OBZORY

4/2002(31)

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2002(31)

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

Adresa redakcie:

Matematická časť:
Katedra matematiky FPV UMB, Tajovského 40, 974 01 Banská Bystrica
(e-mail: malicky@fpv.umb.sk)

Fyzikálna časť:
Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: mrakovska@ukf.sk)

Objednávky a predplatné vybavuje:
Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2002 (31)

Kvadratické rovnice a nerovnice

Jozef Doboš

Abstract: Most of the quadratic equations and inequalities you will encounter in problem books can be solved by elementary methods.

Poviete si – čo už môže byť na kvadratických rovniciach zaujímavé? Preto sme na úvod vybrali nasledujúci príklad. Vyriešte si ho najskôr samostatne. Nie je v tom nič ťažké, ale zabehnutý stereotyp môže spôsobiť, že vaše riešenie nebude úplné.

Príklad.

Nájdite všetky reálne čísla p, pre ktoré rovnica $p \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$ má jediné riešenie v obore reálnych čísel.

Riešenie.

Použijeme substitúciu $2^x = y$ a danú rovnicu upravíme do tvaru

$$p \cdot y^2 - 5y + 1 = 0. \tag{1}$$

$$\text{Rovnica (1) je } \begin{cases} \text{lineárna} & \text{pre } p = 0, \\ \text{kvadratická} & \text{pre } p \neq 0. \end{cases}$$

Pre $p = 0$ má rovnica (1) jediné riešenie $y = \dfrac{1}{5}$. Pre $p \neq 0$ má rovnica (1) jediné riešenie práve vtedy, keď jej diskriminant $D = 25 - 4p$ je rovný nule, t.j. pre $p = \dfrac{25}{4}$. Tým sme ukázali, že rovnica (1) má jediné riešenie práve vtedy, keď $p \in \left\{0; \dfrac{25}{4}\right\}$. V tomto okamihu študenti pokladajú príklad za vyriešený.

Ukážeme, že to tak nie je. Položme napríklad $p = -24$. Napriek tomu, že rovnica $(-24) \cdot y^2 - 5y + 1 = 0$ má dva reálne korene $y_1 = \dfrac{1}{8}$ a $y_2 = -\dfrac{1}{3}$, rovnica $(-24) \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$ má jediné riešenie $x = -3$.

Pretože pre každé reálne číslo x platí $2^x > 0$, rovnica $p \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$ má jediné riešenie práve vtedy, keď rovnica (1) má jediné kladné riešenie, čo nastáva práve vtedy, keď $p \in (-\infty; 0\rangle \cup \left\{\dfrac{25}{4}\right\}$. (Možno to ukázať klasickým spôsobom, čo prenechávame čitateľovi ako užitočné cvičenie.)

Riešiť kvadratickú rovnicu pomocou diskriminantu je relatívne jednoduché. Stačí poznať vzorec a trochu trénovať. Avšak, nemusí to byť práve najefektívnejšie. Typickým príkladom sú rovnice

$$x^2+px=0, \qquad x^2+q=0,$$

ktoré rieši pomocou diskriminantu naozaj iba veľmi málo študentov. Cieľom tohto príspevku je ukázať niektoré jednoduché techniky, ktoré nám často umožňujú riešiť kvadratické rovnice bez použitia diskriminantu. Ak si urobíte malý prieskum v zbierkach úloh, zistíte, že tieto postupy možno použiť prekvapujúco často. Investícia do ich zvládnutia sa teda určite vráti.

Pomerne ľahko môžeme overiť, či niektoré z čísel 1 a -1 nie je koreňom rovnice

$$ax^2+bx+c=0. \tag{2}$$

Číslo $x_1=1$ je koreňom rovnice (2) práve vtedy, keď platí $a+b+c=0$.
V takomto prípade máme

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=ax^2+bx-a-b&=a(x^2-1)+b(x-1)= \\ &=a(x-1)(x+1)+b(x-1)= \\ &=(x-1)(ax+a+b)=(x-1)(ax-c). \end{aligned}$$

Druhý koreň x_2 nájdeme riešením rovnice $ax-c=0$. Teda $x_2=\dfrac{c}{a}$.

