

OBSOBNY

3/2002(31)

MATEMATIKY

FYZIKY a

INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2002(31)

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

Vedeckí redaktori:

matematickej časti: Beloslav R i e č a n
fyzikálnej časti: Daniel K l u v a n e c

Výkonní redaktori:

matematickej časti: Peter M a l i č k ý
fyzikálnej časti: Mária R a k o v s k á

Redakčná rada:

Matematická a informatická časť:

Hynek Bachratý, Viera Blahová, Pavol Černek, Jozef Doboš, Martin Gavallec, Tomáš Hecht, Karel Horák, Vladimír Jodas, Mária Kmeťová, Viera Kyšelicová, Marian Macko, Peter Maličský, Božena Mihalíková, Anna Michalcová, Gustáv Nagy, Zdeněk Půlpán, Mária Sadloňová, Bohuš Sivák, Robert Szelepcsényi, Ladislav Topolský, János Tóth, Jan Vinař, Michal Winczer, Viktor Witkovský

Fyzikálna časť:

Mária Barbierová, Michal Blaško, Anna Jankovychová, Václav Havel, Arpád Kecskés, Dalibor Krupa, Václav Koubek, Stanislav Ondrejka, Juraj Šebesta, Eva Tomanová, Ivo Volf

Adresa redakcie:

Matematická časť:

Katedra matematiky FPV UMB, Tajovského 40, 974 01 Banská Bystrica
(e-mail: malicky@fpv.umb.sk)

Fyzikálna časť:

Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: mrakovska@ukf.sk)

Objednávky a predplatné vybavuje:

Redakcia OMFÍ, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra

Poznámka o limitách

Jozef Doboš

Abstract: In the first part of this paper we study limits of real sequences. In the second part we study limits of functions of several variables.

Nedávno boli v tomto časopise publikované články [2] a [6], ktoré boli zamerané na limity. Mimo ich záberu však zostali limity postupností a limity funkcií viacerých premenných. Pokúsime sa túto medzeru vyplniť.

Limity postupností

L'Hospitalovo pravidlo úspešne používame aj pri výpočtoch limit postupností. Pritom výpočet limity postupnosti prevádzame na výpočet limity vhodnej funkcie $f(x)$ takej, že $f(n) = a_n$ pre všetky prirodzené čísla n . Potom z existencie limity $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ vyplýva existencia limity $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.¹

Menej často sa používa pravidlo l'Hospitalovho typu pre postupnosti, v ktorom sú derivácie nahradené diferenciami. V literatúre ho môžeme nájsť pod názvom Stolzova veta. (Pozri napr. [4], [7], [8], alebo [10].)

Veta 1. (Stolzova veta)

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca neohraničená postupnosť reálnych čísel.

Ak existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ (konečná alebo nekonečná), potom postupnosť $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

Dôsledok Stolzovej vety (pre $a_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$ a $b_n = n$) je známy ako Cauchyho veta. (Pozri napr. [8].)

¹Opačný postup, t.j. nahradenie výpočtu limity funkcie výpočtom limity príslušnej postupnosti, nie je korektný. Napríklad $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi n)$ versus $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\pi x)$.

Veta 2. (Cauchyho veta)

Nech $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Ak existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ (konečná alebo nekonečná), potom postupnosť $\{(c_1 + c_2 + \dots + c_n)/n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Tieto tvrdenia môžeme zaradiť do výuky ešte pred limitami funkcií.

Príklad 1.

Ukážeme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. Skutočne, podľa Stolzovej vety máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Tento výsledok použijeme pri výpočte limity $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ nasledujúcim spôsobom:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1.$$

Úlohy

Pomocou Cauchyho vety vypočítajte:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{n}, \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}.$$

Pomocou Stolzovej vety vypočítajte:

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}, \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2}{n^3}.$$

Limity funkcií viacerých premenných

Bohužiaľ, v tomto prípade žiadnu analógiu l'Hospitalovho pravidla k dispozícii nemáme. Najčastejšie používame nasledujúcu vetu. (Pozri napr. [3].)

Veta o troch limitách

Nech U je také okolie bodu $[x_0, y_0]$, že pre každé $[x, y] \in U$, $[x, y] \neq [x_0, y_0]$, platí

$$h(x, y) \leq f(x, y) \leq g(x, y).$$

Ak $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} h(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y) = L$, potom $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L$.

Príklad 2.

Vypočítame limitu

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln(x^2 + y^2).$$

Pretože $2|xy| \leq x^2 + y^2$, platí

$$0 \leq |xy \ln(x^2 + y^2)| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)|\ln(x^2 + y^2)|.$$

Pretože

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$$

(o čom sa môžeme presvedčiť napr. pomocou l'Hospitalovho pravidla), podľa vety o troch limitách platí

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln(x^2 + y^2) = 0.$$

Tento výsledok môžeme použiť napr. pri nasledujúcom výpočte:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{xy \ln(x^2 + y^2)} = e^0 = 1.$$

Na výpočet limit funkcií dvoch premenných sa okrem vety o troch limitách používa transformácia do polárnych súradníc. Tento postup, ktorý je prístupným spôsobom vysvetlený napr. v [3], môžeme nájsť už v klasickej učebnici [11].

