OBZORY

2/2002(31)

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2002(31)

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

Adresa redakcie:

Matematická časť:
Katedra matematiky FPV UMB, Tajovského 40, 974 01 Banská Bystrica
(e-mail: malicky@fpv.umb.sk)
Fyzikálna časť:
Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
(e-mail: mrakovska@ukf.sk)
Objednávky a predplatné vybavuje:
Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2002 (31)

AG-nerovnosť

Jozef Doboš

Abstract: The paper is devoted to the AG-inequality. The proof, which is based on approach of Pinter and Hegedüs [4], and some applications are presented.

Cieľom tohto článku je na jednej strane ukázať, že úvahy vedúce k dôkazu nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom môžu poskytnúť bohatý materiál na formovanie matematického myslenia študentov, na druhej strane ukázať, že táto nerovnosť môže byť efektívnym nástrojom.

Pod AG-nerovnosťou budeme rozumieť odhad

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

ktorý platí pre nezáporné čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pritom rovnosť nastáva práve vtedy, keď platí $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Autorom najznámejšieho dôkazu AG-nerovnosti je A. L. Cauchy. Tento dôkaz využíva matematickú indukciu. Najskôr sa dokáže platnosť nerovnosti v prípade, že počet v nej vystupujúcich čísel je mocnina dvojky, teda pre $n = 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^k, \ldots$. Potom sa použije „spätná indukcia“ – dokáže sa, že ak nerovnosť platí pre n čísel (tu n už nie je nutne mocnina dvojky), tak platí aj pre $n - 1$ čísel.

Dôkazy využívajúce vyššiu matematiku sa používajú zriedkavejšie. V tomto článku sa im nebudeme venovať.

Za zmienku stojí najkratší dôkaz, ktorý bol publikovaný v roku 1976, a to hneď v dvoch variantoch. Prof. Kraemer aktuálne zaradil tento dôkaz do svojho článku [9] už v roku 1977, môžete si ho teda preštudovať aj v češtine.

Medzi metodicky najlepšie prepracované patrí dôkaz z knihy [3] P. P. Korovkina. Ďalšia skupina dôkazov je založená na postupnom zlepšovaní odhadov. V tomto smere je asi najlepšie prepracovaný prístup Pintera a Hegedüsa (pozri [4]). Dôkaz použitý v tomto článku vznikol kombináciou posledných dvoch.

Najskôr sa dohodneme na nasledujúcom označení. Ak reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ usporiadame podľa veľkosti, potom namiesto zápisu $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$, ktorý používame v prípade ľubovoľnej permutácie indexov, použijeme zápis $a_{(1)}, a_{(2)}, \dots, a_{(n)}$, ktorý je vyhradený pre permutácie s vlastnosťou

$$a_{i_1} \leqq a_{i_2} \leqq \cdots \leqq a_{i_n}.$$

Inými slovami, čísla $a_{(1)}, a_{(2)}, \dots, a_{(n)}$ sú presne tie isté čísla ako $a_1, a_2, \dots, a_n$, len sú usporiadané podľa veľkosti, t.j. platí

$$a_{(1)} \leqq a_{(2)} \leqq \dots \leqq a_{(n)}.$$

Tvrdenie 1.

Predpokladajme, že sú dané dve skupiny reálnych čísel

$$\begin{array}{c} a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n, \\ b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n. \end{array}$$

Potom platí

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n \leqq a_{(1)} \cdot b_{(1)} + a_{(2)} \cdot b_{(2)} + \cdots + a_{(n)} \cdot b_{(n)}. \tag{1}$$

Dôkaz.

