1.5.)



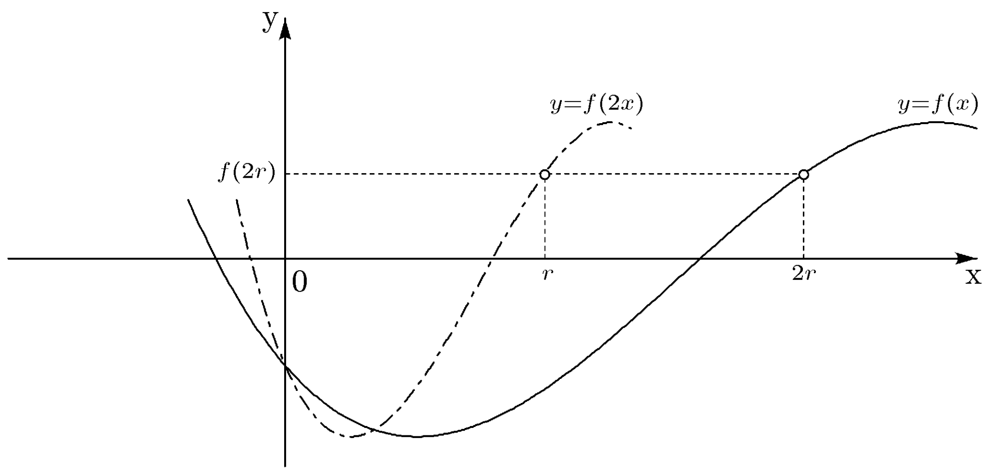
Obr. D1.5

Graf funkcie $y = f(x + a)$ získame posunutím grafu funkcie $y = f(x)$ v smere x-ovej osi o konštantu $-a$. (Pozri Obr. D1.6.)



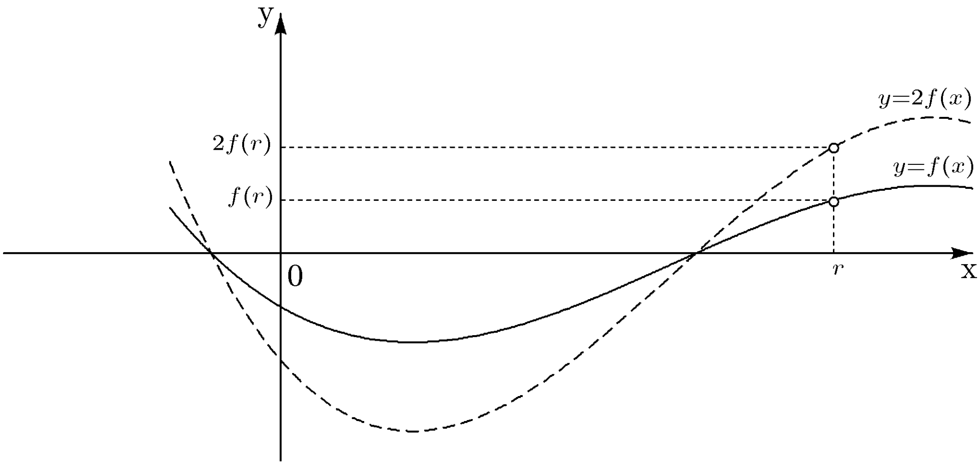
Obr. D1.6

Grafy ďalších funkcií môžeme dostať pomocou vhodnej deformácie. Na ilustráciu si ukážme graf funkcie $y = f(2x)$, ktorý získame „stlačením“ grafu funkcie $y = f(x)$ v smere x-ovej osi. (Pozri Obr. D1.7.)



Obr. D1.7

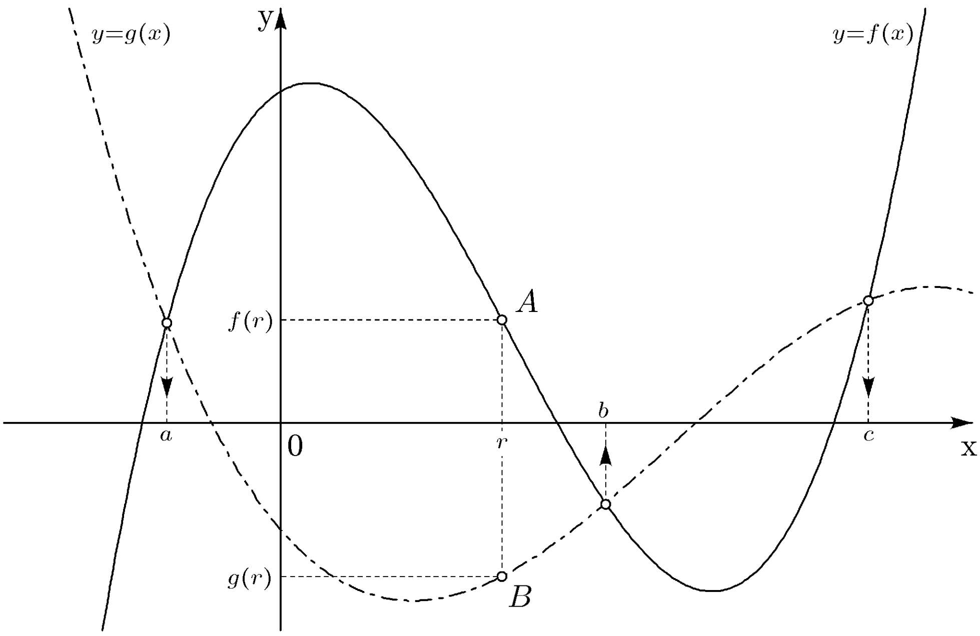
Podobným spôsobom môžeme dostať graf funkcie $y = 2f(x)$. (Pozri Obr. D1.8.)



Obr. D1.8

Graf inverznej funkcie získame preklopením okolo priamky $y = x$ (pozri Obr. 12.4).

Prejdeme k zložitejšej úlohe. Máme riešiť v obore všetkých reálnych čísel rovnicu $f(x) = g(x)$. Grafická analýza je veľmi podobná ako pri rovnici $f(x) = 0$, iba úlohu x-ovej osi teraz prevezme graf funkcie $y = g(x)$. Takáto situácia je znázornená na Obr. D1.9.



Obr. D1.9

Priesečníky grafov funkcií $y = f(x)$ a $y = g(x)$ určujú potom obor pravdivosti rovnice $f(x) = g(x)$. Je to množina x-ových súradníc týchto priesečníkov.

Pri riešení nerovnice $f(x) > g(x)$ postupujeme podobným spôsobom. Teraz si všímame tie čísla r na x-ovej osi, pre ktoré hodnoty $f(r)$ sú väčšie ako hodnoty $g(r)$, t. j. pre ktoré bod $A[r, f(r)]$ leží nad bodom $B[r, g(r)]$. Čiže pozeráme sa, kde graf funkcie $y = f(x)$ leží nad grafom funkcie $y = g(x)$.

Na kreslenie grafov funkcií odporúčam používať program `gnuplot`. Nájdete ho na adrese[46)]

`http://www.gnuplot.info`

Na záver odcitujeme z manuálu: „Gnuplot is a free command-line driven interactive function and data plotting program. Gnuplot can be run under DOS, Windows, Macintosh OS, VMS, Linux, and many others. It is very easy to use, yet it is very powerful. It can produce several different kinds of plots with many options for customizing them, and can send the result to a wide range of graphic devices (graphics terminals, printers, or plotters)."

[46)] Stručný návod v slovenčine nájdete na adrese `http://www.tuke.sk/dobos/g.pdf` .

D2. SPOJITOSŤ

Intuitívne sa pod spojitosťou funkcie v bode x_0 rozumie skutočnosť, že bodom x ležiacim blízko bodu x_0 sú priradené body $f(x)$ ležiace blízko bodu $f(x_0)$.

Na vyjadrenie blízkosti potrebujeme vedieť merať vzdialenosť. Začneme vzdialenosťou bodov na reálnej osi. K jej meraniu potrebujeme absolútnu hodnotu. Totiž vzdialenosť bodu x od bodu t vypočítame ako číslo $|x - t|$. Skutočne, ak $x \geqq t$, potom ich vzdialenosť je vyjadrená číslom $x - t$. Naproti tomu, ak $x < t$, potom ich vzdialenosť je vyjadrená číslom $t - x$. A tieto dve situácie sa dajú spojiť do jednej práve pomocou absolútnej hodnoty.

Teraz si vysvetlíme, ktoré množiny sú blízke danému bodu. Najskôr ošetríme triviálny prípad. Ak nejaká množina T obsahuje daný bod t_0, potom prehlásime, že je tomuto bodu blízka. V ďalšom budeme predpokladať, že množina T neobsahuje bod t_0. Zamyslime sa nad nasledujúcou situáciou. Otvorený interval síce neobsahuje svoje krajné body, ale obsahuje body, ktoré ležia k nim ľubovoľne blízko. Iný vhodný ilustračný príklad poskytuje množina T prevrátených hodnôt všetkých prirodzených čísel[47)], ktorá je blízka bodu $t_0 = 0$. Matematicky precízne vyjadrenie pojmu „blízko" dáva nasledujúca formulácia:

Ak vezmeme ľubovoľne malé kladné reálne číslo r, v množine T je možné nájsť taký bod t, ktorého vzdialenosť od bodu t_0 je menšia ako r.

Pomocou kvantifikátorov to môžeme vyjadriť nasledujúcim spôsobom:

Množina $T \neq \emptyset$ je blízka[48)] *danému bodu t_0, ak $\forall\, r > 0\ \exists\, t \in T : |t - t_0| < r$.*

Funkcia $y = f(x)$ priradí každému číslu s z jej definičného oboru číslo $f(s)$. Toto priraďovanie môžeme rozšíriť aj na množiny čísel. Predpokladajme, že množina T je časťou definičného oboru funkcie $y = f(x)$. Funkcia $y = f(x)$ priradí množine T množinu

$$f[T] = \{f(t);\ t \in T\}.$$

Teraz už máme vybudované všetky nástroje potrebné k vysloveniu korektnej definícii spojitosti.