Pri rozhodovaní o tom, či existuje limita

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y), \tag{1}$$

najčastejšie vyšetrujeme chovanie funkcie $f(x, y)$ v okolí bodu $[0, 0]$ na priamkach $y = kx$. Ak totiž zistíme, že limita $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx)$ závisí od konštanty k , limita (1) neexistuje.

Na druhej strane, ak limita $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx)$ nezávisí od konštanty k , limita (1) ešte nemusí existovať. Ukážeme si to na príklade.

Príklad 3.

Budeme uvažovať funkciu $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$. Najskôr ukážeme, že po všetkých priamkach $y = kx$ (vzhľadom na definičný obor funkcie $f(x, y)$ musí byť $k \neq 0$) limita $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx)$ nezávisí od konštanty k . Skutočne,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{k} = 0.$$

Ak ale položíme $y = x^2$, potom

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Pretože

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2),$$

hľadaná limita neexistuje.

Všimnime si, že funkcia $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ nie je definovaná na žiadnom rýdzo okolí bodu $[0, 0]$. ⁽²⁾ Skutočne, $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$, t.j. celá x -ová os leží mimo jej definičného oboru. Ďalšia námietka proti funkcii $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ sa môže týkať jej neohraničenosti (napr. $f(1, 1/n) = n$). Nasledujúci príklad ukazuje, že tieto námietky sú neopodstatnené. Funkciu $h(x, y)$ zostrojíme ako zloženú funkciu z funkcie $f(x, y)$, ktorá bola použitá v predchádzajúcom príklade, a z funkcie $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Potom platí:

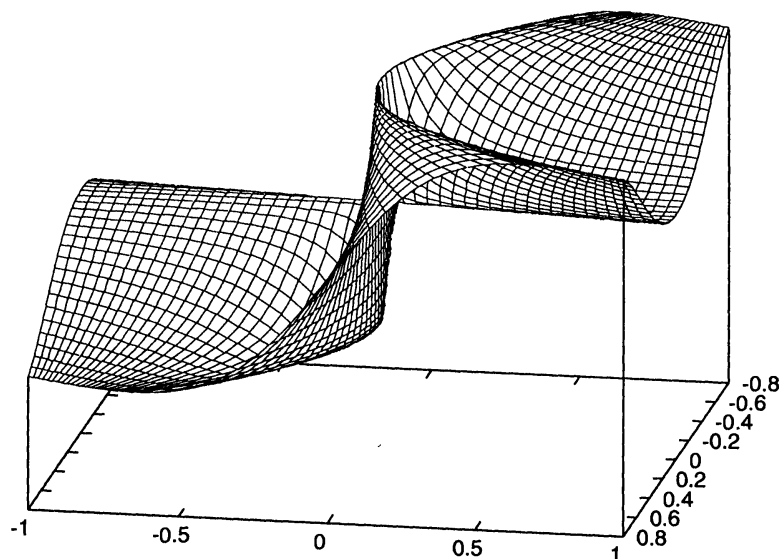
$$h(x, y) = g(f(x, y)) = \frac{\frac{x^2}{y}}{1 + \left(\frac{x^2}{y}\right)^2} = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Príklad 4.

Budeme uvažovať funkciu

$$h(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}. \quad (2)$$

Definičným oborom funkcie $h(x, y)$ je množina $D(h) = \mathbb{R}^2 - \{[0, 0]\}$, teda funkcia $h(x, y)$ je definovaná na každom rýdzo okolí bodu $[0, 0]$. Pretože funkcia $g(x)$ je ohraničená (nie je ťažké overiť, že pre všetky reálne čísla x platí $-\frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$), aj funkcia $h(x, y)$ je ohraničená.



²Rýdze okolí bodu $[x_0, y_0]$ je množina $V = U - \{[x_0, y_0]\}$, kde U je okolí bodu $[x_0, y_0]$. Používa sa aj názov prstencové okolí.

Prejdeme k výpočtu limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x, kx). \quad (3)$$

Ak $k = 0$, potom pre $x \neq 0$ platí $h(x, 0) = 0$. Predpokladajme, že $k \neq 0$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot kx}{x^4 + (kx)^2} = \quad (4)$$

Pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{x^2 + k^2} = \frac{1}{k}$, podľa (4) máme $\lim_{x \rightarrow 0} h(x, kx) = 0$. Tým sme ukázali, že limita (3) sa rovná nule pre každé reálne číslo k .

Teraz ukážeme, že limita $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} h(x, y)$ neexistuje. Ak položíme $y = x^2$, potom

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0} h(x, kx).$$

Poznámka 1. Ako sme videli, skutočnosť, že limita $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx)$ nezávisí od čísla k , ešte nezaručuje existenciu limity (1). Preto "riešenia" úloh na výpočet limity, ktoré sú založené na nezávislosti od parametra k , nemôžeme akceptovať. A to ani v prípade, že limita (1) skutočne existuje.