Nech $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ je také, že $a_r = a_{(n)}$. Nech $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ je také, že $b_s = b_{(n)}$. Pretože platí

$$\underbrace{(a_r - a_s)}_{\geqq 0} \cdot \underbrace{(b_s - b_r)}_{\geqq 0} \geqq 0,$$

máme

$$a_s \cdot b_s + a_r \cdot b_r \leqq a_r \cdot b_s + a_s \cdot b_r = a_s \cdot b_r + a_{(n)} \cdot b_{(n)}.$$

Odtiaľ

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = a_s \cdot b_s + a_r \cdot b_r + \sum_{i=1,\ i \neq s,\ i \neq r}^{n} a_i \cdot b_i \leqq a_s \cdot b_r + \sum_{i=1,\ i \neq s,\ i \neq r}^{n} a_i \cdot b_i + a_{(n)} \cdot b_{(n)}. \tag{2}$$

V druhej skupine navzájom vymeníme čísla b_r a b_s, čím dosiahneme, že čísla $a_{(n)} = a_r$ a $b_{(n)} = b_s$ budú umiestnené pod sebou. Po ich vynechaní sa počet čísel v každej skupine o jedno zmenší. Takto vytvorené skupiny označíme

$$\begin{array}{c} c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_{n-1}, \\ d_1,\ d_2,\ \dots,\ d_{n-1}. \end{array}$$

Teda čísla $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ sú presne tie isté čísla ako $a_{(1)}, a_{(2)}, \dots, a_{(n-1)}$, len môžu byť inak usporiadané. Podobne, čísla $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ sú presne tie isté čísla ako $b_{(1)}, b_{(2)}, \dots, b_{(n-1)}$, len môžu byť inak usporiadané. Pritom pod sebou ležia presne tie isté čísla ako v pôvodnom zozname, avšak s jedinou výnimkou – pod číslom a_s leží číslo b_r. Teda platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i \cdot d_i = a_s \cdot b_r + \sum_{i=1,\ i \neq s,\ i \neq r}^{n} a_i \cdot b_i.$$

Potom podľa (2) máme

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \leqq \sum_{i=1}^{n-1} c_i \cdot d_i + a_{(n)} \cdot b_{(n)}. \tag{3}$$

Keď celý proces zopakujeme so skupinami čísel

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-1},$$
$$d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_{n-1}.$$

dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i \cdot d_i \leqq \sum_{i=1}^{n-2} e_i \cdot f_i + c_{(n-1)} \cdot d_{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n-2} e_i \cdot f_i + a_{(n-1)} \cdot b_{(n-1)},$$

kde čísla $e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}$ sú presne tie isté čísla ako $a_{(1)}, a_{(2)}, \ldots, a_{(n-2)}$, len môžu byť inak usporiadané. Podobne, čísla $f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}$ sú presne tie isté čísla ako $b_{(1)}, b_{(2)}, \ldots, b_{(n-2)}$, len môžu byť inak usporiadané.

Potom podľa (3) dostávame

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \leqq \sum_{i=1}^{n-2} e_i \cdot f_i + a_{(n-1)} \cdot b_{(n-1)} + a_{(n)} \cdot b_{(n)}.$$

Naznačený postup opakujeme dovtedy, kým nedokážeme platnosť nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \leqq a_{(1)} \cdot b_{(1)} + \cdots + a_{(n-1)} \cdot b_{(n-1)} + a_{(n)} \cdot b_{(n)}.$$

Základná myšlienka uvedeného dôkazu bola založená na jednoduchom fakte:

$$\text{ak } a \leqq A,\ b \leqq B,\ \text{potom platí } a \cdot B + A \cdot b \leqq a \cdot b + A \cdot B,$$

čo dostaneme po úprave z nerovosti $(A - a) \cdot (B - b) \geqq 0$. Napriek tomu je zachytenie dôkazu v symbolickom jazyku relatívne ťažkopádne. Preto pri výuke odporúčame najskôr ilustrovať použitý postup na príklade:

2	1	3	**4**	2
5	3	1	4	2

2	1	**3**	$\boxed{4}$	2
4	3	1	$\boxed{5}$	2

2	1	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	2
1	**3**	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	2

$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$
$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{2}$

Pre každú tabuľku vypočítame príslušný súčet súčinov tvaru:

$$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 + u_4 \cdot v_4 + u_5 \cdot v_5.$$

Takto postupne dostávame čísla $36 < 38 < 41 < 43$.

Dôkaz nasledujúceho tvrdenia prenechávame čitateľovi.

Tvrdenie 2.