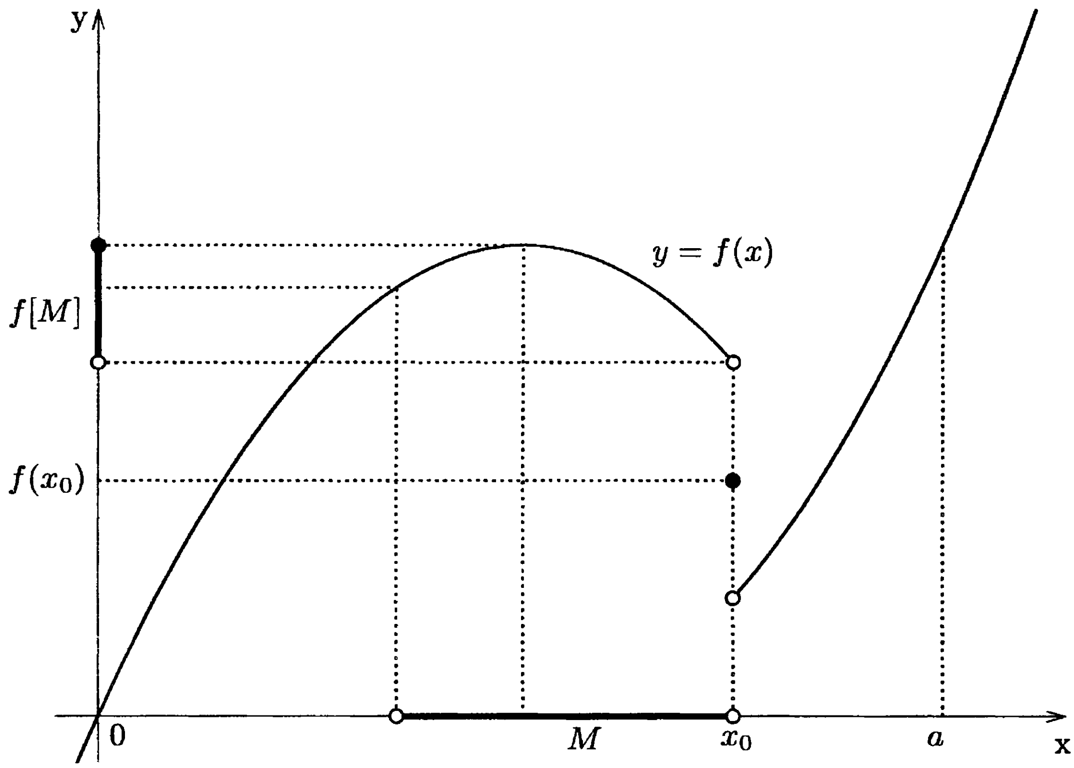
Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je spojitá v bode x_0, ak pre ľubovoľnú neprázdnu množinu M, ktorá je časťou definičného oboru funkcie $y = f(x)$, platí:
Ak množina M je blízka bodu x_0, potom množina $f[M]$ je blízka bodu $f(x_0)$.

Dá sa ukázať, že ľubovoľná elementárna funkcia je spojitá v každom bode svojho definičného oboru.

47) Symbolicky ju môžeme zapísať v tvare $T = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$.
48) V topologickej terminológii to znamená, že bod t_0 patrí do uzáveru množiny T.

Poznamenajme, že vyššie uvedená definícia spojitosti funkcie je ekvivalentná s definíciami bežne používanými v učebniciach.

Pozrite si nasledujúci obrázok. V tomto prípade sme za množinu M vzali otvorený interval. Množina M je blízka bodu x_0, ale množina $f[M]$ nie je blízka bodu $f(x_0)$. Z tohto dôvodu funkcia $y = f(x)$ nie je v tomto bode spojitá.



Obr. D2.1

Všimnime si ďalšiu zaujímavú vlastnosť funkcie $y = f(x)$, ktorej graf je znázornený na predchádzajúcom obrázku. Táto funkcia je rastúca na otvorenom intervale (x_0, a), ale pridaním jediného bodu x_0 sa táto vlastnosť naruší. Skutočne, funkcia $y = f(x)$ nie je rastúca na intervale $\langle x_0, a)$. Je to spôsobené práve nespojitosťou.

Platí totiž nasledujúce tvrdenie.[49)]

Ak funkcia $y = f(x)$ je spojitá v bode x_0 a rastúca/klesajúca na intervale $(x_0. a)$, potom je rastúca/klesajúca na intervale $\langle x_0, a)$.

Napriek svojej jednoduchosti je tento fakt užitočný pri hľadaní intervalov monotónnosti pomocou derivácie. Ak totiž na intervale I platí $f'(x) > 0$, potom je funkcia $y = f(x)$ rastúca na tomto intervale. Opačné tvrdenie však neplatí. Napríklad funkcia $y = x^2$ je rastúca na intervale $\langle 0, \infty)$, ale jej derivácia v bode $x = 0$ je rovná nule. Ako teda dokážeme pomocou derivácie, že táto funkcia je rastúca na intervale $\langle 0, \infty)$? Postupujeme v dvoch krokoch. V prvom kroku pomocou derivácie

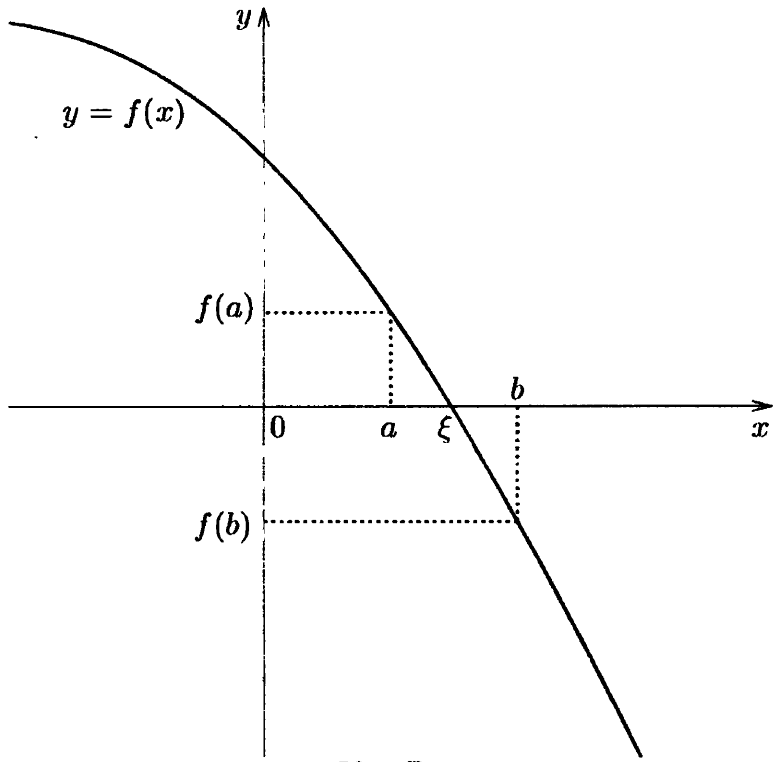
49) Analogické tvrdenie platí aj pre interval (a, x_0).

nájdeme otvorený interval, na ktorom je daná funkcia rastúca.[50] V druhom kroku využijeme spojitosť, čo nám umožní rozšíriť tvrdenie o rastúcosti danej funkcie na interval $\langle 0, \infty)$.

Dokonca v bode x_0 daná funkcia vôbec nemusí mať deriváciu. Napr. funkcia $y = 2x - |x-1|$ je rastúca na intervale $(-\infty, \infty)$. Pretože je spojitá a na intervale $(1, \infty)$ platí $y' = 1 > 0$, je rastúca na intervale $\langle 1, \infty)$. Pretože je spojitá a na intervale $(-\infty, 1)$ platí $y' = 3 > 0$, je rastúca na intervale $(-\infty, 1\rangle$. Potom už len stačí využiť skutočnosť, že intervaly $(-\infty, 1\rangle$ a $\langle 1, \infty)$ majú spoločný bod. Pritom táto funkcia nemá deriváciu v bode $x_0 = 1$.

Zo spojitosti funkcie $y = f(x)$ vyplýva (za istých predpokladov) existencia koreňa rovnice $f(x) = 0$. Presnú formuláciu nám dáva nasledujúce tvrdenie.

Bolzanova veta. *Nech funkcia $y = f(x)$ je spojitá na intervale $\langle \alpha, \beta\rangle$. Nech čísla $f(\alpha)$ a $f(\beta)$ sú nenulové a majú opačné znamienka. Potom v intervale (α, β) leží aspoň jedno také číslo ξ, pre ktoré platí $f(\xi) = 0$.*



Obr. D2.2

[50] Pretože $y' = 2x > 0$ pre každé $x > 0$, funkcia $y = x^2$ je rastúca na intervale $(0, \infty)$.

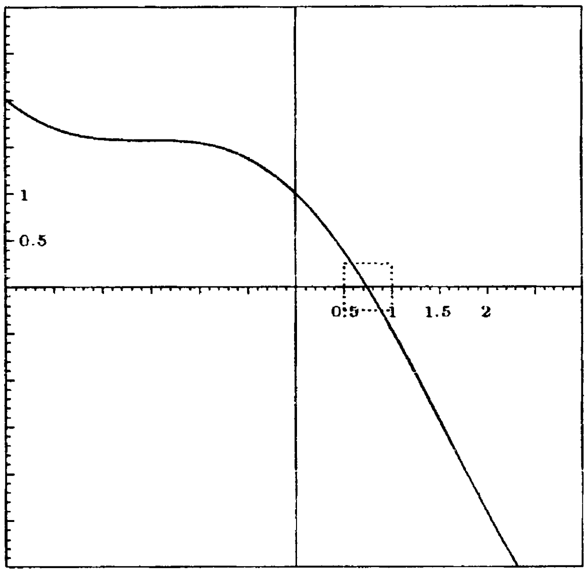
Bolzanovu vetu tiež používame pri numerickom riešení rovníc. Napríklad na riešenie rovnice

$$\cos x = x \tag{D2.1}$$

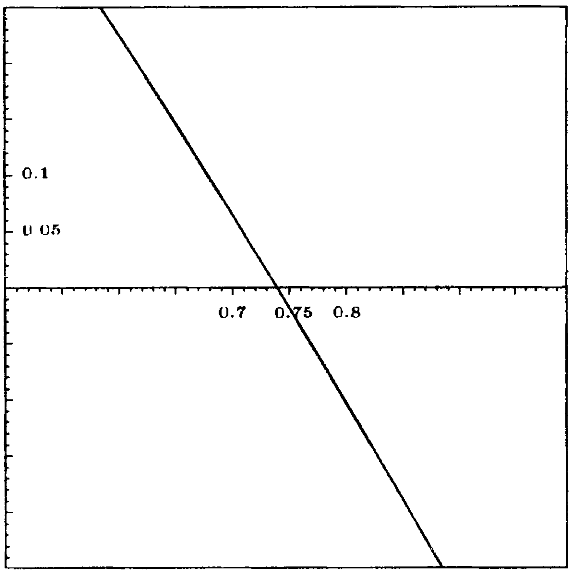
neexistuje nijaký vzorec. Položme

$$f(x) = \cos x - x. \tag{D2.2}$$

Zrejme funkcia $y = f(x)$ je spojitá. Pretože $f(0) > 0$, $f(\frac{\pi}{2}) < 0$, podľa Bolzanovej vety v intervale $(0, \frac{\pi}{2})$ leží aspoň jeden koreň rovnice $f(x) = 0$. Nakreslime si graf funkcie $y = \cos x - x$. Ako vidíme na obrázku D2.3a, hľadaný koreň leží medzi číslami 0.7 a 0.8. Ak zväčšíme naznačený výrez (pozri obr. D2.3b), môžeme získať lepšiu aproximáciu tohto koreňa: $x \doteq 0.74$.