Zhrnutie. Ak $a+b+c=0$, potom rovnica (2) má korene $x_1=1$, $x_2=\dfrac{c}{a}$.
Číslo $x_1=-1$ je koreňom rovnice (2) práve vtedy, keď platí $a-b+c=0$.
V takomto prípade máme

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=ax^2+bx-a+b&=a(x^2-1)+b(x+1)= \\ &=a(x-1)(x+1)+b(x+1)= \\ &=(x+1)(ax-a+b)=(x+1)(ax+c). \end{aligned}$$

Druhý koreň x_2 nájdeme riešením rovnice $ax+c=0$. Teda $x_2=-\dfrac{c}{a}$.

Zhrnutie Ak $a-b+c=0$, potom rovnica (2) má korene $x_1=-1$, $x_2=-\dfrac{c}{a}$.

Príklad

V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$3x^2-14x-17=0. \tag{3}$$

Riešenie

Pretože $a-b+c=3+14-17=0$, číslo $x_1=-1$ je koreňom rovnice (3). Pre druhý koreň potom platí $x_2=-\dfrac{c}{a}$. Teda $x_2=\dfrac{17}{3}$. Pre porovnanie vyriešte rovnicu (3) aj pomocou diskriminantu.

Úlohy. V obore reálnych čísel riešte rovnice

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x^2 & - & 21x & + & 16 & = & 0 \\ 13x^2 & - & 17x & + & 4 & = & 0 \\ 7x^2 & + & 18x & + & 11 & = & 0 \\ 11x^2 & + & 19x & + & 8 & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} [\,x_1 = 1,\ x_2 = 16/5\,] \\ [\,x_1 = 1,\ x_2 = 4/13\,] \\ [\,x_1 = -1,\ x_2 = -11/7\,] \\ [\,x_1 = -1,\ x_2 = -8/11\,] \end{array}$$

Teraz si ukážeme, ako možno nájsť druhý koreň kvadratickej rovnice za predpokladu, že jeden už poznáme.

Položme $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nech r je pevne zvolené reálne číslo. Pretože

$$\begin{aligned} f(x) - f(r) &= (ax^2 + bx + c) - (ar^2 + br + c) = a(x^2 - r^2) + b(x - r) = \\ &= a(x-r)(x+r) + b(x-r) = (x-r)(ax + ar + b), \end{aligned}$$

máme

$$f(x) = (x-r)(ax + ar + b) + f(r),$$

odkiaľ

$$ax^2 + bx + c = (x-r)(ax + b_1) + c_1, \tag{4}$$

kde $b_1 = ar + b$ a $c_1 = f(r) = ar^2 + br + c = r(ar+b) + c = b_1 r + c$.

Ukážeme si, ako možno uvedený postup pomocou Hornerovej schémy efektívne zmechanizovať. Postupujeme v troch riadkoch. Prvý riadok obsahuje všetky koeficienty daného kvadratického trojčlena $f(x) = ax^2 + bx + c$. Do tretieho riadku najskôr opíšeme číslo a.

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ r & & & \\ \hline & a & & \end{array}$$

Potom vynásobíme číslo a číslom r a výsledok zapíšeme do druhého riadku pod číslo b.

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ r & & ar & \\ \hline & a & & \end{array}$$

Čísla v tomto stĺpci sčítame a výsledok (ktorý sme označili symbolom b_1) zapíšeme do tretieho riadku.

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ r & & ar & \\ \hline & a & b_1 & \end{array}$$

Postup opakujeme. Vynásobíme číslo $b_1 = b + ar$ číslom r a výsledok zapíšeme pod číslo c. Čísla v tomto stĺpci sčítame a výsledok (ktorý sme označili symbolom c_1) zapíšeme do tretieho riadku.

$$\begin{array}{c|ccc}
 & a & b & c \\
r & & ar & b_1 r \\
\hline
 & a & b_1 & \boxed{c_1} = f(r)
\end{array}$$

V treťom riadku máme čísla a, b_1 a c_1. Čísla a a b_1 sú koeficienty čiastočného podielu, ktorým je dvojčlen $ax + b_1$. Číslo c_1 je zvyšok, ktorý dostaneme pri delení kvadratického trojčlena $f(x) = ax^2 + bx + c$ dvojčlenom $x - r$.