Predpokladajme, že sú dané dve skupiny reálnych čísel

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,$$
$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n.$$

Potom platí

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n \geqq a_{(1)} \cdot b_{(n)} + a_{(2)} \cdot b_{(n-1)} + \cdots + a_{(n)} \cdot b_{(1)}. \tag{4}$$

Ďalej budeme postupovať cez sériu jeho dôsledkov.

Tvrdenie 3.

Predpokladajme, že sú dané kladné reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Potom platí

$$\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}} \geqq n. \tag{5}$$

Dôkaz.

Položme $b_1 = \dfrac{1}{a_n}$, $b_2 = \dfrac{1}{a_1}$, $b_3 = \dfrac{1}{a_2}$, $\ldots$, $b_n = \dfrac{1}{a_{n-1}}$. Pretože platí

$$b_{(1)} = \frac{1}{a_{(n)}},\ b_{(2)} = \frac{1}{a_{(n-1)}},\ \ldots,\ b_{(n)} = \frac{1}{a_{(1)}},$$

podľa (4) máme

$$\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n \geqq$$
$$\geqq \underbrace{a_{(1)} \cdot b_{(n)}}_{=1} + \underbrace{a_{(2)} \cdot b_{(n-1)}}_{=1} + \cdots + \underbrace{a_{(n)} \cdot b_{(1)}}_{=1} = n.$$

Tvrdenie 4.

Predpokladajme, že sú dané kladné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ktorých súčin je rovný jednej (t.j. $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$). Potom platí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqq n. \tag{6}$$

Dôkaz.

Položme

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1, \\ a_2 &= x_1 x_2, \\ a_3 &= x_1 x_2 x_3, \\ &\vdots \\ a_n &= x_1 x_2 \ldots x_n = 1. \end{aligned}$$

Potom podľa (5) platí

$$n \leqq \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{x_1}{1} + \frac{x_1x_2}{x_1} + \frac{x_1x_2x_3}{x_1x_2} + \cdots + \frac{x_1x_2\ldots x_{n-1}x_n}{x_1x_2\ldots x_{n-1}} =$$

$$= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n.$$

Poznámka. Ukážeme, že rovnosť vo vzťahu (6) nastáva práve vtedy, keď všetky čísla x_1, x_2, $\ldots$, x_n sú rovnaké.

Predpokladajme, že čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nie sú všetky rovnaké. Potom aspoň jedno z nich je menšie ako jedna a aspoň jedno z nich je väčšie ako jedna.

Prípadnou zámenou poradia čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ môžeme dosiahnuť, aby platilo $x_1 < 1 < x_2$ (súčet $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ tým svoju hodnotu nezmení).

Položme $y_1 = 1$, $y_2 = x_1x_2$, $y_3 = x_3$, $y_4 = x_4$, $\ldots$, $y_n = x_n$. Pretože platí

$$(1 - x_1)(x_2 - 1) > 0,$$

máme

$$x_1 + x_2 > 1 + x_1x_2. \tag{7}$$

Pretože $y_1y_2\ldots y_n = x_1x_2\ldots x_n = 1$, podľa (7) a (6) platí

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n > 1 + x_1x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \cdots + y_n \geqq n.$$

Teraz už máme všetko pripravené k dôkazu nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom.

Veta (AG-nerovnosť.)

Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú kladné reálne čísla. Potom platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}, \tag{8}$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Dôkaz.

Položme

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}, \\ x_2 &= \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}, \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}. \end{aligned}$$

Podľa (6) platí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqq n,$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď sú všetky čísla x_i rovnaké. Odtiaľ už vyplýva tvrdenie vety.

Poznamenajme, že táto veta platí dokonca pre nezáporné reálne čísla, pričom dôkaz v prípade, že niektoré a_i je rovné nule, je triviálny.

V ďalšej časti ukážeme využitie AG-nerovnosti pri riešení niektorých úloh.

Tvrdenie 5.

Pre ľubovoľné prirodzené čísla k, n platí

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{9}$$

Dôkaz.

Pretože podľa predchádzajúcej vety platí

$$\sqrt[n+k+1]{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} < \frac{k\left(1+\frac{1}{k}\right)+(n+1)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{k+n+1} = 1,$$

máme

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 1,$$

odkiaľ už priamo vyplýva dokazovaná nerovnosť.

