OBZORY MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

3/2002(31)

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2002(31)

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

Adresa redakcie:

Matematická časť:
Katedra matematiky FPV UMB, Tajovského 40, 974 01 Banská Bystrica
(e-mail: malicky@fpv.umb.sk)
Fyzikálna časť:
Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: mrakovska@ukf.sk)
Objednávky a predplatné vybavuje:
Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 3/2002 (33)

Poznámka o limitách

Jozef Doboš

Abstract: In the first part of this paper we study limits of real sequences. In the second part we study limits of functions of several variables.

Nedávno boli v tomto časopise publikované články [2] a [6], ktoré boli zamerané na limity. Mimo ich záberu však zostali limity postupností a limity funkcií viacerých premenných. Pokúsime sa túto medzeru vyplniť.

Limity postupností

L'Hospitalovo pravidlo úspešne používame aj pri výpočtoch limít postupností. Pritom výpočet limity postupnosti prevádzame na výpočet limity vhodnej funkcie $f(x)$ takej, že $f(n) = a_n$ pre všetky prirodzené čísla n. Potom z existencie limity $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ vyplýva existencia limity $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. [1]

Menej často sa používa pravidlo l'Hospitalovho typu pre postupnosti, v ktorom sú derivácie nahradené diferenciami. V literatúre ho môžeme nájsť pod názvom Stolzova veta. (Pozri napr. [4], [7], [8], alebo [10].)

Veta 1. (Stolzova veta)

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca neohraničená postupnosť reálnych čísel.

Ak existuje limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ (konečná alebo nekonečná), potom postupnosť $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

Dôsledok Stolzovej vety (pre $a_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ a $b_n = n$) je známy ako Cauchyho veta. (Pozri napr. [8].)

[1] Opačný postup, t.j. nahradenie výpočtu limity funkcie výpočtom limity príslušnej postupnosti, nie je korektný. Napríklad $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi n)$ versus $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(\pi x)$.

Veta 2. (Cauchyho veta)

Nech $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Ak existuje limita $\lim_{n\to\infty} c_n$ (konečná alebo nekonečná), potom postupnosť $\{(c_1+c_2+\cdots+c_n)/n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n} = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Tieto tvrdenia môžeme zaradiť do výuky ešte pred limitami funkcií.

Príklad 1.

Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. Skutočne, podľa Stolzovej vety máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Tento výsledok použijeme pri výpočte limity $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ nasledujúcim spôsobom:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Úlohy

Pomocou Cauchyho vety vypočítajte:

$a)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$, $\quad b)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

Pomocou Stolzovej vety vypočítajte:

$c)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$, $\quad d)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$.

Limity funkcií viacerých premenných

Bohužiaľ, v tomto prípade žiadnu analógiu l'Hospitalovho pravidla k dispozícii nemáme. Najčastejšie používame nasledujúcu vetu. (Pozri napr. [3].)

Veta o troch limitách

Nech U je také okolie bodu $[x_0, y_0]$, že pre každé $[x,y] \in U$, $[x,y] \neq [x_0,y_0]$, platí

$$h(x,y) \leqq f(x,y) \leqq g(x,y).$$

Ak $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} h(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = L$, potom $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = L$.

Príklad 2.

Vypočítame limitu
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\ln(x^2+y^2).$$
Pretože $2|xy| \leqq x^2+y^2$, platí
$$0 \leqq |xy\ln(x^2+y^2)| \leqq \frac{1}{2}(x^2+y^2)|\ln(x^2+y^2)|.$$
Pretože
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{t\to 0+} t\ln t = 0$$
(o čom sa môžeme presvedčiť napr. pomocou l'Hospitalovho pravidla), podľa vety o troch limitách platí
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\ln(x^2+y^2) = 0.$$
Tento výsledok môžeme použiť napr. pri nasledujúcom výpočte:
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{xy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \mathrm{e}^{xy\ln(x^2+y^2)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Na výpočet limít funkcií dvoch premenných sa okrem vety o troch limitách používa transformácia do polárnych súradníc. Tento postup, ktorý je prístupným spôsobom vysvetlený napr. v [3], môžeme nájsť už v klasickej učebnici [11].