Obr. D2.3a



Obr. D2.3b

Pomocou výpočtovej techniky vieme určiť väčší počet desatinných miest. Napr. nasledujúca hodnota bola vypočítaná pomocu programu X(PLORE):

$$x \doteq 0.739\,085\,133\,215\,160\,641\,655\,312\,087\,673\,873\,404\,013\,411\,758\,900\,757$$
$$464\,965\,680\,635\,773\,284\,654\,883\,547\,594\,599\,376\,106\,931\,766\,531\,849\,801\,.$$

Autorom programu X(PLORE) je prof. David Meredith (San Francisco State University). Nájdete ho na adrese:

`http://online.sfsu.edu/~meredith/X(PLORE)/xplorepg.html`

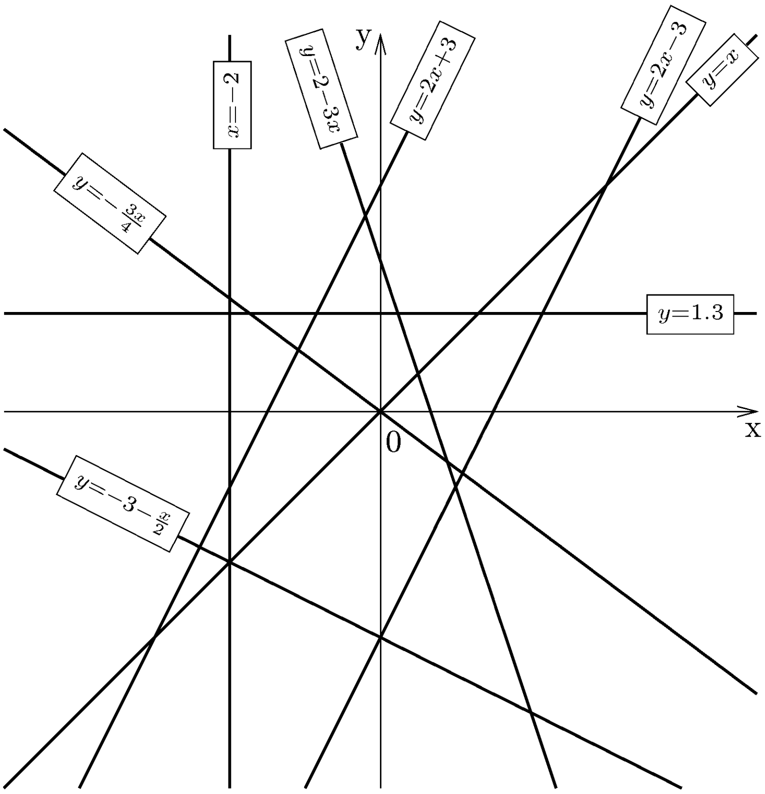
Niektoré užitočné cvičenia riešené pomocou X(PLORE) nájdete na adrese:

`http://www.humboldt.edu/~ky1/xpl/xpl.htm`

D3. Základné elementárne funkcie

Lineárna funkcia.

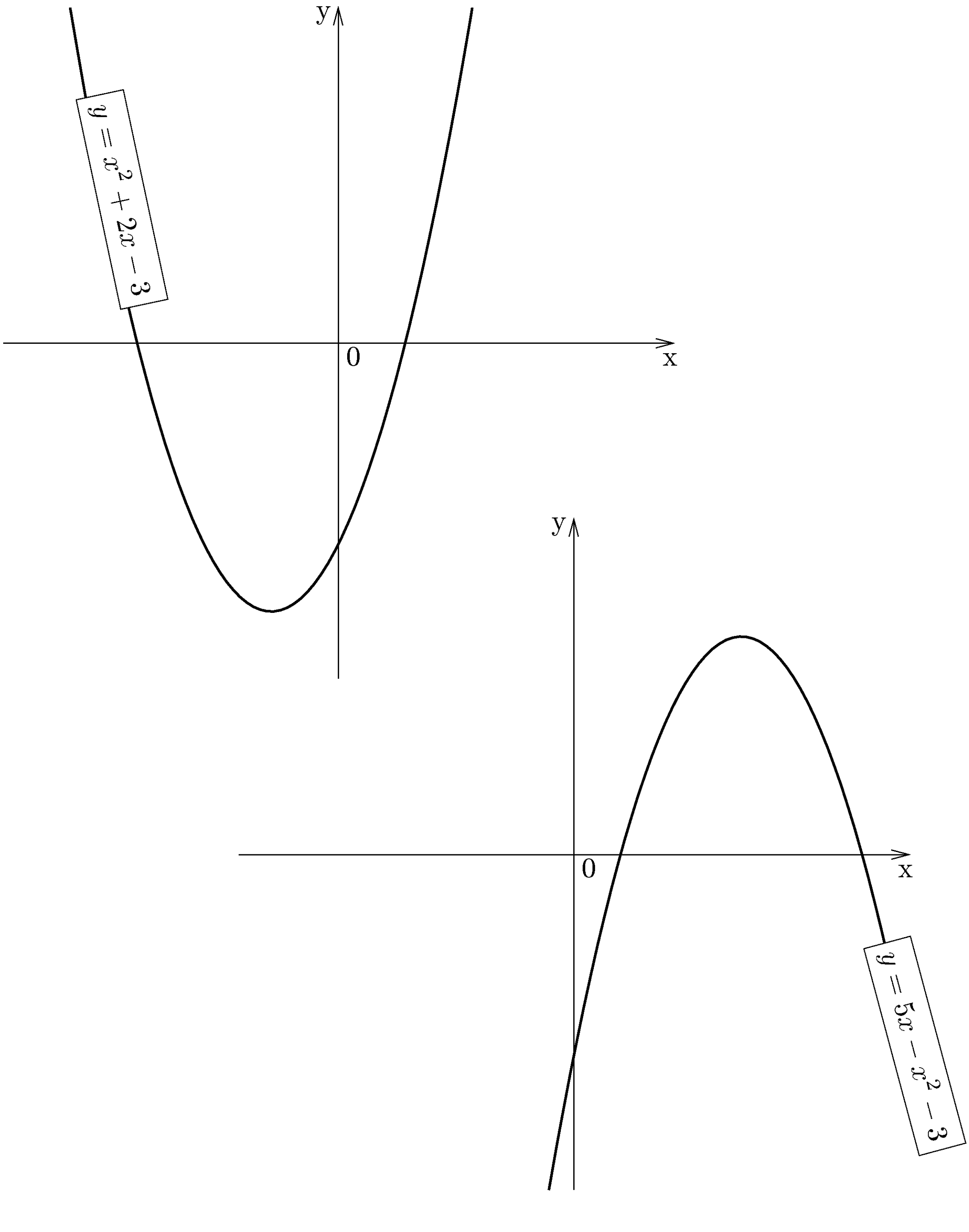
Lineárna funkcia je určená predpisom $y = kx+q$ pre každé reálne číslo x. Grafom lineárnej funkcie je priamka.[51]) Ak $k > 0$, lineárna funkcia je rastúca. Ak $k < 0$, lineárna funkcia je klesajúca. V prípade, že platí $k = 0$, dostávame *konštantnú funkciu.*



[51]) Avšak nie každá priamka je grafom funkcie. Ide konkrétne o priamky rovnobežné s y-ovou osou. Možno ich vyjadriť predpisom $x = c$, kde c je reálna konštanta.

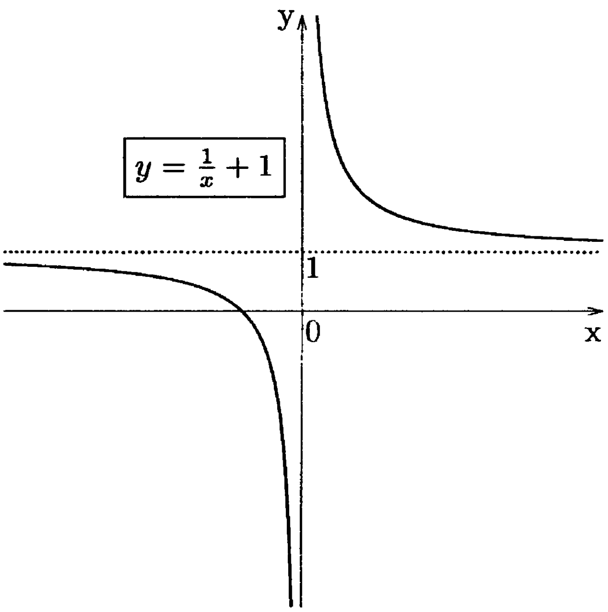
Kvadratická funkcia.