Poznámka 2. Funkcia $h(x, y)$ (kde definujeme $h(0, 0) = 0$) sa tiež používa ako klasický príklad funkcie, ktorej prvé parciálne derivácie existujú všade, ale ktorá nie je spojitá. (Pozri [1] a [5]. Historické súvislosti sú pekne spracované v [1] a [9].)

L i t e r a t ú r a

- [1] Calvis, D.: *Partially differentiable, yes; continuous, no*, College Math. Journal **31**, 2000, 42–49
- [2] Dlouhý, O. – Černek, P.: *Na chybách sa najlepšie učí*. Obzory matematiky, fyziky a informatiky, **53/1998**, 25–28
- [3] Došlá, Z. – Plich, R. – Sojka, P.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*.
http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/index_cd.html
- [4] Fischer, E.: *Intermediate Real Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1983, ISBN 3-540-90721-1
- [5] Gelbaum, B. R. – Olmsted, J. M. H.: *Theorems and Counterexamples in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1990, ISBN 0-387-97342-7
- [6] Kubáček, Z.: *Pozor na l'Hospitala!* Obzory matematiky, fyziky a informatiky **4/2001(30)**, 1–13
- [7] Ляшко, И. И. – Боярчук, А. К. – Гай, Я. Г. – Калайда, А. Ф.: *Математический анализ, часть 1*, Вища школа, Киев, 1983
- [8] Lukeš, J. a kol.: *Problémy z matematické analýzy*. Univerzita Karlova, Praha, 1982
- [9] Piotrowski, Z.: *The genesis of separate versus joint continuity*. Tatra Mt. Math. Publ. **8**, 1996, 113–126
- [10] Stolz, O.: *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik*. Teubner, Leipzig, 1885
<http://library5.library.cornell.edu/math.html>
- [11] Stolz, O.: *Grundzüge Differential- und Integralrechnung*. Teubner, Leipzig, 1893
<http://library5.library.cornell.edu/math.html>

Adresa autora:

Jozef Doboš, Katedra aplikovanej matematiky SjF TU, Letná 9, 042 00 Košice
e-mail: Jozef.Dobos@tuke.sk, www-stránka: <http://www.tuke.sk/dobos>

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
3/2002(31)

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným príspevím
Ministerstva školstva Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Beloslav Riečan, Daniel Klivanec
Výkonní redaktori: Peter Maličský, Mária Rakovská
Technická a grafická úprava: Mária Benešová, Vladimír Kutnár
Všetky príspevky prešli odbornou recenziou

Podávanie novinových zásielok povolené
Riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 4377/93-P zo dňa 8.12.93

ISSN 1335-4981

OBSAH

Stanisław Domoradzki, Milan Hejný: Chyba v interakcii učiteľ - žiak	1
Jozef Doboš: Poznámka o limitách	15
Adam Płocki: Pravdepodobnosť a symetria	20
Ivan Turek: Význam matematiky a fyziky pre spoločnosť	30
Jozef Mészáros: Názory, postoje a reakcie stredoškolského učiteľa na nové učebnice matematiky pre gymnáziá a SOŠ ...	34
Rastislav Baník, Ivan Baník: Rozvoj fyzikálneho myslenia žiakov za uplatňovania zaujímavých a poučných experimentálnych úloh	37
Igor Štubňa, Lubomír Zelenický: Program pokročilej fyziky na stredných školách v USA	44
Texty úloh 1. kola 44. ročníka fyzikálnej olympiády (šk. r. 2002 - 2003), kategórie B, C, D	47
Kalendár 44. ročníka Fyzikálnej olympiády (školský rok 2002/2003) v Slovenskej republike	58
Mária Rakovská: Kalendár významných osobností fyziky v roku 2002	59
INFORMÁCIE	
XIII. Medzinárodná konferencia DIDFYZ '02 Inovácia obsahu fyzikálneho vzdelávania (Račkova dolina 16. - 19. október 2002)	62

FROM CONTENTS

Stanisław Domoradzki, Milan Hejný: Error in Interaction Teacher -Student.....	1
Jozef Doboš: A Remark on Limits	15
Adam Płocki: Probability and Symmetry.....	20
Ivan Turek: The Importance of Mathematics and Physics for the Society	30
Jozef Mészáros: Thoughts, Attitudes and Reactions of the Secondary Teacher on New Textbooks of Mathematics for Grammar Schools and Secondary Trade Schools	34
Rastislav Baník, Ivan Baník: Development of the Physical Thoughts via Interesting and Edifying Experimental Problems	37
Igor Štubňa, Lubomír Zelenický: The Programme of Advanced Physics on the Secondary Schools in the USA.....	44
Text of the Problems of the 1 st Cycle of 44 th Year of Physics Olympiad (School year 2002-2003), Category B, Category C, Category D	47
Schedule (Calendar) of the 44 th Year of Physical Olympiad (School year 2002-2003) in the Slovak Republic	58
Mária Rakovská: Calendar of Important Figures of Physics of the year 2002	59