Pri rozhodovaní o tom, či existuje limita
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y), \tag{1}$$
najčastejšie vyšetrujeme chovanie funkcie $f(x,y)$ v okolí bodu $[0,0]$ na priamkach $y = kx$. Ak totiž zistíme, že limita $\lim_{x\to 0} f(x,kx)$ závisí od konštanty k, limita (1) neexistuje.

Na druhej strane, ak limita $\lim_{x\to 0} f(x,kx)$ nezávisí od konštanty k, limita (1) ešte nemusí existovať. Ukážeme si to na príklade.

Príklad 3.

Budeme uvažovať funkciu $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$. Najskôr ukážeme, že po všetkých priamkach $y = kx$ (vzhľadom na definičný obor funkcie $f(x,y)$ musí byť $k \neq 0$) limita $\lim_{x\to 0} f(x,kx)$ nezávisí od konštanty k. Skutočne,
$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{kx} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{k} = 0.$$
Ak ale položíme $y = x^2$, potom
$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Pretože

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 0} f(x,x^2),$$

hľadaná limita neexistuje.

Všimnime si, že funkcia $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ nie je definovaná na žiadnom rýdzom okolí bodu $[0,0]$. ([2]) Skutočne, $D(f) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$, t.j. celá x-ová os leží mimo jej definičného oboru. Ďalšia námietka proti funkcii $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ sa môže týkať jej neohraničenosti (napr. $f(1,1/n) = n$). Nasledujúci príklad ukazuje, že tieto námietky sú neopodstatnené. Funkciu $h(x,y)$ zostrojíme ako zloženú funkciu z funkcie $f(x,y)$, ktorá bola použitá v predchádzajúcom príklade, a z funkcie $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Potom platí:

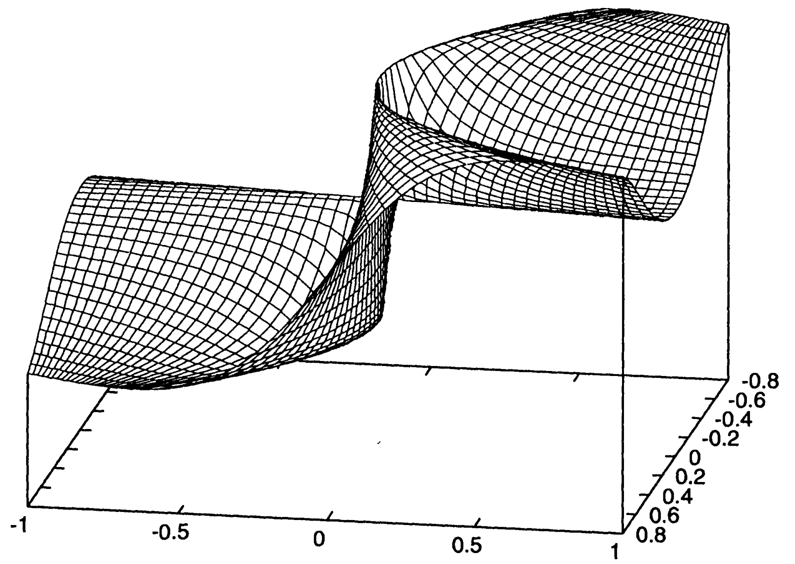
$$h(x,y) = g(f(x,y)) = \frac{\frac{x^2}{y}}{1+\left(\frac{x^2}{y}\right)^2} = \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

Príklad 4.

Budeme uvažovať funkciu

$$h(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}. \tag{2}$$

Definičným oborom funkcie $h(x,y)$ je množina $D(h) = \mathbb{R}^2 - \{[0,0]\}$, teda funkcia $h(x,y)$ je definovaná na každom rýdzom okolí bodu $[0,0]$. Pretože funkcia $g(x)$ je ohraničená (nie je ťažké overiť, že pre všetky reálne čísla x platí $-\frac{1}{2} \leqq g(x) \leqq \frac{1}{2}$), aj funkcia $h(x,y)$ je ohraničená.