Poznámka. V kurzoch matematickej analýzy sa dokazuje (najčastejšie pomocou binomickej vety), že postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$, je ohraničená. Pritom priamo z (9) vyplýva nerovnosť

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 4.$$

Premyslite si, ako možno z (9) získať lepšie odhady.

Tvrdenie 6.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, je rastúca.

Dôkaz.

Z AG-nerovnosti dostávame

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1},$$

odkiaľ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Tvrdenie 7.

Postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, je klesajúca.

Dôkaz.

Z AG-nerovnosti dostávame

$$\sqrt[n+2]{1\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} < \frac{1+(n+1)\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{n+2},$$

odkiaľ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Tvrdenie 8.

Pre každé prirodzené číslo n platí

$$\sqrt[n]{n} < 1+\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{10}$$

Dôkaz.[1]

Pre $n \in \{1,2,3\}$ sa nerovnosť overí výpočtom.

Pre každé prirodzené číslo $n \geqq 4$ z AG-nerovnosti dostávame

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1^{n-4}\cdot 2^2\cdot\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^2} < \frac{(n-4)\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot\frac{\sqrt{n}}{2}}{n} = 1+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Pre porovnanie uvedieme aj dôkaz pomocou binomickej vety. Pre každé prirodzené číslo $n \geqq 4$ (dokonca pre $n \geqq 3$) platí

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n > \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n}+\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

K dokončeniu dôkazu stačí overiť, že pre všetky prirodzené čísla $n \geqq 4$ platí

$$\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n}+\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}} \geqq n.$$

Presvedčíme sa o tom pomocou nasledujúcich ekvivalentných úprav

$$\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}} \geqq n-\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n},$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{6\sqrt{n}} \geqq \frac{n+1}{2},$$

$$n+2 \geqq 3\sqrt{n},$$

$$(\sqrt{n}-2)(\sqrt{n}-1) \geqq 0.$$

[1]Tento postup navrhol RNDr. Tomáš Tomko.

Literatúra

[1] Вересова, Е. Е. – Денисова, Н. С. – Полякова, Т. Н.: *Практикум по решению математических задач*, Просвещение, Москва, 1979.

[2] Кудрявцев, Л. Д. – Кутасов, А. Д. – Чехлов, В. И. – Шабунин, М. И.: *Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость*, Наука, Москва, 1984.

[3] Коровкин, П. П.: *Неравенства*, Наука, Москва, 1983.

[4] Пинтер, Л. – Хегедыш, Й: *Упорядоченные наборы чисел и неравенства*, Квант 12, 1985, с. 14–16.

[5] Кузьмин, Е. – Ширшов, А: *О числе e*, Квант 8, 1979, с.'3–8.

[6] Doktor, P.: *Nerovnosti pre 4. ročník gymnázia s triedami zameranými na matematiku,* SPN, Bratislava, 1988, s. 17–19.

[7] Kong-Ming Ghong: *An inductive proof of the A.M.-G.M. inequality,* Amer. Math. Monthly 83, (1976), s. 369.

[8] Kong-Ming Ghong: *The arithmetic mean – geometric mean inequality: a new proof,* Mat. Mag. 49, (1976), s. 87–88.

[9] Kraemer, E.: *Aritmetický a geometrický průměr,* Rozhledy matematicko-fyzikální 56 (1977–78), I. s. 198–206, II. s. 251–257.

Adresa autora:
Jozef Doboš, Katedra aplikovanej matematiky SjF TU, Letná 9, 042 00 Košice
e-mail: Jozef.Dobos@tuke.sk, www-stránka: http://www.tuke.sk/dobos

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
2/2002(31)

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTONIT s.r.o. s finančným prispením
Ministerstva školstva Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Beloslav Riečan, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Peter Maličký, Mária Rakovská
Technická a grafická úprava: Mária Benešová, Vladimír Kutnár
Všetky príspevky prešli odbornou recenziou

Podávanie novinových zásielok povolené
Riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 4377/93-P zo dňa 8.12.93

ISSN 1335-4981

OBSAH

FROM CONTENTS