Predpokladajme, že x_1 je koreň kvadratickej rovnice (2). Potom pre $r = x_1$ platí $c_1 = f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c = 0$, teda podľa (4) máme

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(ax + b_1), \tag{5}$$

kde $b_1 = ax_1 + b$. Druhý koreň x_2 rovnice (2) nájdeme riešením lineárnej rovnice $ax + b_1 = 0$, t. j. $x_2 = -\dfrac{b_1}{a}$.

Príklad.

Predpokladajme, že číslo $x_1 = 51$ je koreňom rovnice $x^2 - 9x + c = 0$. Nájdite jej druhý koreň.

Riešenie.

$$\begin{array}{c|ccc}
 & a & b & c \\
x_1 & & ax_1 & b_1 x_1 \\
\hline
 & a & b_1 & \boxed{c_1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & -9 & c \\
51 & & 51 & \\
\hline
 & 1 & 42 &
\end{array}$$

Koreň x_2 nájdeme riešením rovnice $ax + b_1 = 0$, t.j. $x + 42 = 0$. Teda $x_2 = -42$. Po malej úprave rovnosti (5) dostaneme rozklad kvadratického trojčlena na tzv. koreňové činitele

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2), \quad \text{resp.} \\
x^2 + px + q &= (x - x_1)(x - x_2),
\end{aligned}$$

kde sme použili označenie $\dfrac{b}{a} = p$, $\dfrac{c}{a} = q$. Pritom

$$x^2 + px + q = 0$$

je tzv. *normovaný tvar* kvadratickej rovnice. Medzi jej koreňmi a koeficientami platia nasledujúce vzťahy, ktoré sa volajú *Viètove vzorce*

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= -p, \\
x_1 \cdot x_2 &= q.
\end{aligned}$$

Príklad.
Riešte rovnicu
$$x^2-(\sqrt{3}+2)\cdot x+2\cdot\sqrt{3}=0.$$

Riešenie. Použijeme Viètove vzorce. Hľadáme také čísla x_1 a x_2, pre ktoré platí
$$x_1+x_2=\sqrt{3}+2,$$
$$x_1\cdot x_2=2\cdot\sqrt{3}.$$

Nie je ťažké uhádnuť, že týmto podmienkam vyhovujú čísla $x_1=\sqrt{3}$ a $x_2=2$.

Príklad.
Riešte rovnicu
$$x^2-2x-63=0.$$

Riešenie. Postupujeme rovnako ako v predchádzajúcom príklade.

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=2 \qquad & x_1+x_2&=(-7)+9\\ x_1\cdot x_2&=-63 \qquad & x_1\cdot x_2&=(-7)\cdot 9\end{aligned}$$

Číslo $q=-63$ sme rozložili na súčin dvoch čísel, ktorých súčet je 2. Ako vidíme, daná rovnica má korene $x_1=-7$ a $x_2=9$.

Úlohy. V obore reálnych čísel riešte rovnice

$$\begin{array}{rcrcrcl} x^2 & - & 5x & + & 6 & = & 0\\ x^2 & + & x & - & 6 & = & 0\\ x^2 & - & x & - & 30 & = & 0\end{array} \qquad \begin{array}{l} [x_1=2,\ x_2=3]\\ [x_1=-3,\ x_2=2]\\ [x_1=-5,\ x_2=6]\end{array}$$

V ďalšej časti sa budeme zaoberať rovnicou (2), ktorej koeficienty a, b a c sú celé čísla. Táto situácia sa totiž v školských úlohách vyskytuje najčastejšie. Predpokladajme, že rovnica (2) má celočíselný koreň s. Pretože platí $s(as+b)=-c$, číslo s je deliteľom čísla c. Teda celočíselné korene rovnice (2) hľadáme medzi deliteľmi čísla c. Pritom s výhodou používame Hornerovu schému.

Príklad.
Riešte rovnicu
$$2x^2-7x+3=0.$$

Riešenie.