[2] Rýdze okolie bodu $[x_0,y_0]$ je množina $V = U - \{[x_0,y_0]\}$, kde U je okolie bodu $[x_0,y_0]$. Používa sa aj názov prstencové okolie.

Prejdeme k výpočtu limity

$$\lim_{x\to 0} h(x,kx). \tag{3}$$

Ak $k=0$, potom pre $x\neq 0$ platí $h(x,0)=0$. Predpokladajme, že $k\neq 0$. Potom

$$\lim_{x\to 0} h(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot kx}{x^4+(kx)^2} = \tag{4}$$

Pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{k}{x^2+k^2} = \frac{1}{k}$, podľa (4) máme $\lim\limits_{x\to 0} h(x,kx)=0$. Tým sme ukázali, že limita (3) sa rovná nule pre každé reálne číslo k.

Teraz ukážeme, že limita $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} h(x,y)$ neexistuje. Ak položíme $y=x^2$, potom

$$\lim_{x\to 0} h(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{x\to 0} h(x,kx).$$

Poznámka 1. Ako sme videli, skutočnosť, že limita $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx)$ nezávisí od čísla k, ešte nezaručuje existenciu limity (1). Preto "riešenia" úloh na výpočet limity, ktoré sú založené na nezávislosti od parametra k, nemôžeme akceptovať. A to ani v prípade, že limita (1) skutočne existuje.

Poznámka 2. Funkcia $h(x,y)$ (kde definujeme $h(0,0)=0$) sa tiež používa ako klasický príklad funkcie, ktorej prvé parciálne derivácie existujú všade, ale ktorá nie je spojitá. (Pozri [1] a [5]. Historické súvislosti sú pekne spracované v [1] a [9].)

Literatúra

[1] Calvis, D.: *Partially differentiable, yes; continuous, no,* College Math. Journal **31,** 2000, 42–49

[2] Dlouhý, O. – Černek, P. :*Na chybách sa najlepšie učí.* Obzory matematiky, fyziky a informatiky, **53**/1998, 25–28

[3] Došlá, Z. – Plch, R. – Sojka, P.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/index_cd.html

[4] Fischer, E.: *Intermediate Real Analysis.* Springer-Verlag, New York, 1983, ISBN 3-540-90721-1

[5] Gelbaum, B. R. – Olmsted, J. M. H. :*Theorems and Counterexamples in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1990, ISBN 0-387-97342-7

[6] Kubáček, Z.: *Pozor na l'Hospitala!* Obzory matematiky, fyziky a informatiky **4**/2001(30), 1–13

[7] Ляшко, И. И. – Боярчук, А. К. – Гай, Я. Г. – Калайда, А. Ф.: *Математический анализ, часть 1,* Вища школа, Киев, 1983

[8] Lukeš, J. a kol.: *Problémy z matematické analýzy.* Univerzita Karlova, Praha, 1982

[9] Piotrowski, Z. :*The genesis of separate versus joint continuity.* Tatra Mt. Math. Publ. **8**, 1996, 113–126

[10] Stolz, O.: *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik.* Teubner, Leipzig, 1885 http://library5.library.cornell.edu/math.html

[11] Stolz, O.: *Grundzüge Differential- und Integralrechnung.* Teubner, Leipzig, 1893 http://library5.library.cornell.edu/math.html

Adresa autora:
Jozef Doboš, Katedra aplikovanej matematiky SjF TU, Letná 9, 042 00 Košice
e-mail: **Jozef.Dobos@tuke.sk**, www-stránka: **http://www.tuke.sk/dobos**

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
3/2002(31)

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným prispením
Ministerstva školstva Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Beloslav Riečan, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Peter Maličký, Mária Rakovská
Technická a grafická úprava: Mária Benešová, Vladimír Kutnár
Všetky príspevky prešli odbornou recenziou

Podávanie novinových zásielok povolené
Riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 4377/93-P zo dňa 8.12.93

ISSN 1335-4981

OBSAH

FROM CONTENTS