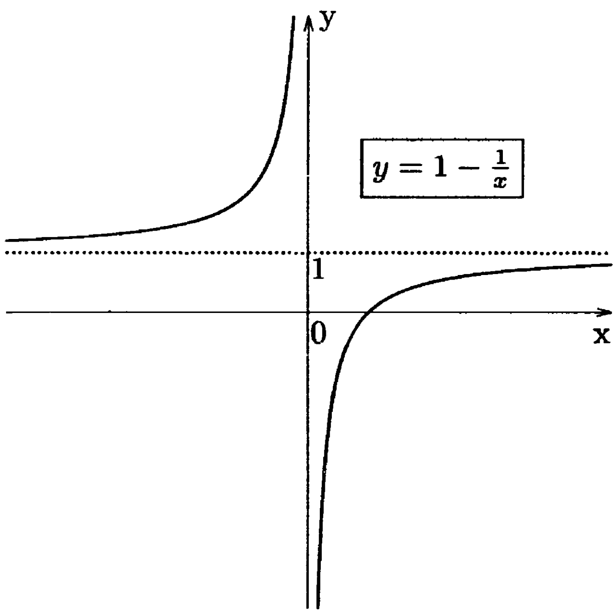
Kvadratická funkcia je určená predpisom $y = ax^2+bx+c$ pre každé reálne číslo x, pričom predpokladáme, že $a \neq 0$. Ak $a > 0$, grafom kvadratickej funkcie je parabola, ktorá je orientovaná tak, že kvadratická funkcia nadobúda svoju najmenšiu hodnotu práve vo vrchole tejto paraboly. Ak $a < 0$, grafom kvadratickej funkcie je parabola, ktorá je orientovaná tak, že kvadratická funkcia nadobúda svoju najväčšiu hodnotu práve vo vrchole tejto paraboly.



Hyperbolická funkcia.

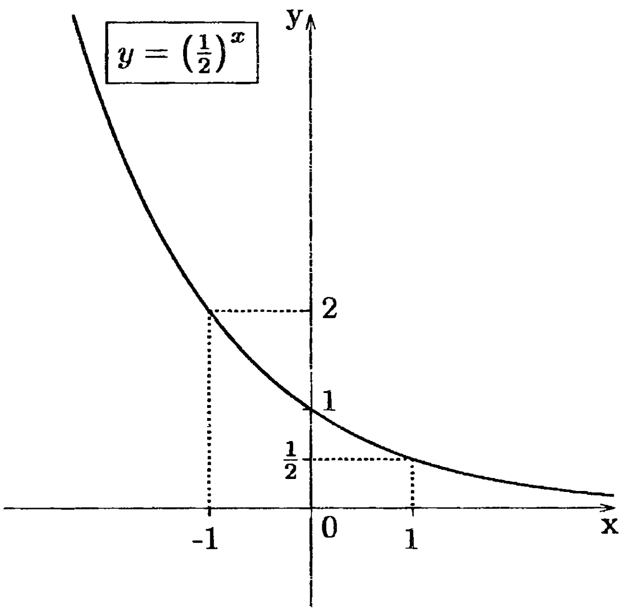
Hyperbolická funkcia je určená predpisom $y = \frac{a}{x} + b$ pre každé reálne číslo $x \neq 0$, pričom predpokladáme, že $a \neq 0$. Ak $a > 0$, grafom hyperbolickej funkcie je hyperbola, ktorá je orientovaná tak, že hyperbolická funkcia je klesajúca na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Ak $a < 0$, grafom hyperbolickej funkcie je hyperbola, ktorá je orientovaná tak, že hyperbolická funkcia je rastúca na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. V obidvoch prípadoch je oborom hodnôt hyperbolickej funkcie zjednotenie dvoch intervalov: $(-\infty, b) \cup (b, \infty)$.

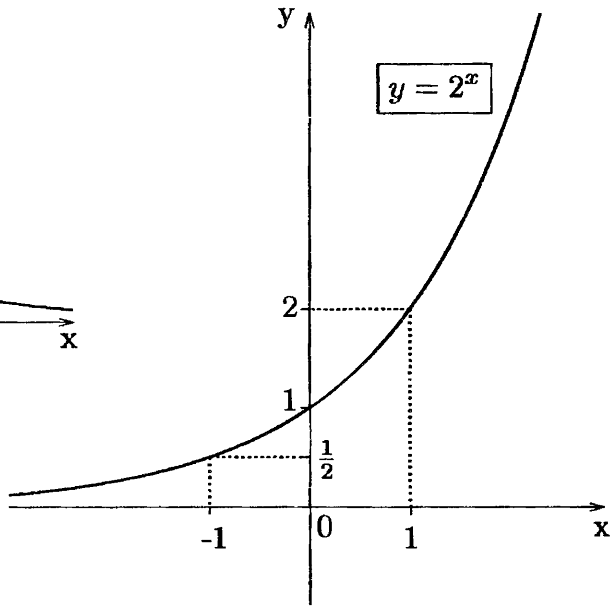




Exponenciálna funkcia.

Exponenciálna funkcia je určená predpisom $y = a^x$ pre každé reálne číslo x, pričom predpokladáme, že $a > 0$, $a \neq 1$. Ak $0 < a < 1$, exponenciálna funkcia je klesajúca. Ak $a > 1$, exponeciálna funkcia je rastúca.





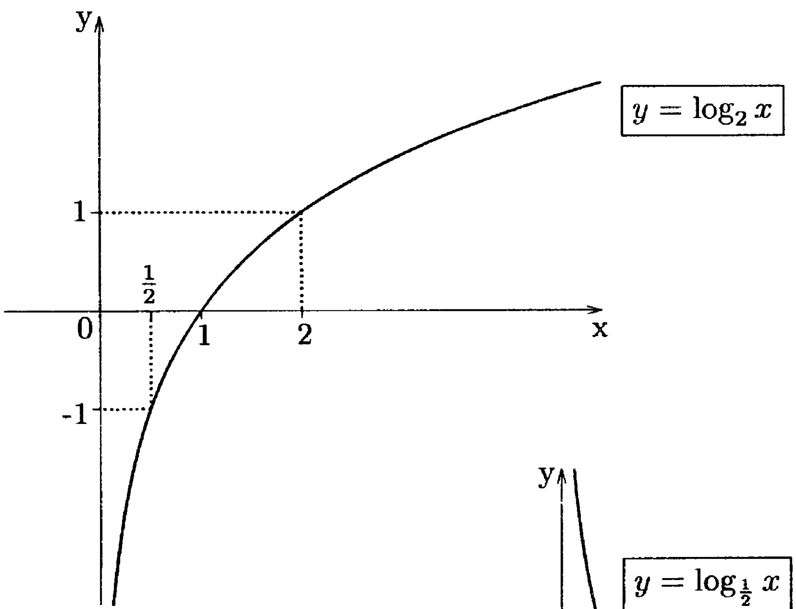
Základné vzorce.

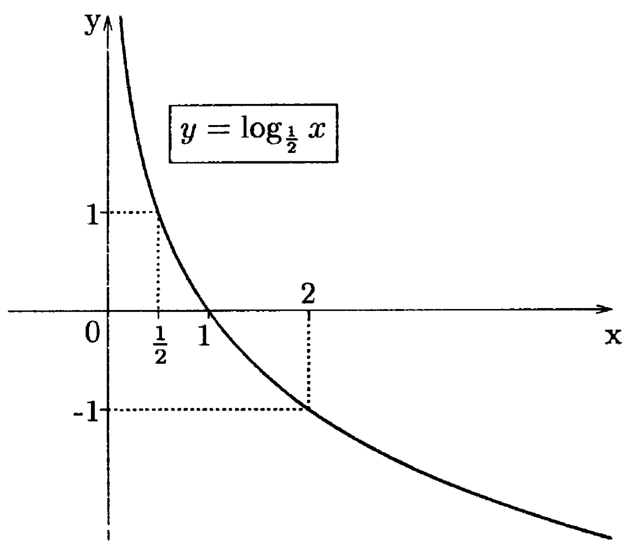
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad a^0 = 1$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Logaritmická funkcia.

Logaritmická funkcia je určená predpisom $y = \log_a x$ pre každé kladné reálne číslo x, pričom predpokladáme, že $a > 0$, $a \neq 1$. Ak $0 < a < 1$, logaritmická funkcia je klesajúca. Ak $a > 1$, logaritmická funkcia je rastúca.





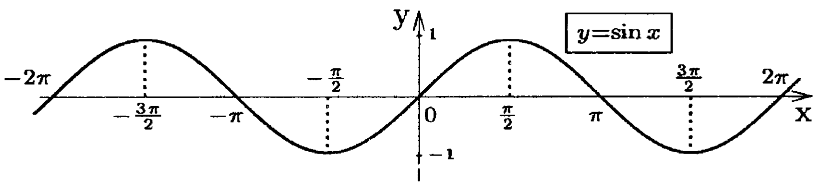
Základné vzorce.

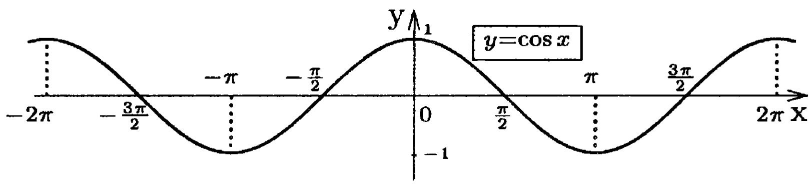
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

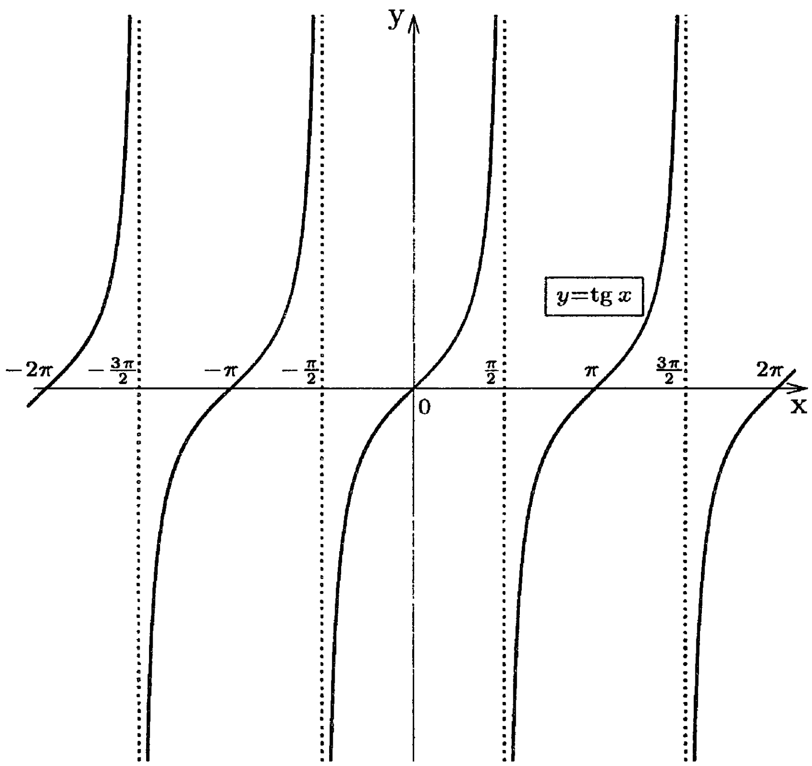
$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x \qquad \log_a x = \frac{\log_y x}{\log_y a}$$