Delitele čísla $c=3$ sú 1, -1, 3, -3. Pretože platí $f(1)=2-7+3=-2$ a $f(-1)=2+7+3=12$, čísla 1 a -1 nie sú koreňmi danej rovnice. Pomocou Hornerovej schémy postupne overujeme, ktoré z čísel 3 a -3 je hľadaným koreňom.

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c\\ x_1 & & ax_1 & b_1x_1\\ \hline & a & b_1 & \boxed{c_1}\end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 2 & -7 & 3\\ 3 & & 6 & -3\\ \hline & 2 & -1 & \boxed{0}\end{array}$$

Daná rovnica má teda celočíselný koreň $x_1 = 3$. Koreň x_2 nájdeme riešením rovnice $ax + b_1 = 0$, t. j. $2x - 1 = 0$. Teda $x_2 = \frac{1}{2}$.

Úlohy. V obore reálnych čísel riešte rovnice

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x^2 & - & 7x & - & 6 & = & 0 \\ 2x^2 & + & 3x & - & 2 & = & 0 \\ 2x^2 & - & 11x & + & 14 & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} [x_1 = 3,\ x_2 = -2/3] \\ [x_1 = -2,\ x_2 = 1/2] \\ [x_1 = 2,\ x_2 = 7/2] \end{array}$$

V prípade, že počet deliteľov čísla c je relatívne veľký, ich postupné preverovanie je neefektívne. Môžeme však využiť skutočnosť, že číslo $s-1$ je deliteľom čísla $f(1)$. Skutočne, pretože $a+b+c = f(1)$, platí:

$$\begin{aligned} as^2 + bs + c &= 0, \\ as^2 + bs + f(1) - a - b &= 0, \\ a(s^2 - 1) + b(s-1) + f(1) &= 0, \\ a(s-1)(s+1) + b(s-1) &= -f(1), \\ (s-1)(as + a + b) &= -f(1). \end{aligned}$$

Príklad.

Riešte rovnicu

$$2x^2 - 27x + 36 = 0.$$

Riešenie.

Číslo $s-1$ bude ležať medzi deliteľmi čísla $f(1) = 2 - 27 + 36 = 11$, t.j. v množine $\{1; -1; 11; -11\}$. Potom $s \in \{2; 0; 12; -10\}$. Pretože s je deliteľom čísla $c = 36$, do úvahy prichádzajú iba čísla 2 a 12. Pomocou Hornerovej schémy overíme, že hľadaným celočíselným koreňom je číslo $x_1 = 12$.

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ x_1 & & ax_1 & b_1x_1 \\ \hline & a & b_1 & \boxed{c_1} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 2 & -27 & 36 \\ 12 & & 24 & -32 \\ \hline & 2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

Koreň x_2 nájdeme riešením rovnice $ax + b_1 = 0$, t. j. $2x - 3 = 0$. Teda $x_2 = \frac{3}{2}$.

Podobne možno využiť skutočnosť, že číslo $s+1$ je deliteľom čísla $f(-1)$. Dôkaz tohto tvrdenia si premyslite samostatne.

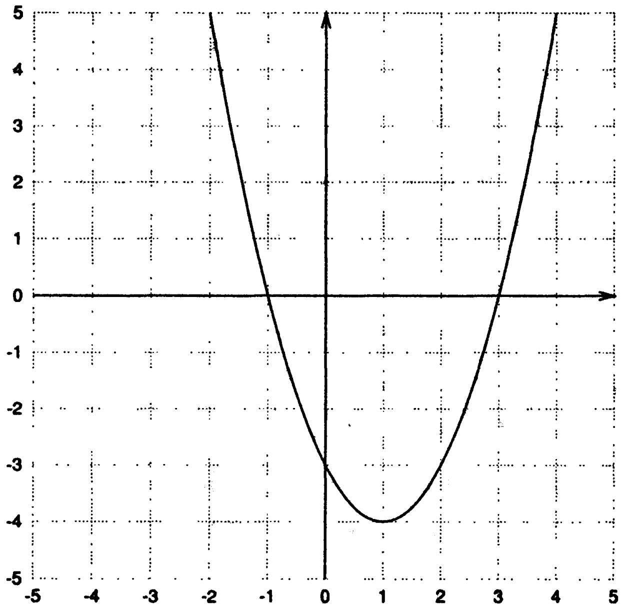
V ďalšej časti sa budeme zaoberať kvadratickými nerovnicami. Dôležitú úlohu bude mať grafická analýza.