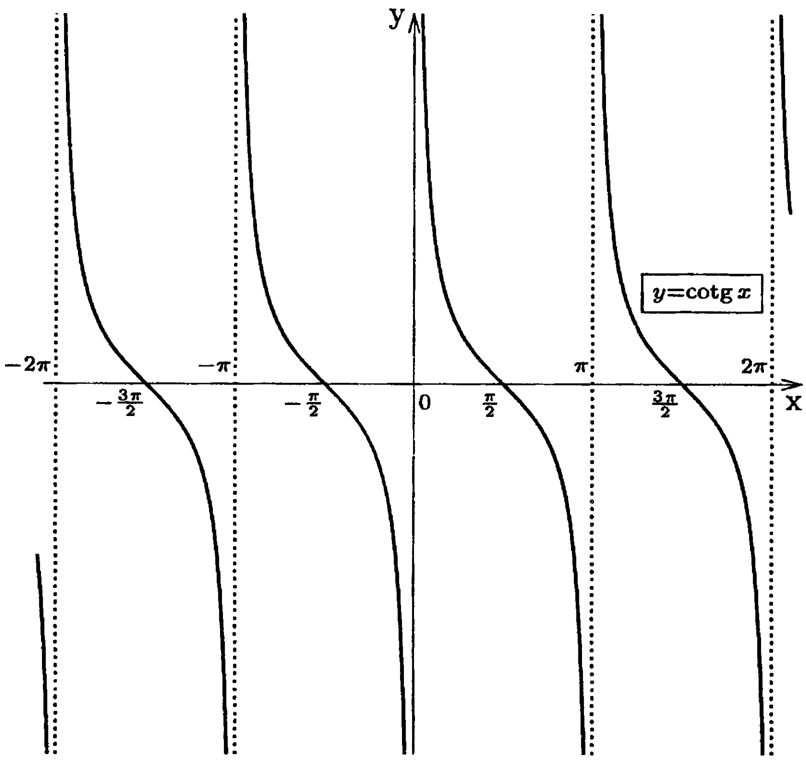
$$\log_a b = \log_{a^r} b^r \qquad \log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

Goniometrické funkcie.









Mnemotechnická pomôcka. (Spracované podľa časpoisu Kvant 1984, č. 1, str. 41.)

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Základné goniometrické vzorce.

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \tfrac{x+y}{2} \cdot \cos \tfrac{x-y}{2} \qquad \cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \tfrac{x+y}{2} \cdot \cos \tfrac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \tfrac{x+y}{2} \cdot \sin \tfrac{x-y}{2} \qquad \cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \tfrac{x+y}{2} \cdot \sin \tfrac{x-y}{2}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)] \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)] \qquad \sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)] \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

D4. Korene polynómov

Predpokladajme, že máme polynóm n-tého stupňa s reálnymi koeficientami

$$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \tag{D8.1}$$

kde $a_0 \neq 0$.

Polynóm $p_n(x)$ je možné jednoznačne vyjadriť (až na poradie činiteľov) v tvare:

$$p_n(x) = a_0 \cdot (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{k_m}, \tag{D8.2}$$

kde komplexné čísla $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sú navzájom rôzne korene polynómu $p_n(x)$ a prirodzené čísla $k_1, k_2, \ldots, k_m$ sú ich násobnosti, pričom platí $k_1+k_2+\cdots+k_m = n$. Teda polynóm $p_n(x)$ má presne n koreňov (riešení rovnice $p_n(x) = 0$) v komplexnom obore (ak počítame aj ich násobnosť).

Explicitné vzorce.

- Polynóm $p_1(x) = a_0x + a_1$ má koreň $x_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}$.
- Polynóm $p_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ má korene $x_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$.
- Korene polynómu $p_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ môžeme vyjadriť pomocou Cardanových vzorcov (str. 15).
- Korene polynómu $p_4(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ tiež možno vyjadriť pomocou vzorcov[52)]. Pre svoju komplikovanosť však majú len teoretický význam, nie sú vhodné pre praktické počítanie. Z tohto dôvodu ich neuvádzame. V prípade záujmu si ich môžete vyhľadať v literatúre[53)]. Spôsob riešenia je naznačený v príklade 12.2.
- Pre $n \geqq 5$ bolo dokázané, že takéto vzorce nemôžu existovať.

Polynómy s celočíselnými koeficientami.

Budeme predpokladať, že všetky koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú celé čísla, pričom a_0 a a_n sú rôzne od nuly[54)]. Pre polynómy s celočíselnými koeficientami platí nasledujúce tvrdenie:

Ak k je celočíselný koreň polynómu $p_n(x)$, potom číslo k je deliteľom čísla a_n.

Tento poznatok nám dovoľuje nájsť všetky celočíselné korene polynómu $p_n(x)$. Stačí urobiť skúšku správnosti pre všetky celočíselné delitele čísla a_n. Pri počítaní hodnôt polynómu $p_n(x)$ s výhodou používame Hornerovu schému.

Ďalšie podrobnosti sú vysvetlené v kapitole 5.

---

52) Ich autorom je Cardanov žiak Lodovico Ferrari.

53) Schwarz, Š.: Základy náuky o riešení rovníc, Vydavateľstvo SAV, Bratislava,1967.

54) Premyslite si, ako môžeme znížiť stupeň rovnice $p_n(x) = 0$ v prípade, že platí $a_n = 0$.

D5. Hornerova schéma

V tomto dodatku si vysvetlíme efektívny algoritmus na výpočet hodnôt polynómu. Na rozdiel od klasického výpočtu vyžaduje iba polovičný počet násobení.

Začneme jednoduchým príkladom. Polynóm $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ môžeme zapísať nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} f(x) &= 7x^3 + 2x^2 - 3x + 5 = \\ &= x \cdot (7x^2 + 2x - 3) + 5 = \\ &= x \cdot (x \cdot (7x + 2) - 3) + 5. \end{aligned}$$

Polynóm $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ prepíšeme do tvaru:

$$f(x) = x \cdot (\ldots x \cdot (x \cdot (x \cdot a_0 + a_1) + a_2) + \cdots + a_{n-1}) + a_n.$$

Pre dané číslo $x = r$ postupne vypočítame čísla

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \\ c_1 &= r \cdot c_0 + a_1 \\ c_2 &= r \cdot c_1 + a_2 \\ &\vdots \\ c_n &= r \cdot c_{n-1} + a_n. \end{aligned}$$

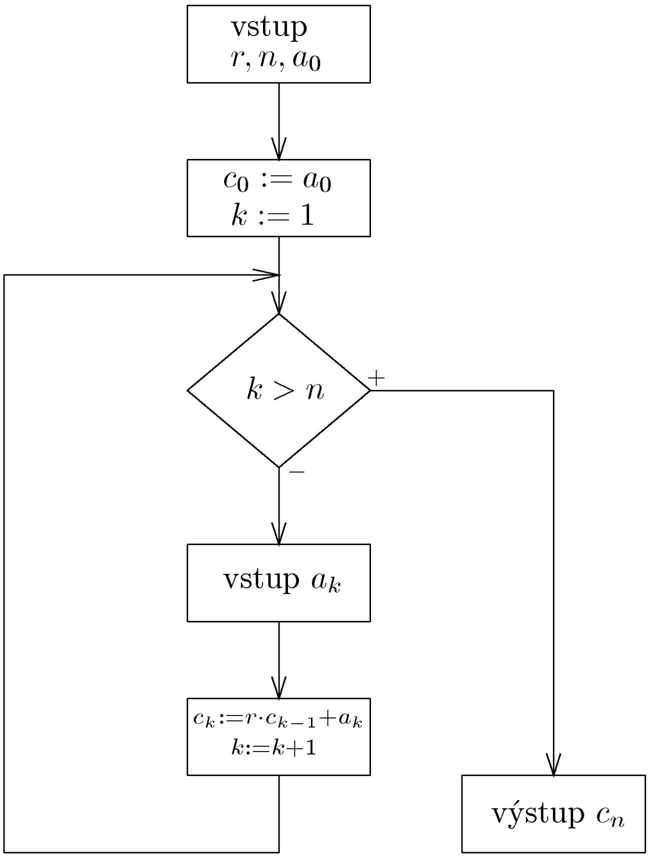
Potom $f(r) = c_n$.

Napríklad pre polynóm $f(x) = x^3 + 2x - 5$ a pre $r = 2$ máme

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 & c_0 &= a_0 = 1 \\ a_1 &= 0 & c_1 &= r \cdot c_0 + a_1 = 2 \cdot 1 + 0 = 2 \\ a_2 &= 2 & c_2 &= r \cdot c_1 + a_2 = 2 \cdot 2 + 2 = 6 \\ a_3 &= -5 & c_3 &= r \cdot c_2 + a_3 = 2 \cdot 6 - 5 = 7. \end{aligned}$$

Teda $f(2) = c_3 = 7$.

Hornerov algoritmus môžeme zapísať do nasledujúceho vývojového diagramu.



Ukážeme si, ako možno uvedený postup pomocou Hornerovej schémy efektívne zmechanizovať. Postupujeme v troch riadkoch. Prvý riadok obsahuje všetky koeficienty daného polynómu $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$. Do tretieho riadku najskôr opíšeme číslo a_0. Označíme ho symbolom c_0.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
 & 1 & 0 & 2 & -5 \\
r = 2 & \downarrow & 2 & 4 & 12 \\
\hline
 & 1 & 2 & 6 & 7 \\
 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3
\end{array}$$

Potom vynásobíme číslo c_0 číslom r a výsledok zapíšeme do druhého riadku pod číslo a_1. Čísla v tomto stĺpci sčítame a výsledok zapíšeme do tretieho riadku. Označíme ho symbolom c_1. Postup opakujeme. Vynásobíme číslo c_1 číslom r a výsledok zapíšeme pod číslo a_2. Čísla v tomto stĺpci sčítame a výsledok zapíšeme do tretieho riadku. Označíme ho symbolom c_2. Postup opakujeme. Vynásobíme číslo c_2 číslom r a výsledok zapíšeme pod číslo a_3. Čísla v tomto stĺpci sčítame a výsledok zapíšeme do tretieho riadku. Označíme ho symbolom c_3. V treťom riadku máme čísla c_0, c_1, c_2 a c_3. Čísla c_0, c_1 a c_2 sú koeficienty čiastočného podielu, ktorým je polynóm $c_0x^2 + c_1x + c_2$. Číslo $c_3 = f(r)$ je zvyšok, ktorý dostaneme pri delení polynómu $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ dvojčlenom $x - r$.

Teda platí:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = (c_0x^2 + c_1x + c_2) \cdot (x - r) + c_3.$$

V našom príklade máme:

$$x^3 + 2x - 5 = (x^2 + 2x + 6) \cdot (x - 2) + 7. \tag{D5.1}$$

Hornerovu schému môžeme použiť na kvadratický trojčlen $x^2 + 2x + 6$.

	1	2	6
2		2	8
	1	4	14

Tým sme ukázali, že platí:

$$x^2 + 2x + 6 = (x + 4) \cdot (x - 2) + 14.$$

Po dosadení do (D5.1) dostávame:

$$\begin{aligned} x^3 + 2x - 5 &= (x^2 + 2x + 6) \cdot (x - 2) + 7 = \\ &= ((x + 4) \cdot (x - 2) + 14) \cdot (x - 2) + 7 = \\ &= (x + 4) \cdot (x - 2)^2 + 14 \cdot (x - 2) + 7 = \\ &= ((x - 2) + 6) \cdot (x - 2)^2 + 14 \cdot (x - 2) + 7 = \\ &= (x - 2)^3 + 6 \cdot (x - 2)^2 + 14 \cdot (x - 2) + 7. \end{aligned}$$

Tým sme ukázali, že platí:

$$x^3 + 2x - 5 = y^3 + 6y^2 + 14y + 7, \tag{D5.2}$$

kde $y = x - 2$. Výpočet koeficientov polynómu $y^3 + 6y^2 + 14y + 7$ môžeme realizovať pomocou Hornerovej schémy nasledujúcim spôsobom:

	1	0	2	-5
2		2	4	12
	1	2	6	$\boxed{7}$
2		2	8	
	1	4	$\boxed{14}$	
2		2		
	1	$\boxed{6}$		
2				
	$\boxed{1}$			

Ako sme videli v ukážke, Hornerovu schému možno efektívne použiť pri lineárnej transformácii polynómu.

D6. Komplexné čísla

Komplexné čísla budeme zapisovať v tzv. *algebraickom tvare*

$$x = a + b \cdot \boldsymbol{i},$$

kde reálne číslo a sa nazýva *reálna časť* komplexného čísla x,
reálne číslo b sa nazýva *imaginárna časť* komplexného čísla x,
pričom symbolom $\boldsymbol{i}$ označujeme tzv. *imaginárnu jednotku.*

S komplexnými číslami zapísanými v algebraickom tvare sa pracuje presne tak isto ako s reálnymi číslami, len musíme dávať pozor na jedinú vec, totiž že pre imaginárnu jednotku platí

$$\boldsymbol{i}^2 = -1. \tag{D6.1}$$

Teda napr. súčtom dvoch komplexných čísel $x = a+b\cdot\boldsymbol{i}$, $y = c+d\cdot\boldsymbol{i}$ je komplexné číslo $z = u + v \cdot \boldsymbol{i}$, ktoré vypočítame takto:

$$z = x + y = a + b \cdot \boldsymbol{i} + c + d \cdot \boldsymbol{i} = \underbrace{(a+c)}_{=u} + \underbrace{(b+d)}_{=v} \cdot \boldsymbol{i}.$$

Trochu zložitejšie to bude pri súčine. Komplexné číslo $z = u+v\cdot\boldsymbol{i}$, ktoré je súčinom komplexných čísel $x = a + b \cdot \boldsymbol{i}$, $y = c + d \cdot \boldsymbol{i}$, vypočítame takto:

$$\begin{aligned} z = x \cdot y = (a + b \cdot \boldsymbol{i})(c + d \cdot \boldsymbol{i}) = ac + bc \cdot \boldsymbol{i} + ad \cdot \boldsymbol{i} + bd \cdot \boldsymbol{i}^2 = \\ = ac + bc \cdot \boldsymbol{i} + ad \cdot \boldsymbol{i} - bd = \underbrace{(ac - bd)}_{=u} + \underbrace{(bc + ad)}_{=v} \cdot \boldsymbol{i}. \end{aligned}$$

Pritom sme využili rovnosť (D6.1). K zrejmým dôsledkom vzťahu (D6.1) patrí aj vzorec

$$a^2 + b^2 = (a + b \cdot \boldsymbol{i})(a - b \cdot \boldsymbol{i}).$$

Čísla $a + b \cdot \boldsymbol{i}$, $a - b \cdot \boldsymbol{i}$ sa volajú *komplexne združené.*

K užitočným nástrojom patrí aj nasledujúci vzorec:

$$(\cos x + \sin x \cdot \boldsymbol{i})^n = \cos nx + \sin nx \cdot \boldsymbol{i},$$

ktorý platí pre ľubovoľné reálne číslo x a ľubovoľné prirodzené číslo n.
Táto vlastnosť je známa pod názvom *Moivreova veta.*

Každé nenulové komplexné číslo z sa dá vyjadriť práve jedným spôsobom v tvare $z = r \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi \cdot \boldsymbol{i})$, kde $r > 0$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$. Hovoríme, že číslo z je vyjadrené v *goniometrickom tvare.* Využívame to pri riešení *binomickej rovnice*

$$x^n = z. \tag{D6.2}$$

Korene rovnice (D6.2) majú potom tvar

$$x_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \cdot \boldsymbol{i}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

D7. Mocniny

1) Pre každé reálne číslo a a pre každé prirodzené číslo $n > 1$ definujeme

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ činiteľov}}.$$

Napríklad $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$. Pre každé reálne číslo a definujeme

$$a^1 = a.$$

Touto definíciou sme po prvýkrát rozšírili definíciu mocniny, pretože mocninu a^1 už nie je možné vysvetliť ako súčin rovnakých činiteľov.

Tým sme dosiahli, že výraz a^n je definovaný pre každé reálne číslo a a pre každé prirodzené číslo n.

2) Pre každé reálne číslo $a \neq 0$ a pre každé záporné celé číslo n definujeme

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

Napríklad $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{-\frac{1}{8}} = -8$. Pre každé reálne číslo $a \neq 0$ definujeme

$$a^0 = 1.$$

Tým sme dosiahli, že výraz a^n je definovaný pre každé reálne číslo $a \neq 0$ a pre každé celé číslo n.

3) Nech $a > 0$ je reálne číslo. Nech n je prirodzené číslo. Potom rovnica $x^n = a$ má jediný kladný reálny koreň, ktorý sa označuje $\sqrt[n]{a}$ a ktorý sa volá n-tá odmocnina z čísla a. Namiesto $\sqrt[2]{a}$ je zvykom písať $\sqrt{a}$.

Ak n je prirodzené číslo, definujeme

$$\sqrt[n]{0} = 0.$$

Niektorí autori[55)] rozširujú definíciu odmocniny aj pre reálne číslo $a < 0$ a nepárne prirodzené číslo n nasledujúcim spôsobom:

Nech $a < 0$ je reálne číslo. Nech n je nepárne prirodzené číslo. Potom rovnica $x^n = a$ má jediný reálny koreň, ktorý sa označuje $\sqrt[n]{a}$ a ktorý sa volá n-tá odmocnina z čísla a. Napríklad $\sqrt[3]{-8} = -2$.

[55)] Pozri napr. Odvárko, O.: Matematika pro gymnázia – Funkce, Prometheus, Praha, 1996; ISBN 80-85849-09-7.

Uvedomme si, že vyjadrenie (jediného) reálneho koreňa rovnice $x^n = a$ (kde $a < 0$ je reálne číslo a n je nepárne prirodzené číslo) je možné aj bez rozšírenia definície odmocniny:

$$x = -\sqrt[n]{|a|}, \qquad \text{resp. v ekvivalentnom zápise} \qquad x = -\sqrt[n]{-a}.$$

Z tohto dôvodu sa v niektorých stredoškolských učebniciach[56)] píše:

Nedefinujeme n-tú odmocninu zo záporného čísla.

Tento postoj však môže mať nepríjemné dôsledky. Pozrime sa napríklad[57)] na rovnicu $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$. Ak tretiu odmocninu zo záporného čísla nedefinujeme, potom reálne číslo $x = -88$ je koreňom tejto rovnice v komplexnom obore, ale nie je jej koreňom v reálnom obore.

4) Nech $a > 0$ je reálne číslo. Nech r je také racionálne číslo, ktoré nie je celým číslom. Potom definujeme[58)]

$$a^r = \sqrt[n]{a^m},$$

kde m a n sú také nesúdeliteľné celé čísla, že platí $r = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

Pre racionálne číslo $r > 0$ definujeme

$$0^r = 0.$$

Je dôležité si zapamätať, že

definíciu mocniny s racionálnym exponentom nerozširujeme pre záporný základ.

5) Pre každé reálne číslo $a > 0$ a pre ľubovoľné iracionálne číslo r definujeme mocninu a^r ako limitu postupnosti

$$\{a^{r_n}\}_{n=1}^{\infty},$$

kde $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je (ľubovoľná) postupnosť racionálnych čísel r_n konvergujúca ku r.

V literatúre sa používajú aj iné prístupy k definícii iracionálnej mocniny, napr. pomocou Dedekindových rezov. Nebudeme ich však uvádzať, pretože v našich stredoškolských učebniciach sa nepoužívajú.

56) Pozri napr. Odvárko, O. - Ryšánková, M.: Matematika pre 2. ročník gymnázia. Funkcie II, SPN, Bratislava, 1994; ISBN 80-08-02345-7.

57) Rozhledy matematicko-fyzikální 57, 1978-1979, č. 6, str. 283–284.