Úloha. Na obrázku je graf kvadratického trojčlena $y = ax^2 + bx + c$. Zistite pre ktoré hodnoty premennej x

a) sú hodnoty y tejto funkcie rovné nule, $[\, x \in \{-1; 3\} \,]$

b) sú hodnoty y tejto funkcie kladné, $[\, x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty) \,]$

c) sú hodnoty y tejto funkcie záporné, [$x \in (-1;3)$]
d) je táto funkcia rastúca, [$x \in \langle 1;+\infty)$]
e) je táto funkcia klesajúca. [$x \in (-\infty;1\rangle$]



Každú kvadratickú nerovnicu môžeme upraviť do jedného z tvarov (kde $a > 0$):

$$ax^2+bx+c>0, \qquad ax^2+bx+c\geq 0, \qquad ax^2+bx+c<0, \qquad ax^2+bx+c\leq 0.$$

Na záver uvedieme prehľadné tabuľky, ktoré nám v koncentrovanej podobe dávajú návod na riešenie týchto kvadratických nerovníc.

Literatúra

[1] Calda, E.: *Rovnice ve škole neřešené* Prometheus, Praha, 1995, ISBN 80-85849-88-7
[2] Doboš, J.: *Matematické etudy, príručka pre uchádzačov o štúdium na ekonomickej univerzite* Manacon, Prešov, 1999, ISBN 80-85668-82-3
[3] Doboš, J.: *Od paraboly k inverznej funkcii* Obzory matematiky, fyziky a informatiky, **29** 4/2000, 15–20
[4] Олехник, С. Н. – Потапов, М. К. – Пасиченко, П. И.: *Уравнения и неравенства, нестандартные методы решения,* Факториал, Москва, 1997, ИСБН 5-88688-004-6
[5] *Повышение эффективности обучения математике* под редакцией Г. Г. Масловой, Педагогика, Москва, 1971

Adresa autora:

Katedra aplikovanej matematiky SjF TU, Letná 9, 042 00 Košice

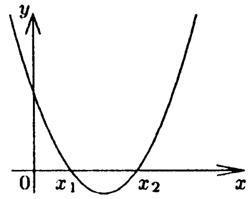
e-mail: Jozef.Dobos@tuke.sk

http://www.tuke.sk/dobos

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$a>0$

$$D = b^2 - 4ac$$

$D>0$



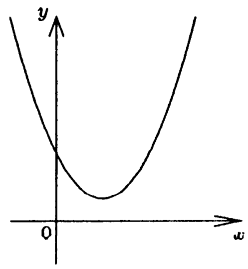
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

Obor pravdivosti:

$(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$

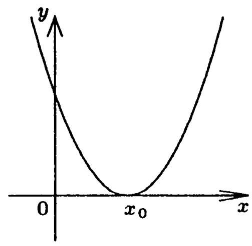
$D<0$



Obor pravdivosti:

$(-\infty; \infty)$

$D=0$



$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

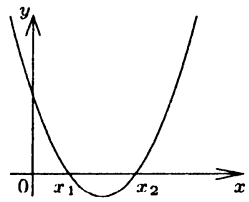
Obor pravdivosti:

$(-\infty; x_0) \cup (x_0; \infty)$

$$ax^2 + bx + c \geqslant 0$$
$a>0$

$$D = b^2 - 4ac$$

$D>0$



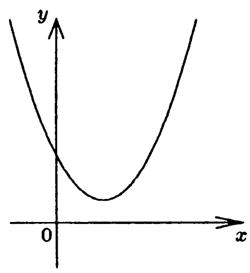
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

Obor pravdivosti:

$(-\infty; x_1\rangle \cup \langle x_2; \infty)$

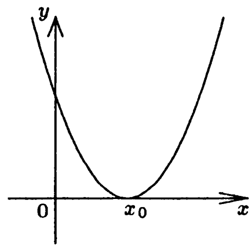
$D<0$



Obor pravdivosti:

$(-\infty; \infty)$

$D=0$



$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

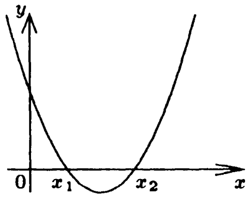
Obor pravdivosti:

$(-\infty; \infty)$

$$ax^2 + bx + c < 0$$
$a>0$

$$D = b^2 - 4ac$$

$D>0$



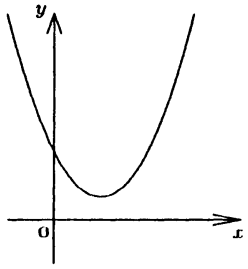
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

OBOR PRAVDIVOSTI:

$(x_1; x_2)$

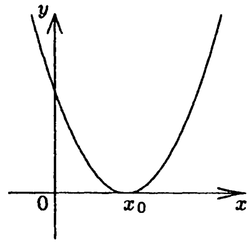
$D<0$



OBOR PRAVDIVOSTI:

$\emptyset$

$D=0$



$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

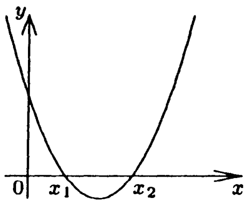
OBOR PRAVDIVOSTI:

$\emptyset$

$$ax^2 + bx + c \leqslant 0$$
$a>0$

$$D = b^2 - 4ac$$

$D>0$



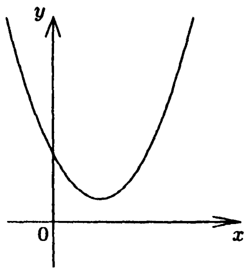
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

OBOR PRAVDIVOSTI:

$\langle x_1; x_2 \rangle$

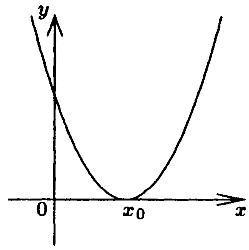
$D<0$



OBOR PRAVDIVOSTI:

$\emptyset$

$D=0$



$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

OBOR PRAVDIVOSTI:

$\{x_0\}$

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
4/2002(31)

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným prispením
Ministerstva školstva Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Beloslav Riečan, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Peter Maličký, Mária Rakovská
Technická a grafická úprava: Mária Benešová, Vladimír Kutnár
Všetky príspevky prešli odbornou recenziou

Podávanie novinových zásielok povolené
Riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 4377/93-P zo dňa 8.12.93

ISSN 1335-4981

OBSAH

Marek Z á z r i v e c : Súčty a Bernoulliho čísla 1
Jozef D o b o š : Kvadratické rovnice a nerovnice 10
Vladimír T o m a : Úvaha o jednom ekonomickom príklade 19
Poškolácke úlohy (Rubriku vedie Pavol Černek) 23
Dušan J e d i n á k : Prehľad životopisných údajov významných matematikov 27
Ladislav K v a s z : Matematika a teológia 32
Milada O m a c h e l o v á : Numerická matematika a nový prístup k jej výučbe 40
Jozef J a n o v i č : Úvaha o súčasnom stave školskej fyziky na Slovensku 44
Daniela H o r v á t h o v á, Ľubomír Z e l e n i c k ý, Mária R a k o v s k á : Modelovanie zmyslového orgánu určeného na priestorovú orientáciu 50

JUBILEUM

Spomienky pri príležitosti dvoch jubileí 62

FROM CONTENTS

Marek Zázrivec: Sums and Bernoulli Numbers 1
Jozef Doboš: The quadratic Equations and Unequalities 10
Vladimír Toma: Reflection on one economic Example 19
Out-of-School Problems 23
Dušan Jedinák: A Survey of biographic Dates of influential Mathematicians 27
Ladislav Kvasz: Mathematics and Theology 32
Milada Omachelová: Numerical Mathematics and new Access to its Teaching 40
Jozef Janovič: Reflection on the Present State of the School Physics in Slovakia 44
Daniela Horváthová, Ľubomír Zelenický, Mária Rakovská: Modelling of a Sense-Organ designed for the Space Orientation 50