58) Tento vzorec sa používa aj na definovanie mocniny $a^{\frac{m}{n}}$, kde $a < 0$, m celé a $n > 1$ nepárne. Pritom sa však nedefinuje mocnina $a^{\frac{m}{n}}$ v prípade, že $a < 0$ a n je párne. Dôvodom je skutočnosť, že niektoré bežné pravidlá pre počítanie s mocninami by prestali platiť, napr. $(-1)^{\frac{1}{3}} \neq (-1)^{\frac{2}{6}}$.

Pre ľubovoľné iracionálne číslo $r > 0$ definujeme

$$0^r = 0.$$

Je dôležité si zapamätať, že

iracionálne mocniny so záporným základom nedefinujeme.

Poznamenajme, že nie je možné rozumným spôsobom definovať 0^0, pretože vzhľadom na vzorec $a^0 = 1$, ktorý platí pre každé nenulové reálne číslo a, by bolo vhodné položiť $0^0 = 1$, ale vzhľadom na vzorec $0^r = 0$, ktorý platí pre každé kladné reálne číslo r, by bolo vhodné položiť $0^0 = 0$.

V prípade, že $a < 0$, má výraz a^r zmysel len vtedy, ak je r celé číslo. Na to je potrebné dávať pozor zvlášť vtedy, keď v exponente máme výraz obsahujúci písmená. Napríklad $a^{\sqrt{x+1}}$ má pre $a < 0$ zmysel len vtedy, ak $\sqrt{x+1}$ je celé číslo.

Pri riešení úloh sa nezaobídeme bez poznania základných vlastností mocnín. Pre $0 < a < b$ a pre ξ reálne číslo platí:

$$\begin{aligned} a^\xi &< b^\xi \text{ pre } \xi > 0, \\ a^\xi &= b^\xi \text{ pre } \xi = 0, \\ a^\xi &> b^\xi \text{ pre } \xi < 0. \end{aligned}$$

Pre akékoľvek reálne čísla $\xi_1 < \xi_2$ platí:

$$\begin{aligned} a^{\xi_1} &< a^{\xi_2} \text{ pre } a > 1, \\ a^{\xi_1} &= a^{\xi_2} \text{ pre } a = 1, \\ a^{\xi_1} &> a^{\xi_2} \text{ pre } 0 < a < 1. \end{aligned}$$

K základným nástrojom pre prácu s mocninami patrí aj Bernoulliho nerovnosť. Predpokladajme, že $t \neq 0$ je také reálne číslo, že $1 + t > 0$. Potom pre každé reálne číslo x platí:

$$\begin{aligned} (1+t)^x &> 1 + tx, \qquad \text{ak } x > 1 \text{ alebo } x < 0; \\ (1+t)^x &< 1 + tx, \qquad \text{ak } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Používali sme aj AG-nerovnosť (nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom):

$$\sqrt[m]{a_1 a_2 \dots a_m} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m},$$

ktorá platí pre ľubovoľné nezáporné čísla $a_1, a_2, \dots, a_m$, ktoré nie sú všetky rovnaké.

D8. Číslo e

Nasledujúce odhady

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{D8.1}$$

platia pre každé prirodzené číslo n. Členy $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tvoria rastúcu postupnosť a členy $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ tvoria klesajúcu postupnosť, pričom platí

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{D8.2}$$

Dá sa ukázať, že číslo e je iracionálne. Jeho približná hodnota je

$$e \doteq 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360.$$

Bohužiaľ, čísla a_n a b_n sa k sebe približujú veľmi pomaly. Napríklad pre $n = 500$ dostávame $a_n \doteq 2.715\,568\,520\,652$, $b_n \doteq 2.720\,999\,657\,693$. Napriek tomu, že sme zvolili číslo n dosť veľké, pomocou odhadu (D8.1) môžeme určiť číslo e iba na dve desatinné miesta.

Odhady (D8.1) sa dajú zlepšiť. Budeme si to ilustrovať na hornom odhade. Ukážeme, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}. \tag{D8.3}$$

Budeme skúmať funkciu $y = f(x)$, kde

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}.$$

Vypočítame jej deriváciu

$$f'(x) = \tfrac{1}{1+x} - \tfrac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2} = \tfrac{1}{1+x} - \tfrac{4}{(x+2)^2} = \tfrac{x^2+4x+4-4-4x}{(1+x)(x+2)^2} = \tfrac{x^2}{(1+x)(x+2)^2}.$$

Pretože pre všetky $x > -1$ platí $f'(x) > 0$, funkcia $y = f(x)$ je rastúca na intervale $(-1, \infty)$. Predpokladajme, že n je prirodzené číslo. Pretože zrejme $\frac{1}{n} > 0$, platí

$$\begin{aligned}
f(\tfrac{1}{n}) &> f(0)\\
\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right) - \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}+2} &> \ln(1+0) - \frac{2\cdot 0}{0+2} = 0\\
\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right) &> \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}+2} = \frac{2}{1+2n} = \frac{1}{\frac{1}{2}+n}\\
\left(\tfrac{1}{2}+n\right)\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right) &> 1\\
\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}+n} &> 1\\
\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}+n} &> e.
\end{aligned}$$

Tým je nerovnosť (D8.3) dokázaná.

Pomocou (D8.3) ukážeme, že platí

$$e < \frac{30}{11}. \tag{D8.4}$$

Podľa (D8.3) pre $n = 5$ máme

$$e < \left(1 + \frac{1}{5}\right)^{5+\frac{1}{2}} = \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{11}{2}}.$$

K dokončeniu dôkazu nerovnosti (D8.4) stačí ukázať, že platí

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{11}{2}} < \frac{30}{11}.$$

Presvedčia nás o tom nasledujúce ekvivalentné úpravy:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{11}{2}} &< \frac{30}{11} \\
\frac{6^{11}}{5^{11}} &< \frac{30^2}{11^2} \\
6^{11} \cdot 11^2 &< 30^2 \cdot 5^{11} \\
6^{11} \cdot 11^2 &< 5^2 \cdot 6^2 \cdot 5^{11} \\
6^9 \cdot 11^2 &< 5^{13} \\
1\,219\,401\,216 &< 1\,220\,703\,125.
\end{aligned}$$

Nerovnosť (D8.4) možno dokázať aj pomocou horného odhadu z (D8.1), avšak pre podstatne väčšie n (konkrétne pre $n \geqq 152$).

Výrazné zlepšenie odhadov čísla e môžeme dosiahnuť pomocou postupnosti, ktorej členy sú

$$y_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Dá sa ukázať, že pre každé prirodzené číslo n platia odhady

$$y_n < e < y_n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}. \tag{D8.5}$$

Členy y_n tvoria rastúcu postupnosť a členy $z_n = y_n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$ tvoria klesajúcu postupnosť, pričom platí

$$e = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n. \tag{D8.6}$$

Dokázať (D8.4) je potom jednoduché. Použitím horného odhadu podľa (D8.5) pre $n = 3$ dostávame

$$e < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{49}{18} < \frac{30}{11}.$$

Skutočne, $49 \cdot 11 = 539 < 540 = 30 \cdot 18$.

Na záver ukážeme, že platí

$$e^e < 16. \tag{D8.7}$$

Podľa (D8.4) platí

$$e < \frac{30}{11} < \frac{11}{4}. \tag{D8.8}$$

Skutočne, $30 \cdot 4 = 120 < 121 = 11 \cdot 11$.

Pretože podľa (D8.8) máme

$$e^e < \left(\frac{30}{11}\right)^{\frac{11}{4}},$$

k dokončeniu dôkazu stačí overiť, že platí

$$\left(\frac{30}{11}\right)^{\frac{11}{4}} < 16.$$

Presvedčia nás o tom nasledujúce ekvivalentné úpravy

$$\begin{aligned} \left(\frac{30}{11}\right)^{\frac{11}{4}} &< 16 \\ \left(\frac{30}{11}\right)^{11} &< 16^4 \\ 30^{11} &< 16^4 \cdot 11^{11} \\ 2^{11} \cdot 15^{11} &< 2^{16} \cdot 11^{11} \\ 15^{11} &< 2^5 \cdot 11^{11} \\ 8\,649\,755\,859\,375 &< 9\,129\,973\,459\,552. \end{aligned}$$

Pomocou výpočtovej techniky môžeme vypočítať číslo e na veľký počet desatinných miest. Z jednoduchých (ale účinných) nástrojov je vhodný program `X(PLORE)`. Verzia pre DOS sa pohodlne zmestí na jednu disketu. Ďalšie informácie o tomto programe sú uvedené na str. 162.

Na ilustráciu ukážeme ako môžeme vypočítať číslo e hoci aj na 100 desatinných miest. Použijeme program X(PLORE) pre DOS. V exaktnom móde dovoľuje pracovať s veľkými celými číslami (majúcimi až 2000 cifier) a s exaktnými zlomkami. Môžeme ich sčítať, odčítať, násobiť, deliť a umocňovať na prirodzený exponent.

Do okna s názvom **Subroutines** (otvoríme ho tlačítkom F10) napíšeme:

```
Function e(m)
 n=0
 A=1
 REPEAT
 n=n+1
 A=A+1/n!
 UNTIL 2*(n+2)*10**m<(n+1)*(n+1)!
 B=NUMERATOR(A)
 C=DENOMINATOR(A)
 Z=''
  FOR J=1 TO m
  Z=Z+STR(DIV(B,C))
  B=(B-DIV(B,C)*C)*10
  END
 WRITE(Z[1]+'.'+Z[2:m])
END
```

Vrátime sa do okna s názvom **Input** (pomocou tlačítka F10), kde napíšeme:

```
exacton
m=100 // pocet zobrazovanych cifier
e(m)
```

Aby zobrazované cifry boli platné, program určí číslo n tak, aby platilo

$$z_n - y_n = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} < 5 \cdot 10^{-m-1}.$$

Literatúra

[1] Антонов, Н. П. - Выгодский, М. Я. - Никитин, В. В. - Санкин, А. И., *Сборник задач по элементарной математике*, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1957.

[2] Башмаков, М. И., *Уравнения и неравенства*, Наука, Москва, 1971.

[3] Болтянский, В. Г. - Виленкин, Н. Я., *Симметрия в алгебре*, Наука, Москва, 1967.

[4] Болтянский, В. Г., *Метод отделяющих констант*, Квант (1977), 46–50.

[5] Bruthans, V. - Kejzlar, A., *Matematika. Příručka pro přípravu na vysokou školu*, SNTL-Práce, Praha, 1970.

[6] Burjan, V. - Maxian, M., *Matematika, opakovanie pre gymnázium s triedami zameranými na matematiku*, SPN, Bratislava, 1989.

[7] Calda, E., *Rovnice ve škole neřešené*, Prometheus, Praha, 1995, ISBN 80-85849-88-7.

[8] Čech, E., *Elementární funkce*, JČMF, Praha, 1947.

[9] Černek, P., *Poškolácke úlohy*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky **47** (1997), 29–31.

[10] Černek, P., *Poškolácke úlohy*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky **53** (1998), 29–32.

[11] Černek, P. - Hecht, T. - Božek, M., *Matematika pre 2. ročník gymnázií a SOŠ. Zbierka úloh*, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 1998, ISBN 80-7158-053-8.

[12] Doboš, J., *Spojitosť*, Rozhledy matematicko-fyzikální **58** (1979-80), 389–391.

[13] Doboš, J., *O funkcii*, Matematické obzory **24** (1986), 63–67.

[14] Doboš, J., *Poznámka o rovniciach*, Rozhledy matematicko-fyzikální **70** (1992), 193–196.

[15] Doboš, J., *Matematické etudy. Príručka pre uchádzačov o štúdium na ekonomickej univerzite*, MANACON, Prešov, 1999, ISBN 80-85668-82-3.

[16] Doboš, J., *Od paraboly k inverznej funkcii*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky **29** (2000), 15–20.

[17] Doboš, J., *AG-nerovnosť*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky **31** (2002), 4–11.

[18] Doboš, J., *Kvadratické rovnice a nerovnice*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky **31** (2002), 10–18.

[19] Дыбов, П. Т. - Забоев, А. И. - Иванов, А. С. - Калиниченко, Д. Ф. - Шолохов, Н. В., *Problem Book in High-School Mathematics*, Mir, Moscow, 1985, (Edited by A. I. Prilepko).

[20] Fiedler, M. - Vrba, A., *Základné numerické metódy pre 3. ročník gymnázia s triedami zameranými na matematiku*, SPN, Bratislava, 1988.

[21] Fischer, E., *Intermediate Real Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1983, ISBN 0-387-90721-1.

[22] Fulier, J., *Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy*, Fakulta prírodných vied UKF v Nitre, 2001, ISBN 80-8050-418-0.

[23] Gál, T. - Růžička, J., *Elementární funkce v teorii a praxi*, SNTL, Praha, 1967.

[24] Havlíček, K. a kol., *Cesty moderní matematiky*, Horizont, Praha, 1976.

[25] Hecht, T. - Sklenáriková, Z., *Metódy riešenia matematických úloh*, SPN, Bratislava, 1992, ISBN 80-08-00340-5.

[26] Hecht, T. - Černek, P., *Matematika pre 2. ročník gymnázií a SOŠ. Funkcie*, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 1997, ISBN 80-7158-041-4.

[27] Hecht, T., *Matematika pre 3. ročník gymnázií a SOŠ. Funkcie II*, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 1999, ISBN 80-7158-216-6.

[28] Hejný, M. - Stehlíková, N., *Elementární matematika (rovnice, teorie čísel, kombinatorika, planimetrie)*, Univerzita Karlova, Praha, 1995.

[29] Horák, K. - Müller, V. - Vrba, A., *Úlohy mezinárodních matematických olympiád*, SPN, Praha, 1986.

[30] Hrubý, D., *O jednom rozkladu*, Učitel matematiky **8 3(35)** (2000), 172–173.

[31] Janeček, F., *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy. Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy*, Prometheus, Praha, 2000, ISBN 80-7196-076-4.

[32] Jarník, V., *Diferenciální počet I*, Academia, Praha, 1974.

[33] Jarník, J. - Šisler, M., *Jak řešit rovnice a jejich soustavy*, SNTL-Práce, Praha, 1969.
[34] Kluvánek, I., *Prípravka na diferenciálny a integrálny počet, I. časť*, Vysoká škola dopravy a spojov, Žilina, 1991, ISBN 80-7100-058-2.
[35] Knežo, D. - Hospodár, C. - Kimáková, Z. - Švidroňová, E., *Zbierka príkladov pre uchádzačov o štúdium na Strojníckej fakulte TU*, ELFA, Košice, 2000, ISBN 80-7099-506-8.
[36] Kolek, L., *Základy algebry pro techniky*, SNTL, Praha, 1969.
[37] Krňan, F. - Bartoš, P. - Rovan, K., *Algebra pre 1. ročník stredných všeobecnovzdelávacích škôl*, SPN, Bratislava, 1963.
[38] Курош, А. Г., *Алгебраические уравнения произвольных степеней*, Наука, Москва, 1983.
[39] Larson, L. C., *Metódy riešenia matematických problémov*, Alfa, Bratislava, 1990, ISBN 80-05-00627-6.
[40] Liebl, P., *Rovnice a nerovnice pre 1. ročník gymnázií so zameraním na matematiku*, SPN, Bratislava, 1986.
[41] Liška, J., *Algebraické rovnice o jedné neznámé s celočíselnými koeficienty*, Matematika a fyzika ve škole **3** (1973), 491–497.
[42] Литвиненко, В. Н. - Мордкович, А. Г., *Практикум по решению математических задач. Алгебра. Тригонометрия*, Просвещение, Москва, 1984.
[43] Meredith, D., *X(PLORE) Version 4.0 for DOS Compatible Computers*, Prentice-Hall, New Jersey, 1993, ISBN 0-13-014226-3.
[44] Mída, J., *Ze zahraničních časopisů*, Rozhledy matematicko-fyzikální **57** (1978-1979), č. 6, str. 283–284.
[45] Моденов, П. С., *Сборник задач по математике (с анализом ошибок, допущенных поступавшими в высшие учебные заведения)*, Советская наука, Москва, 1951.
[46] Моденов, П. С., *Сборник задач по специальному курсу элементарной математики*, Высшая школа, Москва, 1960.
[47] Novoveský, Š. - Križalkovič, K. - Lečko, I., *Zábavná matematika*, SPN, Praha, 1974.
[48] Odvárko, O., *K problematice sestrojování grafů funkcí*, Matematika a fyzika ve škole **9** (1978/79), 8–17.
[49] Odvárko, O., *Funkcie I pre 1. ročník gymnázií*, SPN, Bratislava, 1994, ISBN 80-08-02321-X.
[50] Odvárko, O. - Ryšánková, M., *Matematika pre 2. ročník gymnázia. Funkcie II*, SPN, Bratislava, 1994, ISBN 80-08-02345-7.
[51] Odvárko, O., *Matematika pro gymnázia – Funkce*, Prometheus, Praha, 1996, ISBN 80-85849-09-7.
[52] Odvárko, O., *Matematika pro gymnázia – Goniometrie*, Prometheus, Praha, 1997, ISBN 80-7196-000-4.
[53] Олехник, С. Н. - Потапов, М. К. - Пасиченко, П. И., *Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения*, Факториал, Москва, 1997, ISBN 5-88688-004-6.
[54] Peller, F. - Šáner, V. - Eliáš, J. - Pinda, Ľ., *Matematika (krok za krokom na EU)*, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava, 2002, ISBN 80-225-1529-9.
[55] Печерский, Л. Б., „$n^x = x^n$“, Квант (1983), 31.
[56] Петров, В. А., *Неравенства и графики*, Квант (1988), 54–55.
[57] Rektorys, K., *Přehled užité matematiky*, SNTL, Praha, 1968.
[58] Riečan, B. - Bero, P., *Funkcie pre 2. ročník gymnázia s triedami zameranými na matematiku*, SPN, Bratislava, 1990.
[59] Riečan, B. - Bero, P. - Smida, J. - Šedivý, J., *Matematika pre 4. ročník gymnázia*, SPN, Bratislava, 1987.
[60] Riečan, B. - Komorník, J. - Havel, I. - Vrba, A., *Seminár a cvičenia z matematiky. Pravdepodobnostné modely reálnych situácií. Algoritmy a matematika*, SPN, Bratislava, 1984.
[61] Rychlík, K., *Úvod do analytické theorie mnohočlenů s reálnými koeficienty*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1957.

[62] Рыжик, В., *Надо ли искать ОДЗ?*, Квант (1982), 39–42.
[63] Schmidtmayer, J., *Nerovnosti s absolutními hodnotami*, Rozhledy matematicko-fyzikální **42** (1963–64), 433–439.
[64] Schwarz, Š., *Základy náuky o riešení rovníc*, Vydavateľstvo SAV, Bratislava, 1967.
[65] Сидоров, Ю., *Об одном замечательном уравнении*, Квант (1990), 58–62.
[66] Simon, H. - Stahl, K., *Matematika*, Alfa, Bratislava, 1968.
[67] Скворцова, М. Г., *Надо ли делать проверку?*, Квант (1984), 31–33.
[68] Smida, J. - Šedivý, J. - Lukátšová, J. - Vocelka, J., *Matematika pre 1. ročník gymnázia*, SPN, Bratislava, 1990.
[69] Šachno, K. U., *Matematika pre prijímacie skúšky na vysoké školy*, Alfa, Bratislava, 1971.
[70] Ваховскый, Е. Б. - Рывкин, А. А., *Когда помагают графики*, Квант (1975), 43–48.
[71] Váňa, J., *O rovnicích s parametry*, Mladá fronta, Praha, 1970.
[72] Вересова, Е. Е. - Денисова, Н. С. - Полякова, Т. Н., *Практикум по решению математических задач*, Просвещение, Москва, 1979.
[73] Виленкин, Н., *Три точки, три точки, три точки,...*, Квант (1980), 48–50.
[74] Winczer, M., *Dva jednoduché spôsoby výpočtu π a e na veľa desatinných miest*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky **49** (1997), 1–13.

Obsah

Názov:	Rovnice a nerovnice
Autor:	Doc. RNDr. Jozef Doboš, CSc.
Lektorovali:	RNDr. Ján Buša, CSc. Doc. RNDr. Imrich Pokorný, CSc. RNDr. Jozef Varsa
Vydal:	Bolchazy-Carducci Publishers, Inc.
Vydanie:	prvé, 2003
Tlač:	Edičné stredisko UPJŠ Košice
ISBN:	0-86516-558-0